یہ کتاب میکملن کمپنی کی اجازت سے
جن کو حقوق کاپی رائٹ حاصل ہیں،
طبع کی گئی ہے۔

مقدمہ



دنیا میں ہر قوم کی زندگی میں ایک ایسا زمانہ آتا ہے جب کہ اُس کے قوائے ذہنی میں انحطاط کے آثار نمودار ہونے لگتے ہیں، ایجاد و اختراع اور غور و فکر کا مادّہ تقریباً مفقود ہو جاتا ہے، تخیل کی پرواز اور نظر کی جولانی تنگ اور محدود ہو جاتی ہے، علم کا دار و مدار چند رسمی باتوں اور تقلید پر رہ جاتا ہے۔ اُس وقت قوم یا تو بیکار اور مردہ ہو جاتی ہے یا سنبھلنے کے لئے یہ لازم ہوتا ہے کہ وہ دوسری ترقی یافتہ اقوام کا اثر قبول کرے۔ تاریخ عالم کے ہر دَور میں اس کی شہادتیں موجود ہیں۔ خود ہمارے دیکھتے دیکھتے جاپان پر یہی گذری اور یہی حالت اب ہندوستان کی ہے۔

جس طرح کوئی شخص دوسرے بنی نوع انسان سے قطع تعلق کرکے تنہا اور الگ تھلگ نہیں رہ سکتا اور اگر رہے تو پنپ

نہیں سکتا اسی طرح یہ بھی ممکن نہیں کہ کوئی قوم دیگر اقوام عالم سے بے نیاز ہو کر پھولے پھلے اور ترقی پائے۔ جس طرح ہوا کے جھونکے اور ادنیٰ پرندوں اور کیڑے مکوڑوں کے اثر سے وہ مقامات تک ہرے بھرے رہتے ہیں جہاں انسان کی دسترس نہیں اسی طرح انسانوں اور قوموں کے اثر بھی ایک دوسرے تک اڑ کر پہنچتے ہیں۔ جس طرح **یونان** کا اثر روما اور دیگر اقوام **یورپ** پر پڑا جس طرح **عرب** نے **عجم** کو اور **عجم** نے **عرب** کو اپنا فیض پہنچایا' جس طرح اسلام نے **یورپ** میں تاریکی اور جہالت کو مٹا کر علم کی روشنی پہنچائی اسی طرح آج ہم بھی بہت سی باتوں میں مغرب کے محتاج ہیں۔ یہ قانون عالم ہے جو یوں ہی جاری رہا اور جاری رہیگا۔

"دئے سے دیا یوں ہی جلتا رہا ہے"

جب کسی قوم کی نوبت یہاں تک پہنچ جاتی ہے اور وہ آگے قدم بڑھانے کی سعی کرتی ہے تو ادبیات کے میدان میں پہلی منزل ترجمہ ہوتی ہے۔ اس لئے کہ جب قوم میں جدت اور اپج نہیں رہی تو ظاہر ہے کہ اس کی تصانیف معمولی' ادھوری' کم مایہ اور ادنیٰ ہونگی۔ اُس وقت قوم کی بڑی خدمت یہی ہے کہ ترجمہ کے ذریعہ سے دنیا کی اعلیٰ درجہ کی تصانیف اپنی زبان میں لائی جائیں۔ یہی ترجمے خیالات میں تغیر اور معلومات میں اضافہ کریں گے' جمود کو توڑیں گے اور قوم میں ایک نئی حرکت پیدا کریں گے اور پھر آخر یہی ترجمے تصنیف و تالیف

کے جدید اسلوب اور ڈھنگ سمجھائیں گے۔ ایسے وقت میں ترجمہ تصنیف سے زیادہ قابل قدر، زیادہ مفید اور زیادہ فیض رساں ہوتا ہے۔

اسی اصول کی بنا پر جب عثمانیہ یونیورسٹی کی تجویز پیش ہوئی تو ہز اکزالٹڈ ہائینس رستم دوراں ارسطوئے زماں سپہ سالار آصف جاہ مظفر الممالک نظام الملک نظام الدولہ نواب میر عثمان علیخان بہادر فتح جنگ جی۔سی۔اس۔آئی۔جی۔سی۔بی۔ای۔والی حیدرآباد دکن خلد اللہ ملکہ و سلطنتہ نے جن کی علمی قدر دانی اور علمی سرپرستی اس زمانہ میں احیائے علوم کے حق میں آب حیات کا کام کر رہی ہے، بہ تقاضائے مصلحت و دور بینی سب سے اول سررشتۂ تالیف و ترجمہ کے قیام کی منظوری عطا فرمائی، جو نہ صرف یونیورسٹی کے لئے نصاب تعلیم کی کتابیں تیار کریگا بلکہ ملک میں نشر و اشاعتِ علوم و فنون کا کام بھی انجام دیگا۔ اگرچہ اس سے قبل بھی یہ کام ہندوستان کے مختلف مقامات میں تھوڑا تھوڑا انجام پایا مثلاً فورٹ ولیم کالج کلکتہ میں زیر نگرانی ڈاکٹر گلکرسٹ، دہلی سوسائٹی میں، انجمن پنجاب میں زیر نگرانی ڈاکٹر لائٹنر و کرنل ہالرائڈ، علی گڑھ سائنٹفک انسٹیوٹ میں جس کی بنا سر سید احمد خاں مرحوم نے ڈالی۔ مگر یہ کوششیں سب وقتی اور عارضی تھیں۔ نہ انکے پاس کافی سرمایہ اور سامان تھا نہ انہیں یہ موقع حاصل تھا

اور نہ انہیں اعلیٰحضرت و اقدس جیسے علم پرور فرمانروا کی سرپرستی کا شرف حاصل تھا۔ یہ پہلا وقت ہے کہ اردو زبان کو علوم و فنون سے مالا مال کرنے کے لئے باقاعدہ اور مستقل کوشش کی گئی ہے۔ اور یہ پہلا وقت ہے کہ اردو زبان کو یہ رتبہ ملا ہے کہ وہ اعلیٰ تعلیم کا ذریعہ قرار پائی ہے۔ احیائے علوم کے لئے جو کام آگسٹس نے رومہ میں، خلافت عباسیہ میں ہارون الرشید و مامون الرشید نے ہسپانیہ میں عبدالرحمٰن ثالث نے، بکرماجیت و اکبر نے ہندوستان میں، الفرڈ نے انگلستان میں، پیٹر اعظم و کیتھرائن نے روس میں اور مُتسو ہٹو نے جاپان میں کیا، وہی فرمانروائے دولت آصفیہ نے اس ملک کے لئے کیا۔ اعلیٰحضرت و اقدس کا یہ کارنامہ ہندوستان کی علمی تاریخ میں ہمیشہ فخر و مباہات کے ساتھ ذکر کیا جائیگا۔

منجملہ اُن اسباب کے جو قومی ترقی کا موجب ہوتے ہیں ایک بڑا سبب زبان کی تکمیل ہے۔ جس قدر جو قوم زیادہ ترقی یافتہ ہے اُسی قدر اُس کی زبان وسیع اور اس میں نازک خیالات اور علمی مطالب کے ادا کرنے کی زیادہ صلاحیت ہوتی ہے، اور جس قدر جس قوم کی زبان محدود ہوتی ہے اُسی قدر تہذیب و شایستگی بلکہ انسانیت میں اس کا درجہ کم ہوتا ہے۔ چنانچہ وحشی اقوام میں الفاظ کا ذخیرہ بہت ہی کم پایا گیا ہے۔ علمائے فلسفہ و علم اللسان نے یہ ثابت کیا ہے کہ زبان، خیال اور

خیال، زبان ہے اور ایک مدت کے بعد اس نتیجے پر پہنچے ہیں کہ انسانی دماغ کے صحیح تاریخی ارتقا کا علم، زبان کی تاریخ کے مطالعہ سے حاصل ہو سکتا ہے۔ الفاظ ہمیں سوچنے میں ویسی ہی مدد دیتے ہیں جیسی آنکھیں دیکھنے میں۔ اس لئے زبان کی ترقی درحقیقت عقل کی ترقی ہے۔

علم ادب اسی قدر وسیع ہے جس قدر حیاتِ انسانی۔ اور اس کا اثر زندگی کے ہر شعبہ پر پڑتا ہے۔ وہ نہ صرف انسان کی ذہنی، معاشرتی، سیاسی ترقی میں مدد دیتا، اور نظر میں وسعت، دماغ میں روشنی، دلوں میں حرکت اور خیالات میں تغیر پیدا کرتا ہے بلکہ قوموں کے بنانے میں ایک قوی آلہ ہے۔ قومیت کے لئے ہم خیالی شرط ہے اور ہم خیالی کے لئے ہم زبانی لازم۔ گویا یک زبانی قومیت کا شیرازہ ہے جو اسے منتشر ہونے سے بچائے رکھتا ہے۔ ایک زمانہ تھا جب کہ مسلمان اقطاع عالم میں پھیلے ہوئے تھے لیکن اُن کے علم ادب اور زبان نے انہیں ہر جگہ ایک کر رکھا تھا۔ اس زمانے میں انگریز ایک دنیا پر چھائے ہوئے ہیں لیکن باوجود بُعدِ مسافت و اختلافِ حالات یک زبانی کی بدولت قومیت کے ایک سلسلے میں منسلک ہیں، زبان میں جادو کا سا اثر ہے اور صرف افراد ہی پر نہیں بلکہ اقوام پر بھی اُس کا وہی تسلط ہے۔

یہی وجہ ہے کہ تعلیم کا صحیح اور فطرتی ذریعہ اپنی ہی زبان ہو سکتی ہے۔ اس امر کو اعلیٰحضرت اقدس نے

پہچانا اور جامعۂ عثمانیہ کی بنیاد ڈالی۔ جامعۂ عثمانیہ ہندوستان میں پہلی یونیورسٹی ہے جس میں ابتدا سے انتہا تک ذریعۂ تعلیم ایک دیسی زبان ہوگا۔ اور یہ زبان اردو ہوگی۔ ایک ایسے ملک میں جہاں "بھانت بھانت کی بولیاں" بولی جاتی ہیں، جہاں ہر صوبہ ایک نیا عالم ہے، صرف اردو ہی ایک عام اور مشترک زبان ہو سکتی ہے۔ یہ اہل ہند کے میل جول سے پیدا ہوئی اور اب بھی یہی اس فرض کو انجام دیگی۔ یہ اس کے خمیر اور وضع و ترکیب میں ہے۔ اس لئے یہی تعلیم اور تبادلہ خیالات کا واسطہ بن سکتی اور قومی زبان کا دعوے کر سکتی ہے۔

جب تعلیم کا ذریعہ اردو قرار دیا گیا تو یہ کھلا اعتراض تھا کہ اردو میں اعلیٰ تعلیم کے لئے کتابوں کا ذخیرہ کہاں ہے اور ساتھ ہی یہ بھی کہا جاتا تھا کہ اردو میں یہ صلاحیت ہی نہیں کہ اس میں علوم و فنون کی اعلیٰ تعلیم ہو سکے۔ یہ صحیح ہے کہ اردو میں اعلیٰ تعلیم کے لئے کافی ذخیرہ نہیں۔ اور اردو ہی پر کیا منحصر ہے، ہندوستان کی کسی زبان میں بھی نہیں۔ یہ طلب و رسد کا عام مسئلہ ہے۔ جب مانگ ہی نہ تھی تو رسد کہاں سے آتی۔ جب ضرورت ہی نہ تھی تو کتابیں کیونکر مہیا ہوتیں۔ ہماری اعلیٰ تعلیم غیر زبان میں ہوتی تھی، تو علوم و فنون کا ذخیرہ ہماری زبان میں کہاں سے آتا۔ ضرورت ایجاد کی ماں ہے۔ اب ضرورت محسوس ہوئی ہے تو کتابیں بھی

مہیا ہو جائیں گی۔ اسی کمی کو پورا کرنے اور اسی ضرورت کو رفع کرنے کے لئے سررشتۂ تالیف و ترجمہ قائم کیا گیا۔ یہ صحیح نہیں ہے کہ اردو زبان میں اس کی صلاحیت نہیں۔ اس کے لئے کسی دلیل و برہان کی ضرورت نہیں۔ سررشتۂ تالیف و ترجمہ کا وجود اس کا شافی جواب ہے۔ یہ سررشتہ یہی کام کر رہا ہے۔ کتابیں تالیف و ترجمہ ہو رہی ہیں اور چند روز میں عثمانیہ یونیورسٹی کالج کے طالب علموں کے ہاتھوں میں ہونگی اور رفتہ رفتہ عام شائقینِ علم تک پہنچ جائیں گی۔

لیکن اس میں سب سے کٹھن اور سنگلاخ مرحلہ وضع اصطلاحات کا تھا۔ اس میں بہت کچھ اختلاف اور بحث کی گنجائش ہے۔ اس بارے میں ایک مدت کے تجربہ اور کامل غور و فکر اور مشورہ کے بعد میری یہ رائے قرار پائی ہے کہ تنہا نہ تو ماہرِ علم صحیح طور سے اصطلاحات وضع کر سکتا ہے اور نہ ماہرِ لسان۔ ایک کو دوسرے کی ضرورت ہے۔ اور ایک کی کمی دوسرا پورا کرتا ہے۔ اس لئے اس اہم کام کو صحیح طور سے انجام دینے کے لئے یہ ضروری ہے کہ دونوں یک جا جمع کئے جائیں تاکہ وہ ایک دوسرے کے مشورہ اور مدد سے ایسی اصطلاحیں بنائیں جو نہ اہل علم کو ناگوار ہوں نہ اہل زبان کو۔ چنانچہ اسی اصول پر ہم نے وضع اصطلاحات کے لئے ایک ایسی مجلس بنائی جس میں دونوں جماعتوں کے اصحاب شریک ہیں۔ علاوہ اِن کے

ہم نے اُن اہلِ علم سے بھی مشورہ کیا جو اس کی خاص اہلیت رکھتے ہیں اور بُعدِ مسافت کی وجہ سے ہماری مجلس میں شریک نہیں ہو سکتے۔ اس میں شک نہیں کہ بعض الفاظ غیر مانوس معلوم ہوں گے اور اہلِ زبان انہیں دیکھ کر ناک بھوں چڑھائیں گے۔ لیکن اس سے گزیر نہیں۔ ہمیں بعض ایسے علوم سے واسطہ ہے جن کی ہوا تک ہماری زبان کو نہیں لگی۔ ایسی صورت میں سوائے اس کے چارہ نہیں کہ جب ہماری زبان کے موجودہ الفاظ خاص خاص مفہوم کے ادا کرنے سے قاصر ہوں تو ہم جدید الفاظ وضع کریں۔ لیکن اس کے یہ معنی نہیں ہیں کہ ہم نے محض ٹالنے کے لئے زبردستی الفاظ گھڑ کر رکھ دئے ہیں، بلکہ جس نہج پر اب تک الفاظ بنتے چلے آئے ہیں اور جن اصولِ ترکیب و اشتقاق پر اب تک ہماری زبان کاربند رہی ہے، اس کی پوری پابندی ہم نے کی ہے۔ ہم نے اُس وقت تک کسی لفظ کے بنانے کی جرأت نہیں کی جب تک اُسی قسم کی متعدّد مثالیں ہمارے پیشِ نظر نہ رہی ہوں۔ ہماری رائے میں جدید الفاظ کے وضع کرنے کی اس سے بہتر اور صحیح کوئی صورت نہیں۔ اب اگر کوئی لفظ غیر مانوس یا اجنبی معلوم ہو تو اس میں ہمارا قصور نہیں۔ جو زبان زیادہ تر شعر و شاعری اور قصص تک محدود ہو، وہاں ایسا ہونا کچھ تعجب کی بات نہیں۔ جس ملک سے ایجاد و اختراع کا مادّہ سلب ہو گیا ہو جہاں لوگ نئی چیزوں کے بنانے اور دیکھنے کے عادی نہ ہوں، وہاں جدید الفاظ کا

غیر مانوس اور اجنبی معلوم ہونا موجب حیرت نہیں ۔ الفاظ کی حالت بھی انسانوں کی سی ہے ۔ اجنبی شخص بھی رفتہ رفتہ مانوس ہو جاتے ہیں ۔ اول اول الفاظ کا بھی یہی حال ہے ۔ استعمال آہستہ آہستہ غیر مانوس کو مانوس کر دیتا ہے اور صحت و غیر صحت کا فیصلہ زمانہ کے ہاتھ میں ہوتا ہے ۔ ہمارا فرض یہ ہے کہ لفظ تجویز کرتے وقت ہر پہلو پر کامل غور کرلیں، آئندہ چل کر اگر وہ استعمال اور زمانہ کی کسوٹی پر پورا اترا تو خود ٹکسالی ہو جائیگا اور اپنی جگہ آپ پیدا کرلیگا ۔ علاوہ اس کے جو الفاظ پیش کئے گئے ہیں وہ الہامی نہیں کہ جن میں ردّ و بدل نہ ہو سکے، بلکہ **فرہنگِ اصطلاحاتِ عثمانیہ** جو زیر ترتیب ہے پہلے اس کا مسودہ اہل علم کی خدمت میں پیش کیا جائے گا اور جہاں تک ممکن ہوگا اس کی اصلاح میں کوئی دقیقہ فروگذاشت نہیں کیا جائے گا ۔

لیکن ہماری مشکلات صرف **اصطلاحات علمیہ** تک ہی محدود نہیں ہیں ۔ ہمیں ایک ایسی زبان سے ترجمہ کرنا پڑتا ہے جو ہمارے لئے بالکل اجنبی ہے، اس میں اور ہماری زبان میں کسی قسم کا کوئی رشتہ یا تعلق نہیں ۔ اس کا طرز بیان، ادائے مطلب کے اسلوب، محاورات وغیرہ بالکل جدا ہیں ۔ جو الفاظ اور جملے انگریزی زبان میں بالکل معمولی اور روز مرہ کے استعمال میں آتے ہیں، اُن کا ترجمہ جب ہم اپنی زبان میں کرنے بیٹھتے ہیں تو سخت دشواری پیش آتی ہے ۔ ان تمام دشواریوں پر

غالب آنے کے لئے مترجم کو کیسا کچھ خونِ جگر کھانا نہیں پڑتا۔ ترجمہ کا کام، جیسا کہ عموماً خیال کیا جاتا ہے، کچھ آسان کام نہیں ہے۔ بہت خاک چھاننی پڑتی ہے تب کہیں گوہر مقصود ہاتھ آتا ہے۔

اس سررشتہ کا کام صرف یہی نہ ہوگا (اگرچہ یہ اس کا فرضِ اولین ہے) کہ وہ نصاب تعلیم کی کتابیں تیار کرے، بلکہ اس کے علاوہ وہ ہر علم پر متعدد اور کثرت سے کتابیں تالیف و ترجمہ کرائے گا، تاکہ لوگوں میں علم کا شوق بڑھے، ملک میں روشنی پھیلے، خیالات و قلوب پر اثر پیدا ہو، جہالت کا استیصال ہو۔ جہالت کے معنی اب لاعلمی ہی کے نہیں بلکہ اس میں افلاس، کم ہمتی، تنگ دلی، کوتہ نظری، بے غیرتی، بد اخلاقی سب کچھ آجاتا ہے۔ جہالت کا مقابلہ کرکے اسے پس پا کرنا سب سے بڑا کام ہے۔ انسانی دماغ کی ترقی علم کی ترقی ہے۔ انسانی ترقی کی تاریخ علم کی اشاعت و ترقی کی تاریخ ہے۔ ابتدائے آفرینش سے اس وقت تک انسان نے جو کچھ کیا ہے، اگر اس پر ایک وسیع نظر ڈالی جائے تو نتیجہ یہ نکلے گا کہ جوں جوں علم میں اضافہ ہوتا گیا، پچھلی غلطیوں کی صحت ہوتی گئی، تاریکی گھٹتی گئی، روشنی بڑھتی گئی، انسان میدانِ ترقی میں قدم آگے بڑھاتا گیا۔ اسی مقدس فرض کے ادا کرنے کے لئے یہ سررشتہ قائم کیا گیا ہے اور وہ اپنی بساط کے موافق اس کے انجام دینے میں کوتاہی نہ کرے گا۔

لیکن غلطی، تحقیق و جستجو کی گھات میں لگی رہتی ہے۔ ادب کا

کا ل ذوق سلیم ہر ایک کو نصیب نہیں ہوتا ۔ بڑے بڑے نقاد اور مبصر فاش غلطیاں کر جاتے ہیں ۔ لیکن اس سے ان کے کام پر حرف نہیں آتا ۔ غلطی ترقی کے مانع نہیں ہے ، بلکہ وہ صحت کی طرف رہنمائی کرتی ہے ۔ پچھلوں کی بھول چوک آنے والے مسافر کو رستہ بھٹکنے سے بچا دیتی ہے ۔ ایک جاپانی ماہر تعلیم (بیرن کی کوچی) نے اپنے ملک کا تعلیمی حال لکھتے ہوئے اس صحیح کیفیت کا ذکر کیا ہے جو ہونہار اور ترقی کرنے والے افراد اور اقوام پر گزرتی ہے ۔

"ہم نے بہت سے تجربے کئے اور بہت سی ناکامیاں اور غلطیاں ہوئیں ، لیکن ہم نے ان سے نئے سبق سیکھے اور فائدہ اٹھایا ۔ رفتہ رفتہ ہمیں اپنے ملک کی تعلیمی ضروریات اور امکانات کا صحیح اور بہتر علم ہوتا گیا اور ایسے تعلیمی طریقے معلوم ہوتے گئے جو ہمارے اہل وطن کے لئے زیادہ موزوں تھے ۔ ابھی بہت سے ایسے مسائل ہیں جو ہمیں حل کرنے ہیں ، بہت سی ایسی اصلاحیں ہیں جو ہمیں عمل میں لانی ہیں ، ہم نے اب تک کوشش کی اور ابھی کوشش کر رہے ہیں اور مختلف طریقوں کی برائیاں اور بھلائیاں دریافت کرنے کے درپے ہیں ، تاکہ اپنے ملک کے فائدے کے لئے اچھی باتوں کو اختیار کریں اور رواج دیں اور برائیوں سے بچیں ۔"

اس لئے جو حضرات ہمارے کام پر تنقیدی نظر ڈالیں انہیں وقت کی تنگی ، کام کا ہجوم اور اس کی اہمیت اور ہماری مشکلات پیش نظر رکھنی چاہئیں ۔ یہ پہلی سعی ہے اور پہلی سعی میں کچھ نہ کچھ خامیاں

ضرور رہ جاتی ہیں، لیکن آگے چل کر یہی خامیاں ہماری رہنما بنیں گی اور پختگی اور اصلاح تک پہنچائیں گی۔ یہ نقش اول ہے نقش ثانی اس سے بہتر ہوگا۔ ضرورت کا احساس علم کا شوق، حقیقت کی لگن، صحت کی ٹوہ، جد و جہد کی رسائی خود بخود ترقی کے مدارج طے کرلے گی۔

جاپانی بڑے فخر سے یہ کہتے ہیں کہ ہم نے تیس چالیس سال کے عرصے میں وہ کچھ کر دکھایا جس کے انجام دینے میں یورپ کو اتنی ہی صدیاں صرف کرنی پڑیں۔ کیا کوئی دن ایسا آئے گا کہ ہم بھی یہ کہنے کے قابل ہوں گے؟ ہم نے پہلی شرط پوری کردی ہے یعنی بیجا قیود سے آزاد ہوکر اپنی زبان کو اعلیٰ تعلیم کا ذریعہ قرار دیا ہے۔ لوگ ابھی ہمارے کام کو تذبذب کی نگاہ سے دیکھ رہے ہیں اور ہماری زبان کی قابلیت کی طرف مشتبہ نظریں ڈال رہے ہیں۔ لیکن وہ دن آنے والا ہے کہ اس ذرے کا بھی ستارہ چمکے گا، یہ زبان علم و حکمت سے مالا مال ہوگی اور اعلیٰحضرت واقدس کی نظر کیمیا اثر کی بدولت یہ دنیا کی مہذب و شایستہ زبانوں کی ہمسری کا دعوے کرے گی۔ اگرچہ اُس وقت ہماری سعی اور محنت حقیر معلوم ہوگی، مگر یہی شامِ غربت صبح وطن کی آمد کی خبر دے رہی ہے، یہی شب بیداریاں روزِ روشن کا جلوہ دکھائیں گی، اور یہی مشقت اُس قصر رفیع الشان کی بنیاد ہوگی جو آئندہ تعمیر ہونے والا ہے۔ اس وقت ہمارا کام صبر و استقلال سے میدان صاف کرنا،

داغ بیل ڈالنا اور نیو کھودنا ہے، اور فرہاد وار شیرینِ حکمت کی خاطر سنگلاخ پہاڑوں کو کھود کھود کر جوئے علم لانے کی سعی کرنا ہے۔ اور گو ہم نہ ہوں گے مگر ایک زمانہ آئیگا جب کہ اس میں علم و حکمت کے دریا بہیں گے اور ادبیات کی افتادہ زمین سرسبز و شاداب نظر آئے گی۔

آخر میں میں سررشتہ کے مترجمین کا شکریہ ادا کرتا ہوں جنہوں نے اپنے فرض کو بڑی مستعدی اور شوق سے انجام دیا۔ نیز میں ارکانِ مجلسِ وضعِ اصطلاحات کا شکرگزار ہوں کہ ان کے مفید مشورے اور تحقیق کی مدد سے یہ مشکل کام بخوبی انجام پا رہا ہے۔ لیکن خصوصیت کے ساتھ یہ سررشتہ جناب مسٹر محمد اکبر حیدری بی۔ اے معتمد عدالت و تعلیمات و کوتوالی و امور عامہ سرکار عالی کا ممنون ہے جنہیں ابتدا سے قیام و انتظام جامعۂ عثمانیہ میں خاص انہماک رہا ہے۔ اور اگر ان کی توجہ اور امداد ہمارے شریک حال نہ ہوتی تو یہ عظیم الشان کام صورت پذیر نہ ہوتا۔ میں سید راس مسعود صاحب بی۔ اے (آکسن) آئی۔ ای۔ ایس۔ ناظمِ تعلیمات سرکار عالی کا بھی شکریہ ادا کرتا ہوں کہ ان کی توجہ اور عنایت ہمارے حال پر مبذول رہی اور ضرورت کے وقت ہمیشہ بلا تکلف خوشی کے ساتھ ہمیں مدد دی۔

عبدالحق

ناظمِ سررشتۂ تالیف و ترجمہ (عثمانیہ یونیورسٹی)

ارکان دارالترجمہ

مولوی عبدالحق صاحب بی۔ اے۔۔۔۔۔۔۔۔ ناظم۔
قاضی محمد حسین صاحب۔ ایم۔ اے۔ رینگلر۔۔۔۔۔ مترجم ریاضیات
چودھری برکت علی صاحب بی۔ یس۔ سی۔۔۔۔۔۔ مترجم سائینس
مولوی سید ہاشمی صاحب۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ مترجم تاریخ۔
مولوی محمد الیاس صاحب برنی ایم۔ اے۔۔۔۔۔ مترجم معاشیات
قاضی تلمذ حسین صاحب یم۔ اے۔۔۔۔۔۔۔ مترجم سیاسیات
مولوی ظفر علی خاں صاحب بی۔ اے۔۔۔۔۔ مترجم تاریخ۔
مولوی عبدالماجد صاحب بی۔ اے۔۔۔۔۔۔ مترجم فلسفہ و منطق
مولوی عبدالحلیم صاحب شرر۔۔۔۔۔۔۔۔ مولف تاریخ اسلام
مولوی سید علی رضا صاحب بی۔ اے۔۔۔۔۔ مترجم قانون۔
مولوی عبداللہ العمادی صاحب۔۔۔۔۔۔۔ مترجم کتب عربی

علاوہ ان مذکورۂ بالا مترجمین کے مولوی حاجی صفی الدین صاحب ترجمہ شدہ کتابوں کو مذہبی نقطۂ نظر سے دیکھنے کے لئے اور نواب حیدر یار جنگ (مولوی علی حیدر صاحب طبا طبائی) ترجموں پر نظر ثانی کرنے کے لئے مقرر فرمائے گئے ہیں*

ارکانِ مجلس وضعِ اصطلاحات

مولوی مرزا مہدی خاں صاحب کوکب وظیفہ یاب سرکارِ عالی (سابق ناظم مردم شماری)

مولوی حمیدالدین صاحب بی۔ اے صدر دارالعلوم

نواب حیدر یار جنگ (مولوی علی حیدر صاحب طباطبائی)

مولوی وحیدالدین صاحب سلیم

مولوی عبدالحق بی۔ اے ناظم سررشتۂ تالیف و ترجمہ

علاوہ ان مستقل ارکان کے، مترجمین سررشتۂ تالیف و ترجمہ نیز دوسرے اصحاب سے بلحاظ اُنکے فن کے مشورہ کیا گیا۔ مثلاً

خان فضل محمد خانصاحب ایم۔ اے رنیگلر (پرنسپل سٹی ہائی اسکول حیدرآباد)

مولوی عبدالواسع صاحب (پروفیسر دارالعلوم حیدرآباد)

پروفیسر عبدالرحمٰن صاحب بی۔ ایس۔ سی (نظام کالج)

مرزا محمد ہادی صاحب۔ بی۔ اے (پروفیسر کرسچن کالج لکھنؤ)

مولوی سلیمان صاحب ندوی

سید راس مسعود صاحب بی۔ اے (ناظم تعلیمات حیدرآباد) وغیرہ

دیباچہ



حسب ہدایات ذیلی مجلس ریاضیات جبرو مقابلہ حصہ اول کو جامعہ عثمانیہ کی انٹرمیڈیٹ جماعتوں کے لیئے بربناء الجبرا ہال اینڈ نائٹ تالیف کیا گیا ہے، اگرچہ "بربناء" کی قید اکثر تکلیف دہ اور پریشان کن ثابت ہوئی تاہم جسقدر ممکن تھا اس امر کو پیش نظر رکھ کر اس کتاب کو اپنی حدود کے اندر مکمل بنانے کی کوشش کی گئی ہے۔ ترتیب مضامین تقریباً وہی ہے جو ہال اینڈ نائٹ میں ہے، صرف سلسلہ ہندسیہ اور مسئلہ ثنائی کی بحث میں سلسلوں کے اتساع اور استدقاق کے متعلق چند مسائل کا اضافہ کردیا گیا ہے جن کے بغیر غیر متناہی سلسلوں کے مجموعہ کو کسی قسم کے معنی پہنانا محض ناممکن ہے، مسئلہ ثنائی کو اس صورت میں جبکہ قوت نما مثبت صحیح عدد نہ ہو مسئلہ واندرماند کے ذریعہ ثابت

کیا گیا ہے، یولر کے ثبوت کی نسبت یہ ثبوت اگرچہ مبتدیوں کے لئے مشکل ہے مگر مجموعی طور پر قابل ترجیح ہے۔

اس تالیف میں خاص طور پر اس بات کو ملحوظ رکھا گیا ہے کہ جامعہ (یونیورسٹی) کے طلبہ کے لئے ایک علمی کتاب نصاب تیار کی جائے جس میں جملہ نظریات کی توضیح مثالوں اور عملیات سے ہو، طلبہ اکثر نظریات کو ازبر کرکے امتحانات میں سند حاصل کر لیتے ہیں مگر فی الحقیقت ان میں وہ قوت تخیل اور "دماغی تموج" پیدا نہیں ہوتا جو ریاضیات کے معمولی سے معمولی طالب علم میں ہونا چاہیئے۔ اعلیٰ ریاضی کی مختلف شاخوں میں اگر بجائے نظریات کے ہمارے نصاب اور امتحانات میں عملیات پر زیادہ زور دیا جائے تو بہتر نتائج پیدا ہو سکتے ہیں، اس نقطہ خیال سے مشقی اور حل کردہ مثالوں کی ایک کثیر تعداد نظریات کی توضیح کے لئے فراہم کی گئی ہے ان میں سے اکثر مستند انگریزی کتابوں اور دیگر امتحان کے پرچوں سے لی گئی ہیں۔ فقط

محمد حسین

فہرست مضامین

باب اوّل

نسبت

باب دوم

تناسب

صفحہ

باب سوم

تغیر

باب چہارم

سلسلہ حسابیہ

باب پنجم
سلسلہ ہندسیہ

باب ششم

سلسلہ موسیقیہ

باب ہفتم

مقادیر اصم

باب ہشتم

مقادیر خیالی

باب نہم

مسائل مساوات درجہ دوم

باب دہم

مساواتیں جو مساوات درجہ دوم کیطرح حل ہوسکتی ہیں

باب یازدہم
ترتیب و اجتماع

باب دوازدہم

استقرار حسابیہ

باب سیزدہم

مسئلہ ثنائی

باب چہاردہم

مسئلہ کثیر الارقام

باب پانزدہم

لوکارتم

باب شانزدہم

سلسلہ قوت نما اور لوکارتمی سلسلے

الجبرا

باب اوّل

نسبت

۱۔ تعریف (دو ہم جنس مقادیر میں بلحاظ قدر کے جو ربط ہو اُسے نسبت کہتے ہیں) اور اس ربط کو اس طرح مقابلہ کرنے سے دیکھتے ہیں کہ ایک مقدار دوسری مقدار کا کونسا ضعف حصہ یا حصّے ہیں۔

ا اور ب کی نسبت کو بالعموم "ا : ب" لکھتے ہیں۔ مقادیر ا اور ب کو ارقام نسبت کہتے ہیں۔ پہلی رقم مقدم نسبت کہلاتی ہے اور دوسری رقم تالی نسبت۔

۲۔ اگر یہ معلوم کرنا ہو کہ ا مقدار ب کا کونسا ضِعف یا حصّہ ہے تو ا کو ب پر تقسیم کرنا چاہیئے پس نسبت ا : ب کا اندازہ کسر $\frac{ا}{ب}$ سے لگ

سکتا ہے اور آیندہ اسی طریق کتابت کو اختیار کرنے میں سہولت ہوگی۔
اگر دو مقادیر کا مقابلہ کرنا ہو تو انہیں ایک ہی اکائی کی رقوم میں بیان کرنا چاہیئے
پس دو پونڈ اور ۱۵ شلنگ کی نسبت کا اندازہ کسر $\frac{۲ \times ۲۰}{۱۵}$ یعنی $\frac{۸}{۳}$ سے ہو سکتا ہے
نوٹ۔ چونکہ لفظ نسبت سے یہ معنی مفہوم ہوتے ہیں کہ ایک مقدار کتنی دفعہ دوسری مقدار میں شامل ہے اسلئے معلوم ہوا کہ ہر ایک نسبت مقدار مجرد ہے۔

۳۔ چونکہ بموجب قوانین کسور $\frac{ا}{ب} = \frac{م ا}{م ب}$

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نسبت ا : ب نسبت م ا : م ب کے برابر ہے یعنی اگر کسی نسبت کے مقدم اور تالی دونوں کو ایک ہی مقدار سے ضرب دیدیا جائے تو قیمتِ نسبت میں فرق نہیں آتا۔

۴۔ دو یا دو سے زیادہ نسبتوں کا مقابلہ اُن کی کسور متساوی کے نسب نمایوں کو یکساں بنانے سے ہو سکتا ہے۔ فرض کرو کہ دو مجوزہ نسبتیں ا : ب اور لا : ما ہیں۔ چونکہ $\frac{ا}{ب} = \frac{ا ما}{ب ما}$ اور $\frac{لا}{ما} = \frac{ب لا}{ب ما}$

اسلئے نسبت ا : ب بڑی ہے یا برابر ہے یا چھوٹی ہے نسبت لا : ما سے بموجب اس کے کہ ا ما بڑا ہے یا برابر ہے یا چھوٹا ہے ب لا سے۔
دو کسروں کی نسبت دو اعداد صحیح کی نسبت سے تعبیر ہو سکتی ہے پس نسبت

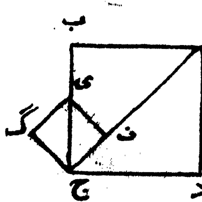
$\frac{ا}{ب} : \frac{ج}{د}$ کا اندازہ کسر $\frac{\frac{ا}{ب}}{\frac{ج}{د}}$ سے یعنی $\frac{ا د}{ب ج}$ سے ہو سکتا ہے اور اسلئے نسبت مذکورہ ا د : ب ج کے مساوی ہے۔

۵۔ اگر کسی نسبت کی ایک یا دونوں رقمیں مقادیر اصم ہوں تو دو ایسے اعداد نہیں مل سکتے جو اس نسبت کو ٹھیک ٹھیک تعبیر کرسکیں مثلاً $\sqrt{۲}$: ۱ صحیح طور پر دو اعداد صحیح کی رقوم میں بیان نہیں ہو سکتی۔

تعریف ۔ جب دو مقداروں کو ایک تیسری مقدار پورا پورا تقسیم کردے تو انہیں مقادیر **متوافقہ** کہتے ہیں اور اس تیسری مقدار کو **وفق مشترک** کہتے ہیں اور جب دو مقداروں کا کوئی وفق مشترک نہیں ہوتا تو اُن کو **متبائن** کہتے ہیں [یاد رہے کہ اعداد جبریہ اور مقادیر ہندسیہ ہر دو کے لئے یہی اصطلاحیں استعمال ہو سکتی ہیں]

تمام اعداد صحیح متوافق ہیں کیونکہ اُن کا وفق مشترک واحد ہے۔ اسی طرح سے تمام کسور ناطقہ متوافق ہیں کیونکہ اُن کی تحویل ایسی کسروں کی طرف ہو سکتی ہے جن کے نسب نما متحد ہوں۔ ایسی کسروں کا وفق مشترک وہ کسر ہے جس کا نسب نما تو وہی نسب نما مشترک ہو اور شمار کنندہ واحد ہو۔

جو دو مقداریں وفق مشترک رکھتی ہوں وہ دو عددوں سے تعبیر ہو سکتی ہیں جتنی دفعہ وفق مشترک اُن مقادیر میں پایا جاتا ہو اتنی دفعہ کی تعداد کو یہ اعداد تعبیر کریں گے لیکن دو مقادیر متبائن کسی دو عددوں یا کسروں سے تعبیر نہیں ہو سکتیں مقادیر میں تبائن پیدا ہونے کا باعث یہ ہے کہ ہم یہ کوشش کرتے ہیں کہ ایک مقدار کی نسبت کو دوسری مقدار کے ساتھ اعداد میں تعبیر کریں اور اس تعبیر کرنے میں خواہ ایک مقدار کو ہی دوسری مقدار کا اندازہ کرنے والا واحد مقرر کریں خواہ کسی تیسری مقدار کو اندازہ کرنیوالا واحد دونوں مقداروں کا مقرر کریں یہ ممکن نہیں کہ ہم کوئی پیمانہ واحد خواہ وہ کیسا ہی چھوٹا ہو اِس صورت میں دریافت کر سکیں۔



ہم اس جگہ تشریحاً مربع اب ج د کے ضلع اب اور قطر اج کی مشہور مثال بیان کریں گے۔ مربع کے قطر اج پر اف = اب کے لو اور اج پر عمود ف ی کھینچو یہ ثابت ہو سکتا ہے

ب ی = ی ف = ف ج

اسلئے ج ف = ا ج - ا ب ....(۱)

ج ی = ج ب - ج ف ....(۲)

اب اگر ا ب اور ا ج دونوں کسی محدود اکائی کی رقوم میں بیان ہو سکتے ہوں تو اُن میں سے ہر ایک اُس محدود اکائی کا صحیح ضِعف ہوگا۔ لیکن (۱) سے ظاہر ہے کہ اگر ایسا ہو تو ج ف اُسی اکائی کا صحیح ضِعف ہوگا اور نیز (۲) سے ظاہر ہے کہ ج ی بھی اُس اکائی کا صحیح ضِعف ہوگا۔

اب ج ف اور ج ی بالترتیب مربع ج ف ی گ کا ضلع اور قطر ہیں اور اس مربع کا ہر ایک ضلع مربع ا ب ج د کے نصف ضلع سے کم ہے اسلئے ظاہر ہے کہ مربع ج ف ی گ سے ایک اور چھوٹا مربع حاصل ہو سکتا ہے جس کا ضلع اور قطر دونوں اکائی مفروضہ کے صحیح اضعاف ہوں اور علیٰ ہذا القیاس حتیٰ کہ ہمیں اتنا چھوٹا مربع حاصل ہو سکتا ہے جتنا ہم چاہیں مگر اُس کا ضلع اور قطر دونوں کسی ایک ہی محدود اکائی کے صحیح اضعاف ہونگے اور یہ باطل ہے پس معلوم ہوا کہ مربع کا ضلع اور قطر مقادیر متباین ہیں اُن کا کوئی وفق مشترک نہیں ہو سکتا۔

۶ - اگرچہ دو ایسے اعداد صحیح نہیں معلوم ہو سکتے جو دو مقادیر متباین کی نسبت کو ٹھیک ٹھیک بیان کر سکیں۔ تاہم دو ایسے اعداد صحیح دریافت ہو سکتے ہیں جن کی نسبت کا تفاوت نسبت مطلوبہ سے اتنا چھوٹا ہو جتنا ہم چاہیں

مثلاً $\frac{\sqrt{۵}}{۴} = \frac{۲٫۲۳۶۰۶۷\ldots}{۴} = ٫۵۵۹۰۱۶\ldots$

اور اسلئے $\frac{\sqrt{۵}}{۴} > \frac{۵۵۹۰۱۶}{۱۰۰۰۰۰۰}$ اور $< \frac{۵۵۹۰۱۷}{۱۰۰۰۰۰۰}$

پس نسبت ۵۵۹۰۱۶ : ۱۰۰۰۰۰۰ اور $\sqrt{۵}$: ۴ میں

فرق ۰۰۰۰۰۱ء سے کم ہے اگر تعداد اعشاریہ زیادہ لی جائے تو اس سے بھی اچھا تقرب حاصل ہو سکتا ہے ۔

اس نتیجہ کی تعمیم اس طرح ہو سکتی ہے

فرض کرو کہ ا اور ب دو مقادیر متباین ہیں ۔ مقدار ب کو م مساوی حصوں میں تقسیم کرو جن میں سے ہر ایک حصہ بہ کے برابر ہو پس ب = م بہ جہاں م مثبت صحیح ہے ۔

نیز فرض کرو کہ بہ مقدار ا میں ن مرتبہ سے زیادہ اور (ن + ۱) مرتبہ سے کم دفعہ شامل ہے ۔

$$\text{تب}\quad \frac{\text{ا}}{\text{ب}} > \frac{\text{ن بہ}}{\text{م بہ}} \quad \text{اور} \quad < \frac{(\text{ن} + ۱)\,\text{بہ}}{\text{م بہ}}$$

یعنی $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ مقادیر $\frac{\text{ن}}{\text{م}}$ اور $\frac{\text{ن}+۱}{\text{م}}$ کے درمیان واقع ہے اس سے ظاہر ہے کہ $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ اور $\frac{\text{ن}}{\text{م}}$ کا حاصل تفریق ایک ایسی مقدار ہے جو کہ $\frac{۱}{\text{م}}$ سے کم ہے اور چونکہ ہم بہ کو (جو ہمارے ماپنے والی اکائی ہے) اتنا چھوٹا منتخب کر سکتے ہیں جتنا چاہیں ۔ اسلئے م اتنا بڑا بن سکتا ہے جتنا ہم چاہیں ۔ اور دو ایسے اعداد ن اور م دریافت ہو سکتے ہیں جن کی نسبت ا اور ب کی نسبت کو کسی مطلوبہ درجہ صحت تک بیان کرے ۔

مثال ۔ کسی مربع کا ضلع ب اور قطر ا ہے نسبت ا : ب کی منطق قیمت دریافت کرو جو ایک کے $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ ویں حصے تک صحیح ہو

اگر ہم اپنی اکائی ب کا $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ واں حصہ لیں ۔

تو ب = ۱۰۰۰ اور $\text{ا}^۲$ = ۲۰۰۰۰۰۰

اب $۱۴۱۴^۲$ = ۱۹۹۹۳۹۶

اور $۱۴۱۵^{۲} = ۲۰۰۲۲۲۵$

اسلئے $\frac{۱۴۱۵}{۱۰۰۰} > \frac{ا}{ب} > \frac{۱۴۱۴}{۱۰۰۰}$

لیکن $\frac{۱۴۱۵}{۱۰۰۰} - \frac{۱۴۱۴}{۱۰۰۰} = \frac{۱}{۱۰۰۰}$

اسلئے $\frac{ا}{ب} = ۱٫۴۱۴$ اور غلطی $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ سے کم ہے

۷ — اگر نسبتوں کے سب مقدموں کو آپس میں ضرب دیکر نیا مقدم بنائیں اور سب تالیوں کو ضرب دیکر ایک نئی تالی بنائیں تو جو نسبت اس جدید مقدم کو جدید تالی سے ہوگی اُسے **نسبت مولفہ** ان نسبتوں کی کہیں گے۔

مثال ۔ نسبت مولفہ تین مفصلہ ذیل نسبتوں کی معلوم کرو۔

$۲ا : ۳ب$ و $۶اب : ۵ج^{۲}$ و $ج : ا$

نسبت مطلوبہ $= \frac{۲ا}{۳ب} \times \frac{۶اب}{۵ج^{۲}} \times \frac{ج}{ا} = \frac{۴ا}{۵ج}$

اگر نسبت $ا : ب$ کی تالیف نسبت $ا : ب$ سے کی جائے تو $ا^{۲} : ب^{۲}$ پیدا ہوتی ہے اسے $ا : ب$ کی نسبت **مثناۃ** کہتے ہیں۔

اسی طرح سے $ا^{۳} : ب^{۳}$ کو **نسبت مثلثہ** $ا : ب$ کی کہتے ہیں۔

نیز $ا^{\frac{۱}{۲}} : ب^{\frac{۱}{۲}}$ **نسبت جذریہ** $ا : ب$ کی ہے

مثال ۱ ۔ نسبت $۲ا : ۳ب$ کی نسبت مثناۃ $۴ا^{۲} : ۹ب^{۲}$ ہے

۲ ۔ نسبت $۴۹ : ۲۵$ کی نسبت جذریہ $۷ : ۵$ ہے

۳ ۔ نسبت $۲لا : ۱$ کی نسبت مثلثہ $۸لا^{۳} : ۱$ ہے

۸ — اگر کسی نسبت کا مقدم تالی سے بڑا ہو یا تالی کے برابر ہو یا تالی سے چھوٹا ہو تو اُس نسبت کو بالترتیب **نسبت کبریٰ** **نسبت مساوات** **نسبت صغریٰ** کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ ا : ب کوئی نسبت مجوزہ ہے

اگر ا > ب تو ا : ب نسبت کبریٰ غیر متساوی ہے

اگر ا < ب تو ا : ب نسبت صغریٰ غیر متساوی ہے

اگر ا = ب تو ا : ب نسبت مساوات ہے

۹ — اگر کسی نسبت کی تالیف کسی نسبت مساوی سے کی جائے تو اسمیں فرق نہیں آتا اور اگر نسبت کبریٰ سے کی جائے تو وہ نسبت بڑھ جاتی ہے اور اگر نسبت صغریٰ سے کی جائے تو وہ نسبت گھٹ جاتی ہے

فرض کرو کہ ا : ب نسبت مجوزہ ہے

اگر اس کی تالیف ج : د سے کی جائے تو نسبت مولفہ اج : ب د ہوگی

ا : ب > یا = یا < اج : ب د

بمطابق اس کے کہ $\frac{ا}{ب}$ > یا = یا < $\frac{اج}{ب د}$

" " $\frac{اد}{ب د}$ > یا = یا < $\frac{اج}{ب د}$

" " اد > یا = یا < اج

" " د > یا = یا < ج جس سے دعویٰ ثابت ہے

۱۰ — اگر ارقام نسبت پر ایک ہی مقدار زیادہ کر دی جائے تو نسبت کبریٰ گھٹ جاتی ہے - اور نسبت صغریٰ بڑھ جاتی ہے ۔

فرض کرو کہ نسبت مجوزہ $\frac{ا}{ب}$ ہے ارقام نسبت پر مقدار لا زیادہ کرنے سے $\frac{ا + لا}{ب + لا}$ نئی نسبت پیدا ہوتی ہے ۔

اب $\frac{ا}{ب} - \frac{ا + لا}{ب + لا} = \frac{ا لا - ب لا}{ب (ب + لا)} = \frac{لا (ا - ب)}{ب (ب + لا)}$

اور ا - ب مثبت ہے یا منفی بمطابق اس کے کہ ا بڑا ہے یا چھوٹا ہے ب سے

اسلئے اگر $\text{ا} > \text{ب}$ تو $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} > \frac{\text{ا} + \text{لا}}{\text{ب} + \text{لا}}$

اور اگر $\text{ا} < \text{ب}$ تو $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} < \frac{\text{ا} + \text{لا}}{\text{ب} + \text{لا}}$

جس سے دعوئی ہمارا ثابت ہے

اسی طرح سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر ارکان نسبت سے ایک ہی مقدار منفی کر دی جاوے تو نسبت کبریٰ بڑھ جاتی ہے اور نسبت صغریٰ گھٹ جاتی ہے

۱۱ — جب دو یا زیادہ نسبتیں آپس میں برابر ہوں تو اُن کو کسی ایک حرف کے مساوی رکھنے سے کئی ایک کارآمد مسائل ثابت ہو سکتے ہیں - طریقۂ عمل کی توضیح مفصلہ ذیل مسئلہ اعظم کے ثبوت سے ہوگی -

اگر $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \frac{\text{ع}}{\text{ف}} = \cdots\cdots$

تو ہر ایک نسبت $= \left(\frac{\text{پ}\,\text{ا}^{\text{ن}} + \text{ق}\,\text{ج}^{\text{ن}} + \text{ر}\,\text{ع}^{\text{ن}} + \cdots}{\text{پ}\,\text{ب}^{\text{ن}} + \text{ق}\,\text{د}^{\text{ن}} + \text{ر}\,\text{ف}^{\text{ن}} + \cdots} \right)^{\frac{1}{\text{ن}}}$

فرض کرو کہ $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \frac{\text{ع}}{\text{ف}} = \cdots\cdots = \text{ک}$

تب $\text{ا} = \text{ب}\,\text{ک}$ ، $\text{ج} = \text{د}\,\text{ک}$ ، $\text{ع} = \text{ف}\,\text{ک}$ ، $\cdots\cdots$

اسلئے $\frac{\text{پ}\,\text{ا}^{\text{ن}} + \text{ق}\,\text{ج}^{\text{ن}} + \text{ر}\,\text{ع}^{\text{ن}} + \cdots\cdots}{\text{پ}\,\text{ب}^{\text{ن}} + \text{ق}\,\text{د}^{\text{ن}} + \text{ر}\,\text{ف}^{\text{ن}} + \cdots\cdots}$

$$= \frac{\text{پ}\,\text{ب}^{\text{ن}}\text{ک}^{\text{ن}} + \text{ق}\,\text{د}^{\text{ن}}\text{ک}^{\text{ن}} + \text{ر}\,\text{ف}^{\text{ن}}\text{ک}^{\text{ن}} + \cdots}{\text{پ}\,\text{ب}^{\text{ن}} + \text{ق}\,\text{د}^{\text{ن}} + \text{ر}\,\text{ف}^{\text{ن}} + \cdots\cdots} = \text{ک}^{\text{ن}}$$

اسلئے $\left(\frac{\text{پ}\,\text{ا}^{\text{ن}} + \text{ق}\,\text{ج}^{\text{ن}} + \text{ر}\,\text{ع}^{\text{ن}} + \cdots\cdots}{\text{پ}\,\text{ب}^{\text{ن}} + \text{ق}\,\text{د}^{\text{ن}} + \text{ر}\,\text{ف}^{\text{ن}} + \cdots\cdots} \right)^{\frac{1}{\text{ن}}} = \text{ک} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \cdots\cdots$

پ و ق و ر و ن کو مختلف قیمتیں دینے سے اس مسئلہ عامہ سے کئی خاص صورتیں مستنبط ہو سکتی ہیں یا بلا واسطہ مندرجہ بالا ترکیب کے استعمال سے ثابت ہو سکتی ہیں

مثلاً اگر $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \frac{\text{ع}}{\text{ف}} = \cdots\cdots$

تو ان میں سے ہر ایک نسبت $= \frac{\text{ا} + \text{ج} + \text{ع} + \cdots\cdots}{\text{ب} + \text{د} + \text{ف} + \cdots\cdots}$

یہ نتیجہ نہایت کار آمد ہے اس کا لفظی قایم مقام مندرجہ ذیل ہے " اگر کسور متساویہ کا کوئی سلسلہ ہو تو اُس سلسلہ کی ہر ایک کسر ایک ایسی کسر کے برابر ہوتی ہے جس کا شمار کنندہ تو سب شمار کنندوں کا حاصل جمع ہو اور جس کا نسب نما تمام نسب نماؤں کے حاصل جمع کے برابر ہو۔"

مثال ۱ - اگر $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \frac{\text{ع}}{\text{ف}}$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ا}^3\text{ب} + 2\,\text{ج}^2\text{ع} - 3\,\text{ا}\,\text{ع}^2\text{ف}}{\text{ب}^4 + 2\,\text{د}^2\text{ف} - 3\,\text{ب}\,\text{ف}^3} = \frac{\text{ا}\,\text{ج}\,\text{ع}}{\text{ب}\,\text{د}\,\text{ف}}$$

فرض کرو کہ $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \frac{\text{ع}}{\text{ف}} = \text{ک}$

تب $\text{ا} = \text{ب}\text{ک}$ ، $\text{ج} = \text{د}\text{ک}$ اور $\text{ع} = \text{ف}\text{ک}$

$$\therefore \frac{\text{ا}^3\text{ب} + 2\,\text{ج}^2\text{ع} - 3\,\text{ا}\,\text{ع}^2\text{ف}}{\text{ب}^4 + 2\,\text{د}^2\text{ف} - 3\,\text{ب}\,\text{ف}^3}$$

$$= \frac{\text{ب}^4\text{ک}^3 + 2\,\text{د}^2\text{ف}\,\text{ک}^3 - 3\,\text{ب}\,\text{ف}^3\text{ک}^3}{\text{ب}^4 + 2\,\text{د}^2\text{ف} - 3\,\text{ب}\,\text{ف}^3}$$

$$= \text{ک}^3 = \frac{\text{ا}}{\text{ب}} \times \frac{\text{ج}}{\text{د}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ف}} = \frac{\text{ا}\,\text{ج}\,\text{ع}}{\text{ب}\,\text{د}\,\text{ف}}$$

مثال ۲ - اگر $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = \frac{\text{ی}}{\text{ج}}$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{لا}^2 + \text{ا}^2}{\text{لا} + \text{ا}} + \frac{\text{ما}^2 + \text{ب}^2}{\text{ما} + \text{ب}} + \frac{\text{ی}^2 + \text{ج}^2}{\text{ی} + \text{ج}} = \frac{(\text{لا} + \text{ما} + \text{ی})^2 + (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})^2}{\text{لا} + \text{ما} + \text{ی} + \text{ا} + \text{ب} + \text{ج}}$$

فرض کرو کہ $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = \frac{\text{ی}}{\text{ج}} = \text{ک}$

اسلئے لا = ا ک و ما = ب ک و ی = ج ک

$$\frac{\text{لا}^2+\text{ا}^2}{\text{لا}+\text{ا}}=\frac{\text{ا}^2\text{ک}^2+\text{ا}^2}{\text{اک}+\text{ا}}=\frac{(\text{ک}^2+۱)\,\text{ا}}{\text{ک}+۱}$$

اسلئے $\dfrac{\text{لا}^2+\text{ا}^2}{\text{لا}+\text{ا}}+\dfrac{\text{ما}^2+\text{ب}^2}{\text{ما}+\text{ب}}+\dfrac{\text{ی}^2+\text{ج}^2}{\text{ی}+\text{ج}}$

$$=\frac{(\text{ک}^2+۱)\,\text{ا}}{\text{ک}+۱}+\frac{(\text{ک}^2+۱)\,\text{ب}}{\text{ک}+۱}+\frac{(\text{ک}^2+۱)\,\text{ج}}{\text{ک}+۱}$$

$$=\frac{(\text{ک}^2+۱)(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})}{\text{ک}+۱}$$

$$=\frac{\text{ک}^2(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})^2+(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})^2}{\text{ک}(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})+(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})}$$

$$=\frac{(\text{ک ا}+\text{ک ب}+\text{ک ج})^2+(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})^2}{(\text{ک ا}+\text{ک ب}+\text{ک ج})+(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})}$$

$$=\frac{(\text{لا}+\text{ما}+\text{ی})^2+(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})^2}{\text{لا}+\text{ما}+\text{ی}+\text{ا}+\text{ب}+\text{ج}}$$

۱۲۔ اگر کوئی مساوات بلحاظ چند مقادیر کے متجانس ہو تو اس مساوات میں اُن مقادیر کی جگہ اُن کے متناسب رکھے جا سکتے ہیں۔

مثلاً مساوات $\text{ل لا}^3\,\text{ما}+\text{م لا ما}^2\,\text{ی}+\text{ن ما}^2\,\text{ی}^2=۰$ بلحاظ لا و ما و ی کے متجانس ہے۔ فرض کرو کہ ان کی متناسب تین مقادیر بالترتیب عہ و بہ و مہ ہیں۔

نیز فرض کرو کہ $\text{ک}=\dfrac{\text{لا}}{\text{عہ}}=\dfrac{\text{ما}}{\text{بہ}}=\dfrac{\text{ی}}{\text{مہ}}$

اسلئے لا = عـ ک و ما = بہ ک و ی = مـ ک

اور ل عـ^۳ بہ ک^۲ + م عـ بہ^۲ مـ ک^۲ + ن بہ^۲ مـ^۲ ک^۲ = ۰

اس مساوات کی صورت اصلی مساوات کی سی ہے صرف فرق یہ ہے کہ لا و ما و ی کی جگہ عـ و بہ و مـ بالترتیب لکھے ہوئے ہیں۔

۱۴ — مسئلہ ذیل بڑا کارآمد ہے۔

اگر $\frac{ا_۱}{ب_۱}$ و $\frac{ا_۲}{ب_۲}$ و $\frac{ا_۳}{ب_۳}$ و .... $\frac{ا_ن}{ب_ن}$

ایسی کسور غیر متساویہ ہوں جن کے نسب نما ایک ہی علامت سے موثر ہوں

تو کسر $\frac{ا_۱ + ا_۲ + ا_۳ + ا_۴ + ... + ا_ن}{ب_۱ + ب_۲ + ب_۳ + ب_۴ + ... + ب_ن}$ بلحاظ قدر کے

ان میں سے سب سے بڑی کسر اور سب سے چھوٹی کسر کے درمیان واقع ہوگی

فرض کرو کہ سب نسب نما مثبت ہیں۔ اگر $\frac{ا_ر}{ب_ر}$ سب سے چھوٹی کسر ہو تو اس کو ک سے تعبیر کرو۔ تب

$\frac{ا_ر}{ب_ر} = ک$ ∴ $ا_ر = ک\, ب_ر$

$\frac{ا_۱}{ب_۱} > ک$ ∴ $ا_۱ > ک\, ب_۱$

$\frac{ا_۲}{ب_۲} > ک$ ∴ $ا_۲ > ک\, ب_۲$ اور علیٰ ہذا القیاس۔

اسلئے جمع کرنے سے

$ا_۱ + ا_۲ + ا_۳ + ... + ا_ن > (ب_۱ + ب_۲ + ب_۳ + ... + ب_ن) ک$

$ب_۱ + ب_۲ + ب_۳ + ... ب_ن$

اسلئے $\dfrac{ا_1 + ا_2 + ا_3 + \cdots\cdots + ا_ن}{ب_1 + ب_2 + ب_3 + \cdots\cdots + ب_ن} > ک$ یعنی $\dfrac{ا_ر}{ب_ر}$ سے

اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{ا_1 + ا_2 + ا_3 + \cdots\cdots + ا_ن}{ب_1 + ب_2 + ب_3 + \cdots\cdots + ب_ن} > \frac{ا_س}{ب_س}$$

جہاں کسر $\dfrac{ا_س}{ب_س}$ تمام کسور معلومہ سے بڑی ہے ۔

اسی طرح سے مسئلہ ثابت ہو سکتا ہے جب تمام نسب نما منفی ہوں ۔

۱۴ ۔ دفعہ ۱۱ کے عام اصول کا برجستہ استعمال ہر فرع ریاضی میں ایسا کارآمد ہے کہ طالب علم کو خاص صورتوں میں جب کبھی ضرورت پڑے اسے بلا تکلف کام میں لانا چاہیئے اور یہ ضرور نہیں کہ رمز مستعان ک کو اثنائے عمل میں داخل کیا جائے ۔

مثال ۱ ۔ اگر $\dfrac{لا}{ب + ج - ا} = \dfrac{ما}{ج + ا - ب} = \dfrac{ی}{ا + ب - ج}$

تو ثابت کرو کہ $\dfrac{لا + ما + ی}{ا + ب + ج} = \dfrac{لا(ما + ی) + ما(ی + لا) + ی(لا + ما)}{۲(ا لا + ب ما + ج ی)}$

ہر ایک کسر معلومہ $= \dfrac{\text{شمار کنندوں کا مجموعہ}}{\text{نسب نمایوں کا مجموعہ}} = \dfrac{لا + ما + ی}{ا + ب + ج}$ ...... (۱)

نیز اگر ہم ان تینوں کسور کے شمار کنندوں اور نسب نمایوں کو ما + ی و ی + لا و لا + ما سے بالترتیب ضرب دیدیں تو

ہر ایک کسر $= \dfrac{لا(ما + ی)}{(ما + ی)(ب + ج - ا)} = \dfrac{ما(ی + لا)}{(ی + لا)(ج + ا - ب)}$

$$= \frac{ی(لا + ما)}{(لا + ما)(ا + ب - ج)}$$

$$= \frac{\text{مجموعہ شمار کنندوں کا}}{\text{مجموعہ نسب نمایوں کا}}$$

$$= \frac{\text{لا}(\text{ما}+\text{ی}) + \text{ما}(\text{ی}+\text{لا}) + \text{ی}(\text{لا}+\text{ما})}{\text{۲ ا لا} + \text{۲ ب ما} + \text{۲ ج ی}} \qquad (۲)$$

اسلئے (۱) اور (۲) سے

$$\frac{\text{لا}+\text{ما}+\text{ی}}{\text{ا}+\text{ب}+\text{ج}} = \frac{\text{لا}(\text{ما}+\text{ی}) + \text{ما}(\text{ی}+\text{لا}) + \text{ی}(\text{لا}+\text{ما})}{\text{۲}(\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج ی})}$$

مثال ۲- اگر

$$\frac{\text{لا}}{\text{ل}(\text{م ب} + \text{ن ج} - \text{ل ا})} = \frac{\text{ما}}{\text{م}(\text{ن ج} + \text{ل ا} - \text{م ب})} = \frac{\text{ی}}{\text{ن}(\text{ل ا} + \text{م ب} - \text{ن ج})}$$

تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ل}}{\text{لا}(\text{ب ما} + \text{ج ی} - \text{ا لا})} = \frac{\text{م}}{\text{ما}(\text{ج ی} + \text{ا لا} - \text{ب ما})} = \frac{\text{ن}}{\text{ی}(\text{ا لا} + \text{ب ما} - \text{ج ی})}$$

یہیں معلوم ہے کہ

$$\frac{\frac{\text{لا}}{\text{ل}}}{\text{م ب} + \text{ن ج} - \text{ل ا}} = \frac{\frac{\text{ما}}{\text{م}}}{\text{ن ج} + \text{ل ا} - \text{م ب}} = \frac{\frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\text{ل ا} + \text{م ب} - \text{ن ج}}$$

$$= \frac{\frac{\text{ما}}{\text{م}} + \frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\text{۲ ل ا}} = \text{دو متشابہ جملے}$$

$$\therefore \frac{\text{ن ما} + \text{م ی}}{\text{ا}} = \frac{\text{ل ی} + \text{ن لا}}{\text{ب}} = \frac{\text{م لا} + \text{ل ما}}{\text{ج}}$$

مندرجہ بالا کسور میں سے اول کو اوپر اور نیچے لا سے ضرب دو۔ دوم کو ما سے اور سوم کو ی سے تب

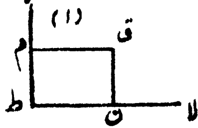
$$\frac{\text{ن لا ما} + \text{م لا ی}}{\text{ا لا}} = \frac{\text{ل ما ی} + \text{ن لا ما}}{\text{ب ما}} = \frac{\text{م لا ی} + \text{ل ما ی}}{\text{ج ی}}$$

$$= \frac{۲\,ل\,ما\,ی}{ب\,ما + ج\,ی - د\,لا} = \text{دو متشابہ جملے}$$

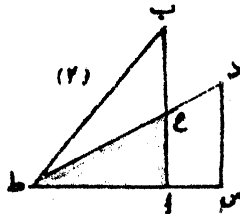
$$\text{اسلئے}\quad \frac{ل}{ی(د\,لا + ب\,ما - ج\,ی)} = \frac{م}{ما(ج\,ی + د\,لا - ب\,ما)} = \frac{ن}{لا(ب\,ما + ج\,ی - د\,لا)}$$

نسبت کی ترسیمی تعبیر

۱۵— فرض کرو کہ شکل منسلکہ (۲) میں فصلہ ط ا نسبت مجوزہ کی تالی کو تعبیر کرتا ہے اور معیّن ا ب مقدم نسبت کو اسی پیمانہ پر تعبیر کرتا ہے زاویہ ا ط ب کی مقدار سے اس بات کا اندازہ ہو سکتا ہے کہ نسبت مجوزہ کسی دوسری نسبت سے جو کہ اسی طرح سے تعبیر کی گئی ہو بڑی ہے یا چھوٹی۔



نوٹ— سطح مستوی میں دو خطوط ط لا اور ط ما متقاطع علی القوائم ہو فرض کرو کہ ط لا متوازی الافق ہے اور ط ما اس پر عمود ہے ط لا کو محور لا اور ط ما کو محور ما کہتے ہیں اب کسی نقطہ ق سے محوروں کے متوازی خطوط ق م اور ق ن کھینچو ق م کو فصلہ نقطہ ق اور ق ن کو معیّن نقطہ ق کہتے ہیں۔

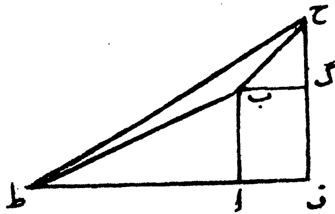


فرض کرو کہ $\frac{د\,س}{ط\,س}$ دوسری نسبت ہے۔ اگر ط د اور ا ب

ع پر قطع کریں۔ تو متشابہ مثلثوں ع ا ط اور د س ط سے

$\frac{\text{د س}}{\text{ط س}} = \frac{\text{ع ا}}{\text{ط ا}}$ اسلئے معلوم ہوا کہ $\frac{\text{ع ا}}{\text{ط ا}}$ سے بھی دوسری نسبت تعبیر ہوسکتی ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ نسبتوں کا مقابلہ طول ا ب اور ا ع سے ہوسکتا ہے۔

اگر نسبت صغریٰ غیر متساوی کی دونوں رقوم پر ایک ہی مقدار زیادہ کردی جائے تو یہ نسبت بڑھ جاتی ہے



بموجب سابق فرض کرو کہ $\frac{\text{ا ب}}{\text{ط ا}}$ نسبت مجوزہ کو تعبیر کرتی ہے ط ا کو نقطہ ف تک بڑھاؤ اور ایک معین ف گ ح اس طرح کھینچو کہ ف گ = ا ب اور گ ح = ا ف ایسا کرنے سے ہم نے نسبت $\frac{\text{ا ب}}{\text{ط ا}}$ کی دونوں رقوم پر مقدار ح گ یا ا ف زیادہ کردی ہے

نئی نسبت $\frac{\text{ح ف}}{\text{ط ف}}$ > پرانی نسبت سے اگر ط ح اور ا ب نقطہ ب کے اوپر تقاطع کریں یعنی زاویہ ح ب گ > زاویہ ب ط ا سے

لیکن ح ب گ = °۴۵

اسلئے نئی نسبت > اصلی نسبت سے اگر زاویہ ب ط ا < °۴۵

یعنی اگر نسبت $\frac{\text{ا ب}}{\text{ط ا}}$ نسبت صغریٰ غیر متساوی ہو

نوٹ - علم مثلث میں نسبت $\frac{\text{ا ب}}{\text{ط ا}}$ کو مماس زاویہ ا ط ب کہتے ہیں علم ریاضی کی کئی کتابوں میں اس نسبت کو خط مستقیم ط ب کے میلان سے تعبیر کرتے ہیں۔

۱۶- فارن ہیٹ پیمانہ کی تحویل سنٹی گریڈ پیمانہ میں اور برعکس اسکے۔

فارن ہیٹ مقیاس الحرارت میں نقطۂ انجماد کا نشان ۳۲° پر ہوتا ہے اور نقطہ غلیان کا ۲۱۲° پر سینٹی گریڈ مقیاس الحرارت میں یہی نقاط بالترتیب ۰° اور ۱۰۰° پر منقوش ہوتے ہیں۔ اگر کوئی درجہ حرارت **فارن ہیٹ** پیمانے پر ف سے تعبیر ہو اور سنٹی گریڈ پر س سے تو ہم ان کا مقابلہ یہ دیکھنے سے کرسکتے ہیں کہ نقطہ انجماد سے درجہ حرارت معلومہ اور نقطہ غلیان کے **ابعاد** باہم وہی **نسبت** رکھتے ہیں خواہ کوئی سا پیمانہ لیا جائے۔

پس
$$\frac{\text{ف} - ۳۲}{۲۱۲ - ۳۲} = \frac{\text{بُعد درجہ حرارت معلوم کا نقطہ انجماد سے}}{\text{بُعد نقطہ غلیان کا نقطہ انجماد سے}} = \frac{\text{س} - ۰}{۱۰۰ - ۰}$$

یعنی
$$\frac{\text{ف} - ۳۲}{۱۸۰} = \frac{\text{س}}{۱۰۰}$$

اسلئے
$$\frac{\text{ف} - ۳۲}{۹} = \frac{\text{س}}{۵} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

طالب علم کو چاہیئے کہ مربع دار کاغذ پر مساوات (۱) کی ترسیم بنائے۔

مثال ۱ - اگر $\frac{۷\,\text{لا} - ۳\,\text{ما}}{۵\,\text{لا} + ۴\,\text{ما}} = \frac{۲۹}{۳۳}$ تو نسبت لا : ما دریافت کرو۔

$$۳۳(۷\,\text{لا} - ۳\,\text{ما}) = ۲۹(۵\,\text{لا} + ۴\,\text{ما})$$

$$\therefore ۲۳۱\,\text{لا} - ۹۹\,\text{ما} = ۱۴۵\,\text{لا} + ۱۱۶\,\text{ما}$$

$$\therefore ۸۶\,\text{لا} = ۲۱۵\,\text{ما}$$

$$\therefore \text{لا} = \frac{\text{۲۱۵ ما}}{\text{۸۶}}$$

$$\therefore \frac{\text{لا}}{\text{ما}} = \frac{\text{۲۱۵}}{\text{۸۶}} = \frac{\text{۵}}{\text{۲}}$$

مثال ۲ — اگر $\text{۲ لا}^{\text{۲}} - \text{۵ لا ما} + \text{۲ ما}^{\text{۲}} = \text{۰}$ تو نسبت لا : ما دریافت کرو۔

$$\text{۲}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ما}}\right)^{\text{۲}} - \text{۵}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ما}}\right) + \text{۲} = \text{۰}$$

مساوات درجہ دوم کو حل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $\frac{\text{لا}}{\text{ما}} = \text{۲ یا } \frac{\text{۱}}{\text{۲}}$

مثال ۳ — کونسی نسبت بڑی ہے $\text{لا}^{\text{۲}} + \text{ما}^{\text{۲}} : \text{لا} + \text{ما}$ یا $\text{لا}^{\text{۲}} - \text{ما}^{\text{۲}} : \text{لا} - \text{ما}$ ؟

اس جگہ لا اور ما دونوں مثبت ہیں۔

$$\frac{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{ما}^{\text{۲}}}{\text{لا} + \text{ما}} - \frac{\text{لا}^{\text{۲}} - \text{ما}^{\text{۲}}}{\text{لا} - \text{ما}} = \frac{(\text{لا}^{\text{۲}} + \text{ما}^{\text{۲}})(\text{لا} - \text{ما}) - (\text{لا}^{\text{۲}} - \text{ما}^{\text{۲}})(\text{لا} + \text{ما})}{(\text{لا} + \text{ما})(\text{لا} - \text{ما})}$$

$$= \frac{\text{۲ لا ما}^{\text{۲}} - \text{۲ لا}^{\text{۲}}\text{ما}}{(\text{لا} + \text{ما})(\text{لا} - \text{ما})} = \frac{-\text{۲ لا ما}(\text{لا} - \text{ما})}{(\text{لا} + \text{ما})(\text{لا} - \text{ما})} = \frac{-\text{۲ لا ما}}{\text{لا} + \text{ما}}$$

اب لا اور ما دونوں مثبت ہیں اسلئے ضرور ہے کہ $-\frac{\text{۲ لا ما}}{\text{لا} + \text{ما}}$ منفی ہو

پس $\text{لا}^{\text{۲}} + \text{ما}^{\text{۲}} : \text{لا} + \text{ما} < \text{لا}^{\text{۲}} - \text{ما}^{\text{۲}} : \text{لا} - \text{ما}$

۱۷ — ضرب چلیپائی۔ اگر دو معادلات درجہ دوم تین مقادیر مجہول کی معلوم ہوں جیسے کہ

$$\text{ا}_{\text{۱}}\,\text{لا} + \text{ب}_{\text{۱}}\,\text{ما} + \text{ج}_{\text{۱}}\,\text{ی} = \text{۰} \quad \cdots\cdots\cdots (\text{۱})$$

$$\text{ا}_{\text{۲}}\,\text{لا} + \text{ب}_{\text{۲}}\,\text{ما} + \text{ج}_{\text{۲}}\,\text{ی} = \text{۰} \quad \cdots\cdots\cdots (\text{۲})$$

تو ہم انکا مکمل حل دریافت نہیں کرسکتے لیکن $\frac{\text{لا}}{\text{ی}}$ اور $\frac{\text{ما}}{\text{ی}}$ نسبتیں معلوم ہوسکتی ہیں۔

اگر مساوات اول کو $\text{ب}_{\text{۲}}$ سے اور مساوات دوم کو $\text{ب}_{\text{۱}}$ سے ضرب

دیدی جائے تو

$$ا_1 ب_2 لا + ب_1 ب_2 ما + ب_2 ج_1 ی = ۰$$

$$ا_2 ب_1 لا + ب_1 ب_2 ما + ب_1 ج_2 ی = ۰$$

تفریق سے $لا \, (ا_1 ب_2 - ا_2 ب_1) + ی \, (ب_2 ج_1 - ب_1 ج_2) = ۰$

$\therefore$ $لا \, (ا_1 ب_2 - ا_2 ب_1) = ی \, (ب_1 ج_2 - ب_2 ج_1)$

$$\therefore \frac{لا}{ب_1 ج_2 - ب_2 ج_1} = \frac{ی}{ا_1 ب_2 - ا_2 ب_1} \quad \cdots\cdots\cdots (۳)$$

$$یعنی \quad \frac{لا}{ی} = \frac{ب_1 ج_2 - ب_2 ج_1}{ا_1 ب_2 - ا_2 ب_1}$$

معادلات معلومہ سے اگر لا کو ساقط کر دیا جائے تو ہمیں حاصل ہوگا

$$\frac{ی}{ا_1 ب_2 - ا_2 ب_1} = \frac{-ما}{ا_1 ج_2 - ا_2 ج_1} \quad \cdots\cdots\cdots (۴)$$

اس سے ہمیں نسبت $\frac{ما}{ی}$ حاصل ہوئی نتائج (۳) اور (۴) کو باقرینہ مرتب کرنے سے

$$\frac{لا}{ب_1 ج_2 - ب_2 ج_1} = \frac{ما}{ج_1 ا_2 - ج_2 ا_1} = \frac{ی}{ا_1 ب_2 - ا_2 ب_1} \quad \cdots\cdots (۵)$$

اس سے ظاہر ہے کہ جب کبھی دو مساواتیں بشکل (۱) اور (۲) معلوم ہوں تو قاعدہ مندرجہ ذیل کی استعانت سے ہم نسبت لا : ما : ی کو معادلات کے سروں کی رقوم میں بآسانی لکھ سکتے ہیں۔

ما کے سر سے شروع ہوکر لا، ما و ی کے سروں کو بالترتیب لکھ جاؤ اور انہیں اس طرح پر کر، لکھو جیسا کہ شکل سے ظاہر ہے۔

$ب_1$ $ج_1$ $ا_1$ $ب_1$

$ب_2$ $ج_2$ $ا_2$ $ب_2$

سروں کو ترچھی سمت میں ضرب دو جیسے کہ تیر کے رُخ سے ظاہر ہے اور ان حاصل ضربوں کے بنانے میں یاد رکھو کہ کوئی حاصل ضرب جو تیر کے نیچے اُترنے سے حاصل ہو وہ مثبت ہوگا اور جو تیر کے اوپر چڑھنے سے حاصل ہو وہ منفی ہوگا۔ تین نتائج $ب_1$ $ج_2$ - $ب_2$ $ج_1$ و $ج_1$ $ا_2$ - $ج_2$ $ا_1$ و $ا_1$ $ب_2$ - $ا_2$ $ب_1$ بالترتیب لا کا ما کا ی کے متناسب ہیں۔ مندرجہ بالا قاعدہ کو **ضرب چلیپائی** کہتے ہیں۔

مثال ۱ - معادلات ۷ لا = ۴ ما + ۸ ی و ۳ ی = ۱۲ لا + ۱۱ ما سے نسبت لا : ما : ی معلوم کرو

عمل نقل سے ۷ لا - ۴ ما - ۸ ی = ۰

۱۲ لا + ۱۱ ما - ۳ ی = ۰

سروں کو اس طرح لکھو -۴ -۸ ۷ -۴

۱۱ -۳ ۱۲ ۱۱

ان سے مفصلہ ذیل حاصل ضرب حاصل ہونگے۔

(-۴)×(-۳) - ۱۱×(-۸) و (-۸)×۱۲ - (-۳)×۷ و ۷×۱۱ - ۱۲×(-۴)

یا ۱۰۰ و -۷۵ و ۱۲۵

اسلئے لا/۱۰۰ = ما/−۷۵ = ی/۱۲۵

یعنی لا/۴ = ما/−۳ = ی/۵

مثال ۲ — معادلات ذیل کو حل کرو

ا لا + ب ما + ج ی = ۰ .... (۱)

لا + ما + ی = ۰ .... (۲)

ب ج لا + ج ا ما + ا ب ی = (ب − ج) (ج − ا) (ا − ب) ..... (۳)

(۱) اور (۲) سے بموجب قاعدہ ضرب چلیپائی

لا/(ب − ج) = ما/(ج − ا) = ی/(ا − ب) = ک .... (فرض کرو)

اسلئے لا = (ب − ج) ک و ما = (ج − ا) ک و ی = (ا − ب) ک

(۳) میں یہ قیمتیں رکھنے سے

ک {ب ج (ب − ج) + ج ا (ج − ا) + ا ب (ا − ب)}

= (ب − ج) (ج − ا) (ا − ب)

ک {−(ب − ج) (ج − ا) (ا − ب)} = (ب − ج) (ج − ا) (ا − ب)

∴ ک = −۱

جس سے لا = ج − ب و ما = ا − ج و ی = ب − ا

۱۸ — اگر دفعہ ۱۷ میں ی = ۱ لی جائے تو معادلات (۱) اور (۲) بنجائینگی

ا₁ لا + ب₁ ما + ج₁ = ۰

ا₂ لا + ب₂ ما + ج₂ = ۰

اور نتیجہ (۵) سے حاصل ہوگا

$$\frac{\text{لا}}{\text{ب}_1\text{ج}_2-\text{ب}_2\text{ج}_1}=\frac{\text{ما}}{\text{ج}_1\text{ا}_2-\text{ج}_2\text{ا}_1}=\frac{1}{\text{ا}_1\text{ب}_2-\text{ا}_2\text{ب}_1}$$

یا $\text{لا}=\dfrac{\text{ب}_1\text{ج}_2-\text{ب}_2\text{ج}_1}{\text{ا}_1\text{ب}_2-\text{ا}_2\text{ب}_1}$ اور $\text{ما}=\dfrac{\text{ج}_1\text{ا}_2-\text{ج}_2\text{ا}_1}{\text{ا}_1\text{ب}_2-\text{ا}_2\text{ب}_1}$

اسلئے ظاہر ہے کہ دو ہمزاد مساواتیں درجہ اول دو مقادیر مجہول کی قاعدہ ضرب چلیپائی سے حل ہوسکتی ہیں۔

مثال۔ حل کرو $5\,\text{لا}-3\,\text{ما}-1=0$ و $\text{لا}+2\,\text{ما}=12$

عمل نقل سے $5\,\text{لا}-3\,\text{ما}-1=0$

$\text{لا}+2\,\text{ما}-12=0$

$$\therefore\ \frac{\text{لا}}{36+2}=\frac{\text{ما}}{-1+60}=\frac{1}{10+3}$$

جس سے $\text{لا}=\dfrac{38}{13}$ و $\text{ما}=\dfrac{59}{13}$

۱۹۔ بالعموم تین مقادیر مجہول کے اسقاط کے لئے چار معادلات کی ضرورت ہوگی۔ لیکن مفصلہ ذیل تین مساواتوں سے لا، ما، ی تین مقادیر کو ساقط کرنا ممکن ہے کیونکہ یہاں درحقیقت صرف دو نسبتوں کو ساقط کرنا مطلوب ہے

$\text{ا}_1\,\text{لا}+\text{ب}_1\,\text{ما}+\text{ج}_1\,\text{ی}=0$ .... (۱)

$\text{ا}_2\,\text{لا}+\text{ب}_2\,\text{ما}+\text{ج}_2\,\text{ی}=0$ .... (۲)

$\text{ا}_3\,\text{لا}+\text{ب}_3\,\text{ما}+\text{ج}_3\,\text{ی}=0$ .... (۳)

معادلات (۱) اور (۲) سے

$$\frac{\text{لا}}{\text{ب}_1\text{ج}_2-\text{ب}_2\text{ج}_1}=\frac{\text{ما}}{\text{ا}_2\text{ج}_1-\text{ا}_1\text{ج}_2}=\frac{\text{ی}}{\text{ا}_1\text{ب}_2-\text{ا}_2\text{ب}_1}=\text{ک}$$ (فرض کرو)

(۳) میں لا کی جگہ $(\text{ب}_1\text{ج}_2-\text{ب}_2\text{ج}_1)\,\text{ک}$ اور ما اور ی کی جگہ متشابہ

جملات رکھنے سے اور ک پر تقسیم کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا۔

$$ا_{۳}(ب_{۱}ج_{۲}-ب_{۲}ج_{۱})+ب_{۳}(ج_{۱}ا_{۲}-ج_{۲}ا_{۱})+ج_{۳}(ا_{۱}ب_{۲}-ا_{۲}ب_{۱})=۰$$

اس ارتباط کو معادلات معلومہ کا حاصل اسقاط کہتے ہیں۔

امثلہ نمبری ۱

۱۔ مربع دار کاغذ استعمال کرنے سے نسبت $\frac{۱۱}{۹}$ کا نسب $\frac{۱۷}{۳۰}$ و $\frac{۷}{۸}$ و $\frac{۱۴}{۲۳}$ و $\frac{۷}{۱۱}$ و $\frac{۳۳}{۵۷}$ سے مقابلہ کرو

[نقاط (۰ و ۰) و (۹ و ۱۱) کو خط مستقیم سے ملاؤ۔ اور اس خط کو خارج کرو اور دیکھو کہ نقاط (۳۰ و ۱۷) وغیرہ اس خط سے اوپر ہیں یا نیچے۔]

۲۔ مربع دار کاغذ پر نسب $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۵}{۹}$ و $\frac{۶}{۱۱}$ کو تعبیر کرو اور دیکھو کہ انمیں سے کون سی سب سے بڑی ہے اور کون سی سب سے چھوٹی۔

۳۔ نسبت $\frac{۱۵}{۱۶}$ کے شمار کنندہ اور نسب نما پر ۶ زیادہ کرنے سے جو نئی نسبت پیدا ہوتی ہے اسکو خانہ دار کاغذ پر کھینچو اور اس کا مقابلہ نسبت $\frac{۱۵}{۱۶}$ سے کرو۔

۴۔ ۲ پونڈ ۶ اونس کی نسبت ۳ پونڈ ۹ اونس کیساتھ دریافت کرو

۵۔ ۲ پونڈ ۵ شلنگ ۶ پنس کی نسبت ۴ پونڈ صفر شلنگ ۶ پنس کے ساتھ دریافت کرو۔

۶۔ نسبتِ مولفہ دریافت کرو

۱۔ نسبت ۲ ا : ۳ ب اور نسبت مثناۃ ۹ $ب^{۲}$: ا ب کی

۲۔ نسبت جذریہ ۶۴ : ۹ اور نسبت ۲۷ : ۵۶ کی

۳۔ نسبت مثناۃ $\frac{ا^{۲}}{ب} : \frac{\sqrt{۶ ا^{۲}}}{ب^{۲}}$ اور نسبت ۳ ا لا : ۲ ب ما کی

۷ ۔ اگر لا + ۷ : ۲ (لا + ۱۴) نسبت مثناۃ ۵ : ۸ کی ہو تو لا معلوم کرو

۸ ۔ دو ایسے اعداد دریافت کرو جن کی نسبت ۷ : ۱۲ ہو اور جن میں سے بڑے کی زیادتی چھوٹے پر ۲۷۵ ہو ۔

۹ ۔ نسبت ۵ : ۳۷ کی ہر ایک رقم پر کیا عدد زیادہ کر دیا جائے کہ یہ نسبت ۱ : ۳ کے برابر ہو جائے ؟

۱۰ ۔ اگر لا : ما = ۳ : ۴ تو نسبت ۷ لا ۔ ۴ ما : ۳ لا + ما کی قیمت دریافت کرو ۔

۱۱ ۔ اگر $\text{۱۵}(\text{۲ لا}^{\text{۲}} - \text{ما}^{\text{۲}}) = \text{۷ لاما}$ تو نسبت لا : ما دریافت کرو ۔

۱۲ ۔ اگر $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \frac{\text{ع}}{\text{ف}}$ تو ثابت کرو کہ

$$(\text{۱})\quad \frac{\text{۳ ا}^{\text{۳}} + \text{۴ ا}^{\text{۲}}\text{ج} + \text{۵ ج}^{\text{۲}}\text{ع}}{\text{۳ ب}^{\text{۳}} + \text{۴ ب}^{\text{۲}}\text{د} + \text{۵ د}^{\text{۲}}\text{ف}} = \frac{\text{ا}^{\text{۳}}}{\text{ب}^{\text{۳}}}$$

$$(\text{۲})\quad \frac{\text{ا}^{\text{۴}} + \text{۵ ج}^{\text{۳}}\text{ع} + \text{ع}^{\text{۴}}}{\text{ب}^{\text{۴}} + \text{۵ د}^{\text{۳}}\text{ت} + \text{ف}^{\text{۴}}} = \frac{\text{ا}^{\text{۲}}\text{ج}^{\text{۲}}}{\text{ب}^{\text{۲}}\text{د}^{\text{۲}}}$$

$$(\text{۳})\quad \frac{\text{۲ ا}^{\text{۴}}\text{ب}^{\text{۲}} + \text{۳ ا}^{\text{۲}}\text{ع}^{\text{۲}} - \text{۵ ع}^{\text{۴}}\text{ف}}{\text{۲ ب}^{\text{۶}} + \text{۳ ب}^{\text{۲}}\text{ف}^{\text{۲}} - \text{۵ ف}^{\text{۵}}} = \frac{\text{ا}^{\text{۴}}}{\text{ب}^{\text{۴}}}$$

۱۳ ۔ اگر $\frac{\text{ا}}{\text{لا} + \text{ما}} = \frac{\text{ب}}{\text{ما} - \text{ی}} = \frac{\text{ج}}{\text{ی} + \text{لا}}$ تو ثابت کرو کہ ا = ب + ج

۱۴ ۔ اگر $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{ج}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{ا}}{\text{د}}$ برابر ہے

$$\sqrt{\frac{\text{ا}^{\text{۵}} + \text{ب}^{\text{۲}}\text{ج}^{\text{۲}} + \text{ا}^{\text{۳}}\text{ج}^{\text{۲}}}{\text{ب}^{\text{۴}}\text{ج} + \text{د}^{\text{۴}} + \text{ب}^{\text{۲}}\text{ج}\,\text{د}^{\text{۲}}}}\ \text{کے}$$

۱۵ ۔ اگر $\frac{\text{لا}}{\text{ق} + \text{ر} - \text{پ}} = \frac{\text{ما}}{\text{ر} + \text{پ} - \text{ق}} = \frac{\text{ی}}{\text{پ} + \text{ق} - \text{ر}}$

تو ثابت کرو کہ $(\text{ق} - \text{ر})\,\text{لا} + (\text{ر} - \text{پ})\,\text{ما} + (\text{پ} - \text{ق})\,\text{ی} = ۰$

۱۶- ا کی عمر کی نسبت ب کی عمر سے ۵ : ۳ ہے ۲۸ سال ہوئے یہی نسبت ۴ : ۱ تھی ا کی عمر دریافت کرو۔

۱۷- اگر $\frac{\text{ما}}{\text{لا} - \text{ی}} = \frac{\text{ما} + \text{لا}}{\text{ی}} = \frac{\text{لا}}{\text{ما}}$ تو نسبت لا : ما : ی دریافت کرو۔

۱۸- اگر $\frac{\text{ما} + \text{ی}}{\text{پ ب} + \text{ق ج}} = \frac{\text{ی} + \text{لا}}{\text{پ ج} + \text{ق ا}} = \frac{\text{لا} + \text{ما}}{\text{پ ا} + \text{ق ب}}$

تو ثابت کرو کہ $\frac{۲(\text{لا} + \text{ما} + \text{ی})}{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}} = \frac{(\text{ب} + \text{ج})\,\text{لا} + (\text{ج} + \text{ا})\,\text{ما} + (\text{ا} + \text{ب})\,\text{ی}}{\text{ب ج} + \text{ج ا} + \text{ا ب}}$

۱۹- اگر $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = \frac{\text{ی}}{\text{ج}}$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{لا}^۳ + \text{ا}^۳}{\text{لا}^۲ + \text{ا}^۲} + \frac{\text{ما}^۳ + \text{ب}^۳}{\text{ما}^۲ + \text{ب}^۲} + \frac{\text{ی}^۳ + \text{ج}^۳}{\text{ی}^۲ + \text{ج}^۲} = \frac{(\text{لا} + \text{ما} + \text{ی})^۳ + (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})^۳}{(\text{لا} + \text{ما} + \text{ی})^۲ + (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})^۲}$$

۲۰- اگر $\frac{۲\,\text{ما} + ۲\,\text{ی} - \text{لا}}{\text{ا}} = \frac{۲\,\text{ی} + ۲\,\text{لا} - \text{ما}}{\text{ب}} = \frac{۲\,\text{لا} + ۲\,\text{ما} - \text{ی}}{\text{ج}}$

تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{لا}}{۲\,\text{ب} + ۲\,\text{ج} - \text{ا}} = \frac{\text{ما}}{۲\,\text{ج} + ۲\,\text{ا} - \text{ب}} = \frac{\text{ی}}{۲\,\text{ا} + ۲\,\text{ب} - \text{ج}}$

۲۱- اگر $(\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲ + \text{ج}^۲)(\text{لا}^۲ + \text{ما}^۲ + \text{ی}^۲) = (\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج ی})^۲$

تو ثابت کرو کہ لا : ا = ما : ب = ی : ج

۲۲- اگر $\text{ل}(\text{م ما} + \text{ن ی} - \text{ل لا}) = \text{م}(\text{ن ی} + \text{ل لا} - \text{م ما})$
$= \text{ن}(\text{ل لا} + \text{م ما} - \text{ن ی})$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ما} + \text{ی} - \text{لا}}{\text{ل}} = \frac{\text{ی} + \text{لا} - \text{ما}}{\text{م}} = \frac{\text{لا} + \text{ما} - \text{ی}}{\text{ن}}$$

۲۳ - ثابت کرو کہ معادلات

ا لا + ج ما + ب ی = ۰ ، ج لا + ب ما + ا ی = ۰

و ب لا + ا ما + ج ی = ۰

کا حاصل استقاط ا۳ + ب۳ + ج۳ - ۳ ا ب ج = ۰ ہے۔

۲۴ - لا و ما و ی کو معادلات

ا لا + ج ما + گ ی = ۰ ، ج لا + ب ما + ف ی = ۰

و گ لا + ف ما + ص ی = ۰ سے ساقط کرو

۲۵ - اگر لا = ج ما + ب ی و ما = ا ی + ج لا و ی = ب لا + ا ما

تو ثابت کرو کہ لا۲ / (۱ - ا۲) = ما۲ / (۱ - ب۲) = ی۲ / (۱ - ج۲)

۲۶ - معلوم ہے ا (ما + ی) = لا و ب (ی + لا) = ما

اور ج (لا + ما) = ی

ثابت کرو کہ ب ج + ج ا + ا ب + ۲ ا ب ج = ۱

۲۷ - عمل ترسیمی سے ثابت کرو کہ اگر ا / ب = ج / د = ع / ف

تو نسبت (ا + ج + ع) / (ب + د + ف) ان میں سے کسی ایک نسبت کے برابر ہے۔

[ا و ج و ع کو معین اور ب و د و ف میں سے ہر ایک کو فصلہ بناؤ]

۲۸ - عمل ترسیمی سے ثابت کرو کہ اگر ا / ب و ج / د و ع / ف غیر متساوی نسبتیں ہوں تو (ا + ج + ع) / (ب + د + ف) اُن میں سے سب سے بڑی اور سب سے چھوٹی نسبت کے درمیان واقع ہوگی۔

معادلات ذیل کو حل کرو

۲۹ـ ۳ لا − ۴ ما + ۷ ی = ۰

۲ لا − ما − ۲ ی = ۰

۳ لا^{۳} − ما^{۳} + ی^{۳} = ۱۸

۳۰ـ لا + ما = ی

۳ لا − ۲ ما + ۱۷ ی = ۰

لا^{۳} + ۳ ما^{۳} + ۲ ی^{۳} = ۱۶۷

۳۱ـ ۷ ما ی + ۳ ی لا = ۴ لا ما

۲۱ ما ی − ۳ ی لا = ۴ لا ما

لا + ۲ ما + ۳ ی = ۱۹

۳۲ـ ۳ لا^{۲} − ۲ ما^{۲} + ۵ ی^{۲} = ۰

۷ لا^{۲} − ۳ ما^{۲} − ۱۵ ی^{۲} = ۰

۵ لا − ۴ ما + ۷ ی = ۶

۳۳ـ اگر $\frac{\text{ل}}{\text{ما ا − ما ب}} + \frac{\text{م}}{\text{ما ب − ما ج}} + \frac{\text{ن}}{\text{ما ج − ما ا}} = ۰$

اور $\frac{\text{ل}}{\text{ما ا + ما ب}} + \frac{\text{م}}{\text{ما ب + ما ج}} + \frac{\text{ن}}{\text{ما ج + ما ا}} = ۰$

تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{ل}}{\text{(ا − ب)(ج − ما ا ب)}} = \frac{\text{م}}{\text{(ب − ج)(ا − ما ب ج)}}$

$= \frac{\text{ن}}{\text{(ج − ا)(ب − ما ا ج)}}$

معادلات ذیل کو حل کرو

۳۴- ا لا + ب ما + ج ی = ۰

ب ج لا + ج ا ما + ا ب ی = ۰

لا ما ی + ا ب ج (ا³ لا + ب³ ما + ج³ ی) = ۰

۳۵- ا لا + ب ما + ج ی = ا² لا + ب² ما + ج² ی = ۰

لا + ما + ی + (ب - ج)(ج - ا)(ا - ب) = ۰

۳۶- اگر ا(ما + ی) = لا ب (ی + لا) = ما ج (لا + ما) = ی

تو ثابت کرو کہ
$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}(\text{ا} - \text{ب ج})} = \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}(\text{ا} - \text{ج ا})} = \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}(\text{ا} - \text{ا ب})}$$

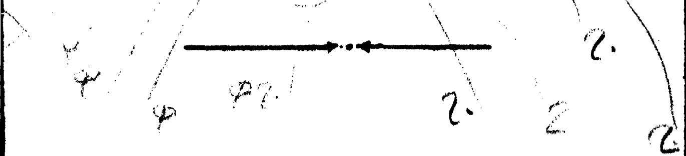
۳۷- اگر ا لا + ح ما + گ ی = ۰ ح لا + ب ما + ف ی = ۰

اور گ لا + ف ما + س ی = ۰ تو ثابت کرو کہ

(۱)
$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ب س} - \text{ف}^2} = \frac{\text{ما}^2}{\text{س ا} - \text{گ}^2} = \frac{\text{ی}^2}{\text{ا ب} - \text{ح}^2}$$

(۲) (ب س - ف²)(س ا - گ²)(ا ب - ح²)

= (ف گ - س ح)(گ ح - ا ف)(ح ف - ب گ)



باب دوم
تناسب

۲۰۔ جب دو نسبتوں میں ربط مساوات ہو تو چار مقادیر کو جو اُن میں شامل ہوں **متناسب** کہتے ہیں مثلاً اگر $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$ تو ا و ب و ج و د کو متناسب کہیں گے۔ اس ربط کو بعض اوقات یوں بیان کرتے ہیں۔ کہ ا کو ب سے وہی نسبت ہے جو ج کو د سے ہے اور یہ تناسب اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$$ا : ب :: ج : د$$

$$\text{یا}\quad ا : ب = ج : د$$

ا اور د کو **طرفین** تناسب اور ب اور ج کو **وسطین** تناسب کہتے ہیں اور ا و ج یعنی نسبتوں کے مقدموں کو نظیرہ ایک دوسرے کا اور ب و د یعنی تالیوں کو نظیرہ ایک دوسرے کا کہتے ہیں۔

۲۱۔ اگر چار مقادیر متناسب ہوں تو حاصل ضرب طرفین = حاصل ضرب وسطین۔ فرض کرو کہ ا و ب و ج و د متناسب ہیں

$$\text{بوجب تعریف}\quad \frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$$

دونوں طرف ب د میں ضرب دینے سے ا د = ب ج

پس ظاہر ہے کہ اگر کسی تناسب کی تین رقمیں معلوم ہوں تو چوتھی رقم معلوم ہو سکتی ہے۔

مثلاً اگر ا و ج و د معلوم ہوں تو ب = $\frac{\text{اد}}{\text{ج}}$

بالعکس اس کے اگر چار مقادیر ا و ب و ج و د ایسی ہوں کہ ا د = ب ج تو ا و ب و ج و د متناسب ہونگی اور اُن میں سے ا و د طرفین اور ب و ج وسطین ہونگی یا برعکس اس کے۔

مثال۔ فرض کرو کہ تناسب کی پہلی تیسری چوتھی رقمیں بالترتیب $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۴}{۳}$ و $\frac{۶}{۸}$ ہیں۔ اگر لا سے دوسری رقم کو تعبیر کریں۔ تو $\frac{۱}{۲}$: لا = $\frac{۴}{۳}$: $\frac{۶}{۸}$

جس سے $\frac{۴}{۳}$ × لا = $\frac{۱}{۲}$ × $\frac{۶}{۸}$

یعنی لا = $\frac{۱}{۲}$ × $\frac{۶}{۸}$ × $\frac{۳}{۴}$ = $\frac{۹}{۳۲}$

۲۲۔ تعریف۔ مقادیر **تناسب مسلسل** میں کہلاتی ہیں اگر پہلی کو دوسری سے وہی نسبت ہو جو دوسری کو تیسری سے اور تیسری کو چوتھی سے ہے اور علیٰ ہذا القیاس۔

مثلاً ا و ب و ج و د و ع و ف .... تناسب مسلسل میں ہونگی اگر

$\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ = $\frac{\text{ب}}{\text{ج}}$ = $\frac{\text{ج}}{\text{د}}$ = ...

اگر تین مقادیر تناسب مسلسل میں ہوں تو

ا : ب = ب : ج

اس صورت میں ب کو **وسط تناسب** اور ج کو ا اور ب کا **ثالث تناسب** کہتے ہیں

اگر ا و ب ، ج و د تناسب مسلسل میں ہوں تو ب و ج کو ا اور د کی اوساط تناسب کہیں گے وغیرہ وغیرہ

۲۳ – تناسب مسلسل میں مقادیر کے ارتباطات

اگر تین مقادیر ا و ب و ج تناسب مسلسل میں ہوں تو

ا : ج = ا^{۲} : ب^{۲} = ب^{۲} : ج^{۲} اور ب = $\sqrt{\text{ا ج}}$

اگر چار مقادیر ا و ب و ج و د تناسب مسلسل میں ہوں تو

ا : د = ا^{۳} : ب^{۳} = ب^{۳} : ج^{۳} = ج^{۳} : د^{۳}

اور ب = $\sqrt[۳]{(\text{ا}^{۲}\text{ د})}$ و ج = $\sqrt[۳]{(\text{ا د}^{۲})}$

کیونکہ اگر ا : ب = ب : ج

تو $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{ج}}$

اسلئے $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} \times \frac{\text{ب}}{\text{ج}} = \frac{\text{ب}}{\text{ج}} \times \frac{\text{ب}}{\text{ج}}$

جس سے $\frac{\text{ا}}{\text{ج}} = \frac{\text{ب}^{۲}}{\text{ج}^{۲}} = \frac{\text{ا}^{۲}}{\text{ب}^{۲}}$ .... (۱)

نیز ا ج = ب^{۲}

جس سے ب = $\sqrt{\text{ا ج}}$ .... (۲)

مساوات (۱) اور (۲) سے دو مسائل مندرجہ بالا ثابت ہوئے ۔

نیز اگر ا : ب = ب : ج = ج : د

تو $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{ج}}$ ، $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}}$

نیز $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$

اسلئے $\frac{ا}{ب} \times \frac{ا}{ب} \times \frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب} \times \frac{ب}{ج} \times \frac{ج}{د}$

یعنی $\frac{ا^3}{ب^3} = \frac{ا}{د}$

اسلئے $\frac{ا}{د} = \frac{ا^3}{ب^3} = \frac{ب^3}{ج^3} = \frac{ج^3}{د^3}$ .... (۳)

نیز چونکہ $\frac{ا}{د} = \frac{ا^3}{ب^3}$ اسلئے $ب^3 = ا^2 د$

جس سے $ب = \sqrt[3]{ا^2 د}$ .... (۴)

نیز چونکہ $\frac{ا}{د} = \frac{ج^3}{د^3}$

$ج^3 = ا د^2$

جس سے $ج = \sqrt[3]{ا د^2}$ .... (۵)

نتیجہ (۲) سے ظاہر ہے کہ دو مقادیر ا اور ج کے درمیان وسط تناسب کا معلوم کرنا استخراج جذر پر موقوف ہے۔

مثلاً ۱ اور ۲ کے درمیان وسط تناسب ہے

$\sqrt{(۱ \times ۲)} = \sqrt{۲} = ۱٫۴۱۴۲$

نیز نتائج (۴) اور (۵) کی مدد سے ہم دو معیّن مقادیر کے درمیان چند جذر الکعب نکالنے سے دو اوساط تناسب مندرج کر سکتے ہیں۔

مثلاً ۱ اور ۲ کے درمیان دو اوساط تناسب ہیں۔

$\sqrt[3]{(۱ \times ۲)} = \sqrt[3]{۲} = ۱٫۲۵۹۹ ......$

اور $\sqrt[3]{(۱ \times ۲^2)} = \frac{۲}{\sqrt[3]{۲}} = ۱٫۵۸۷۴ ...$

۲۴ ــ اگر ا : ب = ج : د اور ع : ف = گ : ھ

تو ا ع : ب ف = ج گ : د ھ

چونکہ $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$ اور $\frac{ع}{ف} = \frac{گ}{ھ}$

اسلئے $\frac{ا ع}{ب ف} = \frac{ج گ}{د ھ}$

یا ا ع : ب ف = ج گ : د ھ

نتیجہ صریح - اگر ا : ب = ج : د

اور ب : لا = د : ما

تو ا : لا = ج : ما

۲۵ - اگر چار مقادیر ا و ب و ج و د متناسب ہوں تو اُن سے کئی اور تناسبات خواص کسور کے استعمال سے مستنبط ہو سکتے ہیں - اور ان میں سے اکثر مسئلۂ اصطلاحات ہندسیہ سے نامزد ہوتے ہیں

(۱) اگر ا : ب = ج : د

تو ب : ا = د : ج [عکس نسبت]

کیونکہ $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$ اسلئے ا ÷ $\frac{ا}{ب}$ = ا ÷ $\frac{ج}{د}$

یعنی $\frac{ب}{ا} = \frac{د}{ج}$

یا ب : ا = د : ج

یعنی اگر چار مقادیر متناسب ہوں تو دوسری مقدار کو پہلی مقدار سے وہی نسبت ہوگی جو چوتھی مقدار کو تیسری مقدار سے ہے اسے **عکس نسبت** کہتے ہیں

(۲) اگر ا : ب = ج : د

تو ا : ج = ب : د [تبدیل نسبت]

چونکہ ا د = ب ج اسلئے $\frac{\text{ا د}}{\text{ج د}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ج د}}$

یعنی $\frac{\text{ا}}{\text{ج}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}}$

یا ا : ج = ب : د

یعنی اگر چار مقادیر متناسب ہوں تو پہلی مقدار کو تیسری مقدار سے وہی نسبت ہوگی جو دوسری مقدار کو چوتھی مقدار سے ہے اسے **تبدیل نسبت** کہتے ہیں ۔

(۳) اگر ا : ب = ج : د

تو ا + ب : ب = ج + د : د

چونکہ $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}}$ اسلئے $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} + 1 = \frac{\text{ج}}{\text{د}} + 1$

یعنی $\frac{\text{ا + ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج + د}}{\text{د}}$

یا ا + ب : ب = ج + د : د

یعنی اگر چار مقادیر متناسب ہوں تو پہلی اور دوسری مقادیر کے مجموعہ کو دوسری مقدار سے وہی نسبت ہوگی جو تیسری اور چوتھی مقادیر کے مجموعہ کو چوتھی مقدار سے ہے ۔ اسے **ترکیب نسبت** کہتے ہیں ۔

(۴) اگر ا : ب = ج : د

تو ا - ب : ب = ج - د : د [تفصیل نسبت]

چونکہ $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}}$ اسلئے $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} - 1 = \frac{\text{ج}}{\text{د}} - 1$

یعنی $\frac{\text{ا - ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج - د}}{\text{د}}$

یا ا - ب : ب = ج - د : د

یعنی اگر چار مقادیر متناسب ہوں تو جتنی اول مقدار دوسری سے زیادہ ہو اُس زیادتی کی نسبت دوسری مقدار سے لیں اور جتنی تیسری مقدار چوتھی سے زیادہ ہو اُس زیادتی کی نسبت چوتھی مقدار سے لیں تو یہ نسبتیں آپس میں برابر ہونگی اسے **تفصیل نسبت** کہتے ہیں -

(۵) اگر ا : ب = ج : د

تو ا + ب : ا - ب = ج + د : ج - د

نتیجہ (۳) سے $\frac{ا + ب}{ب} = \frac{ج + د}{د}$

" (۴) سے $\frac{ا - ب}{ب} = \frac{ج - د}{د}$

اسلئے عمل تقسیم سے $\frac{ا + ب}{ا - ب} = \frac{ج + د}{ج - د}$

یا ا + ب : ا - ب = ج + د : ج - د

یعنی اگر چار مقادیر متناسب ہوں تو پہلی اور دوسری مقدار کے مجموعہ کو جو نسبت اُس زیادتی ہے ہو جو پہلی مقدار کو دوسری مقدار پر حاصل ہے وہ اُس نسبت کے برابر ہوگی جو تیسری اور چوتھی مقادیر کے مجموعہ کو اُس زیادتی سے ہو جو تیسری مقدار کو چوتھی مقدار پر حاصل ہے - اسے بالعموم **ترکیب اور تفصیل نسبت** کہتے ہیں -

۲۶ - طالب علم کو ان نتائج کے ثابت کرنے میں مشکل نہیں ہوگی -

اگر ا : ب = ج : د

تو م ا : م ب = ن ج : ن د ....(۱)

اور م ا : ن ب = م ج : ن د ....(۲)

۲۷- نیز اگر

$ا_1 : ب_1 = ج_1 : د_1$

$ا_2 : ب_2 = ج_2 : د_2$

....

....

$ا_ن : ب_ن = ج_ن : د_ن$

تو $ا_1 ا_2 ا_3 \cdots ا_ن : ب_1 ب_2 ب_3 \cdots ب_ن = ج_1 ج_2 ج_3 \cdots ج_ن : د_1 د_2 د_3 \cdots د_ن$ (۱)

نتیجہ صریح - اگر $ا : ب = ج : د$

تو $ا^ن : ب^ن = ج^ن : د^ن$

۲۸- اگر $ا : ب = ج : د$

تو $ا \pm ب : ب = ج \pm د : د$ .... (۱)

$ا + ب : ا - ب = ج + د : ج - د$ .... (۲)

$ل ا + م ب : ف ا + ق ب = ل ج + م د : ف ج + ق د$ (۳)

$ل ا^ر + م ب^ر : ف ا^ر + ق ب^ر = ل ج^ر + م د^ر : ف ج^ر + ق د^ر$ (۴)

جہاں ل و م و ف و ق و ر کوئی مثبت یا منفی مقادیر ہیں

ہم نتائج (۱) اور (۲) کو دفعہ ۲۵ میں ثابت کر چکے ہیں انہیں ہم دوبارہ طریق ذیل سے ثابت کرینگے۔ مندرجہ بالا نتائج اگرچہ بظاہر ایک دوسرے سے بالکل مختلف ہیں مگر درحقیقت کئی ایک لحاظ سے متشابہ ہیں۔ مقدمات مندرجہ بالا اور اسی قسم کے اور نتائج کے ثابت کرنے میں طریق ذیل نہایت صاف اور بکار آمد ہے۔

فرض کرو کہ ہمیں نتیجہ (۲) ثابت کرنا ہے۔

چونکہ $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د} = ک$ (فرض کرو)

$ا = ب ک$ اور $ج = د ک$ .... (عہ)

اب (عہ) کو استعمال کرنے سے

$$\frac{ا + ب}{ا - ب} = \frac{ک ب + ب}{ک ب - ب} = \frac{ب (ک + ۱)}{ب (ک - ۱)} = \frac{ک + ۱}{ک - ۱}$$

بعینہ اسی طریقہ سے $\frac{ج + د}{ج - د} = \frac{ک د + د}{ک د - د} = \frac{ک + ۱}{ک - ۱}$

اسلئے $\frac{ا + ب}{ا - ب} = \frac{ک + ۱}{ک - ۱} = \frac{ج + د}{ج - د}$

اب نتیجہ (۳) پر غور کرو

بموجب سابق $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د} = ک$ ... (فرض کرو)

$ا = ب ک$ اور $ج = د ک$

$$\frac{ل ا + م ب}{ن ا + ق ب} = \frac{ل ب ک + م ب}{ن ب ک + ق ب} = \frac{ل ک + م}{ن ک + ق}$$

اسی طرح سے $\frac{ل ج + م د}{ن ج + ق د} = \frac{ل د ک + م د}{ن د ک + ق د} = \frac{ل ک + م}{ن ک + ق}$

اسلئے $\frac{ل ا + م ب}{ن ا + ق ب} = \frac{ل ک + م}{ن ک + ق} = \frac{ل ج + م د}{ن ج + ق د}$ اور علیٰ ہذا القیاس

مثال ۱- اگر $ا_۱ : ب_۱ = ج_۱ : د_۱$ اور $ا_۲ : ب_۲ = ج_۲ : د_۲$

تو $ا_۱ \sqrt{ا_۲} - ب_۱ \sqrt{ب_۲} : ج_۱ \sqrt{ج_۲} - د_۱ \sqrt{د_۲}$

$= ا_۱ \sqrt{ا_۲} + ب_۱ \sqrt{ب_۲} : ج_۱ \sqrt{ج_۲} + د_۱ \sqrt{د_۲}$

فرض کرو کہ $\frac{ا_۱}{ب_۱} = \frac{ج_۱}{د_۱} = ک_۱$

اور $\frac{ا_۲}{ب_۲} = \frac{ج_۲}{د_۲} = ک_۲$

تو $\frac{\sqrt{ا_۱ ا_۲} - \sqrt{ب_۱ ب_۲}}{\sqrt{ج_۱ ج_۲} - \sqrt{د_۱ د_۲}} = \frac{\sqrt{ک_۱ ب_۱ ک_۲ ب_۲} - \sqrt{ب_۱ ب_۲}}{\sqrt{ک_۱ د_۱ ک_۲ د_۲} - \sqrt{د_۱ د_۲}}$

$= \frac{(\sqrt{ک_۱ ک_۲} - ۱)\sqrt{ب_۱ ب_۲}}{(\sqrt{ک_۱ ک_۲} - ۱)\sqrt{د_۱ د_۲}} = \frac{\sqrt{ب_۱ ب_۲}}{\sqrt{د_۱ د_۲}}$ .... (۱)

اسی طرح سے ہمیں حاصل ہوگا

$\frac{\sqrt{ا_۱ ا_۲} + \sqrt{ب_۱ ب_۲}}{\sqrt{ج_۱ ج_۲} + \sqrt{د_۱ د_۲}} = \frac{(\sqrt{ک_۱ ک_۲} + ۱)\sqrt{ب_۱ ب_۲}}{(\sqrt{ک_۱ ک_۲} + ۱)\sqrt{د_۱ د_۲}} = \frac{\sqrt{ب_۱ ب_۲}}{\sqrt{د_۱ د_۲}}$ .... (۲)

(۱) اور (۲) سے نتیجہ ہمارا ثابت ہے

مثال ۲ - اگر ا اور ج میں ب وسط تناسب ہو تو ثابت کرو کہ

$(ا + ب + ج)(ا - ب + ج) = ا^۲ + ب^۲ + ج^۲$ .... (۱)

اور $(ا + ب + ج)^۲ + ا^۲ + ب^۲ + ج^۲ = ۲(ا + ب + ج)(ا + ج)$ ... (۲)

سب سے پہلے ربط (۱) پر غور کرو

$(ا + ب + ج)(ا - ب + ج) = (\overline{ا + ج} + ب)(\overline{ا + ج} - ب)$

$= (ا + ج)^۲ - ب^۲$

اب بموجب شرایط سوال $\frac{ا}{ب} = \frac{ب}{ج}$ یعنی $ب^۲ = اج$

اسلئے $(ا + ج)^۲ - ب^۲ = (ا + ج)^۲ - اج = ا^۲ + اج + ج^۲$

$= ا^۲ + ب^۲ + ج^۲$

چونکہ ب^{۲} = ا ج پس (۱) ثابت ہوئی

اب (۲) کو لو اور اختلاف کی خاطر فرض کرو کہ

$$\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{ج}} = \text{ک}$$

اسلئے ب = ک ج اور ا = ک ب = ک (ک ج) = ک^{۲} ج.

ہمیں ذیل کی مساوات متماثلہ ثابت کرنی ہے۔

(ک^{۲} ج + ک ج + ج)^{۲} + (ک^{۲} ج)^{۲} + (ک ج)^{۲} + ج^{۲}

= ۲ (ک^{۲} ج + ک ج + ج)(ک^{۲} ج + ج)

یعنی {(ک^{۲} + ک + ۱)^{۲} + (ک^{۴} + ک^{۲} + ۱)} ج^{۲}

= ۲ (ک^{۲} + ک + ۱)(ک^{۲} + ۱) ج^{۲} .... (۳)

اب {(ک^{۲} + ک + ۱)^{۲} + (ک^{۴} + ک^{۲} + ۱)} ج^{۲}

= (ک^{۲} + ک + ۱) {(ک^{۲} + ک + ۱) + (ک^{۲} − ک + ۱)} ج^{۲}

= ۲ (ک^{۲} + ک + ۱)(ک^{۲} + ۱) ج^{۲}

جس سے (۳) کی صداقت ثابت ہے اور اس لئے (۲) ثابت ہوئی۔

مثال ۳۔ اگر $\frac{\text{لا}}{\text{ب + ج − ا}} = \frac{\text{ما}}{\text{ج + ا − ب}} = \frac{\text{ی}}{\text{ا + ب − ج}}$

تو ثابت کرو کہ (ب − ج) لا + (ج − ا) ما + (ا − ب) ی = ۰

فرض کرو کہ $\frac{\text{لا}}{\text{ب + ج − ا}} = \frac{\text{ما}}{\text{ج + ا − ب}} = \frac{\text{ی}}{\text{ا + ب − ج}} = \text{ک}$

تو لا = (ب + ج − ا) ک

ما = (ج + ا − ب) ک

ی = (ا + ب - ج) ک

اب ان تین معاولات کی مدد سے

(ب - ج) لا + (ج - ا) ھا + (ا - ب) ی

= (ب - ج)(ب + ج - ا) ک + (ج - ا)(ج + ا - ب) ک

+ (ا - ب)(ا + ب - ج) ک

= [(ب² - ج² + ج² - ا² + ا² - ب²) - {ا(ب - ج) + ب(ج - ا) + ج(ا - ب)}] ک

= [۰ - ۰] ک = ۰

مثال ۴ ـ اگر (ب ی + ج ھا) / (ب - ج) = (ج لا + ا ی) / (ج - ا) = (ا ھا + ب لا) / (ا - ب) ...(۱)

تو (ا + ب + ج)(لا + ھا + ی) = ا لا + ب ھا + ج ی ......(۲)

فرض کرو کہ (۱) کی ہر ایک نسبت = ک

تب ب ی + ج ھا = ک (ب - ج) ....(۳)

ج لا + ا ی = ک (ج - ا) ....(۴)

ا ھا + ب لا = ک (ا - ب) ....(۵)

(۳)، (۴) اور (۵) کو جمع کرنے سے

(ب + ج) لا + (ج + ا) ھا + (ا + ب) ی

= ک {(ب - ج) + (ج - ا) + (ا - ب)}

= ک × ۰ = ۰

اب اگر ہم ا لا + ب ھا + ج ی کو طرفین پر زیادہ کریں تو ہمیں مساوات (۲) حاصل ہوگی۔

۲۹ — اب ہم تناسب کی تعریف جبریہ کا اقلیدس کی تعریف تناسب سے مقابلہ کریں گے۔ اقلیدس کی تعریف یہ ہے۔

چار مقادیر متناسب کہلاتی ہیں اگر پہلی اور تیسری مقادیر کے کوئی اضعاف متساویہ لئے جائیں اور نیز دوسری اور چوتھی مقادیر کے کوئی اضعاف متساویہ لئے جائیں تو تیسری مقدار کا ضعف چوتھی مقدار کے ضعف سے بڑا ہوگا یا برابر ہوگا یا چھوٹا ہوگا بمطابق اس کے کہ پہلی مقدار کا ضعف دوسری مقدار کے ضعف سے بڑا ہو یا برابر ہو یا چھوٹا ہو۔

رموز جبریہ میں یہ تعریف اس طرح بیان ہوگی

چار مقادیر ا، ب، ج، د متناسب ہونگی اگر

ف ج $\gtreqless$ ق د بمطابق اس کے کہ ف ا $\gtreqless$ ق ب اس میں ف اور ق کوئی مثبت صحیح اعداد ہیں۔

(۱) فرض کرو کہ ہمیں تناسب کی تعریف جبریہ سے تعریف ہندسیہ حاصل کرنی ہے

چونکہ $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}}$ اسلئے طرفین کو $\frac{\text{ف}}{\text{ق}}$ میں ضرب دینے سے حاصل ہوگا $\frac{\text{ف ا}}{\text{ق ب}} = \frac{\text{ف ج}}{\text{ق د}}$ اس لئے خواص کسور سے

ف ج $\gtreqless$ ق د بمطابق اس کے کہ ف ا $\gtreqless$ ق ب جس سے دعویٰ ہمارا ثابت ہے۔

(۲) فرض کرو ہمیں تناسب کی تعریف جبریہ تعریف ہندسیہ سے مستنبط کرنی ہے

معلوم ہے ف ج $\gtreqless$ ق د بمطابق اس کے کہ ف ا $\gtreqless$ ق ب

اور ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$

اگر کسور $\frac{ا}{ب}$ اور $\frac{ج}{د}$ برابر نہ ہوں تو اُن میں سے کوئی ایک دوسری سے بڑی ہوگی۔ فرض کرو کہ $\frac{ا}{ب} > \frac{ج}{د}$ تب اگر ف اور ق مثبت صحیح ہوں تو اس صورت میں ایک ایسی کسر $\frac{ق}{ف}$ دریافت ہو سکتی ہے جو $\frac{ا}{ب}$ اور $\frac{ج}{د}$ کے درمیان واقع ہو۔

اسلئے $\frac{ا}{ب} > \frac{ق}{ف}$ .... (۱)

اور $\frac{ج}{د} < \frac{ق}{ف}$ .... (۲)

بموجب (۱) ف ا > ق ب

اور بموجب (۲) ف ج < ق د

اور جو کچھ ہم نے فرض کیا تھا یہ اس کے خلاف ہے۔

اسلئے $\frac{ا}{ب}$ اور $\frac{ج}{د}$ غیر مساوی نہیں ہیں۔ یعنی $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$ جس سے دعویٰ ہمارا ثابت ہے۔

۳۰ — اس بات کا خیال رکھنا چاہیے کہ تناسب کی تعریف ہندسیہ کا تعلق مقادیر مقرون سے ہے جیسے خطوط زاویے رقبے وغیرہ وغیرہ جو بطریق ہندسیہ تعبیر کئے گئے ہوں مگر جن کا تعلق کسی پیمانہ واحد سے نہ ہو۔ اس لئے اقلیدس کی تعریف مقادیر متباین اور متوافق دونوں پر حاوی ہے مگر تعریف جبریہ اگر صحیح طور پر بیان کیا جائے تو صرف مقادیر متوافق پر ہی صادق آتی ہے کیونکہ بموجب اس کے سب سے پہلے یہ مان لینا پڑتا ہے کہ ا مقدار

ب کا وہی معیّن حصہ یا حصّے یا ضعف ہے جو ج مقدار د کا ہے لیکن سب ثبوت جو ہم نے متوافق مقادیر کے لئے دئے ہیں متباین مقادیر کے لئے بھی درست ہیں کیونکہ ہم دفعہ ۶ میں ثابت کرچکے ہیں کہ دو مقادیر متباین کی نسبت کا فرق دو اعدادِ صحیح کی نسبت سے اتنا چھوٹا ہوسکتا ہے کہ وہ ہر ایک مقدار معیّن سے کم ہو ۔

۴۳ ۔ اس باب کو ہم امثلۂ ذیل کے حل سے ختم کرینگے بعض اوقات خاص قسم کی معادلات کا حل اعمال ترکیب اور تفصیل النسبت کے استعمال سے باسانی حاصل ہوسکتا ہے ۔

مثال ۱ ۔ اگر (۲م ا + ۶م ب + ۳ن ج + ۹ن د)(۲م ا − ۶م ب − ۳ن ج + ۹ن د)

= (۲م ا − ۶م ب + ۳ن ج − ۹ن د)(۲م ا + ۶م ب − ۳ن ج − ۹ن د)

تو ثابت کرو کہ ا، ب، ج، د متناسب ہیں ۔

چونکہ (۲م ا + ۶م ب + ۳ن ج + ۹ن د) / (۲م ا − ۶م ب + ۳ن ج − ۹ن د)

= (۲م ا + ۶م ب − ۳ن ج − ۹ن د) / (۲م ا − ۶م ب − ۳ن ج + ۹ن د)

اسلئے ترکیب اور تفصیل نسبت سے

۲(۲م ا + ۳ن ج) / ۲(۶م ب + ۹ن د) = ۲(۲م ا − ۳ن ج) / ۲(۶م ب − ۹ن د)

تبدیل نسبت سے (۲م ا + ۳ن ج) / (۲م ا − ۳ن ج) = (۶م ب + ۹ن د) / (۶م ب − ۹ن د)

دوبارہ ترکیب اور تفصیل نسبت سے $\frac{۴ م ا}{۶ ن ج} = \frac{۱۲ م ب}{۱۸ ن د}$

جس سے $\frac{ا}{ج} = \frac{ب}{د}$ یا $ا : ب = ج : د$

مثال ۲ — مساوات $\frac{\sqrt{۸ لا + ۱} + \sqrt{۸ لا - ۱}}{\sqrt{۸ لا + ۱} - \sqrt{۸ لا - ۱}} = \frac{۴ لا - ۱}{۲}$ کو حل کرو

ترکیب اور تفصیل نسبت سے حاصل ہوگا $\frac{\sqrt{۸ لا + ۱}}{\sqrt{۸ لا - ۱}} = \frac{۴ لا + ۱}{۴ لا - ۳}$

اسلئے $\frac{لا + ۱}{لا - ۱} = \frac{۱۶ لا^{۲} + ۸ لا + ۱}{۱۶ لا^{۲} - ۲۴ لا + ۹}$

پھر ترکیب اور تفصیل نسبت سے $\frac{۲ لا}{۲} = \frac{۳۲ لا^{۲} - ۱۶ لا + ۱۰}{۳۲ لا - ۸}$

اسلئے $لا = \frac{۱۶ لا^{۲} - ۸ لا + ۵}{۱۶ لا - ۴}$

جس سے $۱۶ لا^{۲} - ۴ لا = ۱۶ لا^{۲} - ۸ لا + ۵$

اسلئے $لا = \frac{۵}{۴}$

امثلہ نمبری ۲

۱ — اعداد ۳ و ۵ و ۲۷ کا چوتھا متناسب دریافت کرو

۲ — وسط تناسب دریافت کرو۔

(۱) ۶ اور ۲۴ کے درمیان

(۲) $۳۶۰ ا^{۴}$ اور $۲۵۰ ا^{۲} ب^{۲}$ کے درمیان

۳ — $\frac{لا}{ھا} + \frac{ھا}{لا}$ اور $\frac{لا}{ھا}$ کا تیسرا متناسب دریافت کرو۔

اگر $ا : ب = ج : د$ تو ثابت کرو کہ

۴ ـ ا^{۲} ج + ا ج^{۲} : ب^{۲} د + ب د^{۲} = (ا + ج)^{۳} : (ب + د)^{۳}

۵ ـ ف ا^{۲} + ق ب^{۲} : ف ا^{۲} − ق ب^{۲} = ف ج^{۲} + ق د^{۲} : ف ج^{۲} − ق د^{۲}

۶ ـ ا − ج : ب − د = $\sqrt{\text{ا}^{۲} + \text{ج}^{۲}}$: $\sqrt{\text{ب}^{۲} + \text{د}^{۲}}$

۷ ـ $\sqrt{\text{ا}^{۲} + \text{ج}^{۲}}$: $\sqrt{\text{ب}^{۲} + \text{د}^{۲}}$ = $\sqrt{\text{ا ج} + \frac{\text{ج}^{۳}}{\text{ا}}}$: $\sqrt{\text{ب د} + \frac{\text{د}^{۳}}{\text{ب}}}$

اگر ا و ب و ج و د تناسب مسلسل میں ہوں تو ثابت کرو کہ

۸ ـ ا : ب + د = ج^{۳} : ج^{۲} د + د^{۳}

۹ ـ ۲ ا + ۳ د : ۳ ا − ۴ د = ۲ ا^{۳} + ۳ ب^{۳} : ۳ ا^{۳} − ۴ ب^{۳}

۱۰ ـ (ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲})(ب^{۲} + ج^{۲} + د^{۲}) = (ا ب + ب ج + ج د)^{۲}

۱۱ ـ اگر ا اور ج کا وسط تناسب ب ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ا}^{۲} - \text{ب}^{۲} + \text{ج}^{۲}}{\text{ا}^{-۲} - \text{ب}^{-۲} + \text{ج}^{-۲}} = \text{ب}^{۴}$$

۱۲ ـ اگر ا : ب = س : د اور ع : ف = گ : ح تو ثابت کرو کہ

ا ع + ب ف : ا ع − ب ف = س گ + د ح : س گ − د ح

معادلات ذیل کو حل کرو

۱۳ ـ $$\frac{\text{۲لا}^{۳} - \text{۳لا}^{۲} + \text{لا} + ۱}{\text{۲لا}^{۳} - \text{۳لا}^{۲} - \text{لا} - ۱} = \frac{\text{۳لا}^{۳} - \text{لا}^{۲} + \text{۵لا} - ۱۳}{\text{۳لا}^{۳} - \text{لا}^{۲} - \text{۵لا} + ۱۳}$$

۱۴ ـ $$\frac{\text{۳لا}^{۴} + \text{لا}^{۲} - \text{۲لا} - ۳}{\text{۳لا}^{۴} - \text{لا}^{۲} + \text{۲لا} + ۳} = \frac{\text{۵لا}^{۴} + \text{۲لا}^{۲} - \text{۷لا} + ۳}{\text{۵لا}^{۴} - \text{۲لا}^{۲} + \text{۷لا} - ۳}$$

۱۵ ـ $$\frac{\text{(م + ن) لا} - \text{(ا − ب)}}{\text{(م − ن) لا} - \text{(ا + ب)}} = \frac{\text{(م + ن) لا + ا + ج}}{\text{(م − ن) لا + ا − ج}}$$

۱۶ — اگر ا و ب و ج و د متناسب ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ا + د = ب + ج + \frac{(ا - ب)(ا - ج)}{ا}$$

۱۷ — اگر ا و ب و ج و د و ع تناسب مسلسل میں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(اب + ب ج + ج د + د ع)^۲ = (ا^۲ + ب^۲ + ج^۲ + د^۲)(ب^۲ + ج^۲ + د^۲ + ع^۲)$$

۱۸ — اگر ن مقادیر $ا_۱$ و $ا_۲$ و ..... $ا_ن$ تناسب مسلسل میں ہوں۔

تو ثابت کرو کہ $ا_۱ : ا_ن = ا_۱^{ن-۱} : ا_۲^{ن-۱} = ا_۲^{ن-۱} : ا_۳^{ن-۱} = ...$

اور $ا_۲ = \sqrt[ن-۱]{ا_۱^{ن-۲} ا_ن}$ و $ا_۳ = \sqrt[ن-۱]{ا_۱^{ن-۳} ا_ن^۲}$

.... $ا_ر = \sqrt[ن-۱]{ا_۱^{ن-ر} ا_ن^{ر-۱}}$

۱۹ — اگر $ا : ب = ج : د = ع : ف$

تو $ا^۳ + ۳ا^۲ ب + ب^۳ : ج^۳ + ۳ج^۲ د + د^۳ = ا^۳ + ب^۳ : ج^۳ + د^۳$ ...(الف)

اور $\sqrt{\frac{ا^۲ ج^۲}{ع^۲} + \frac{ا^۲ ع^۲}{ج^۲} + \frac{ج^۲ ع^۲}{ا^۲}} : \sqrt{\frac{ب^۲ د^۲}{ف^۲} + \frac{ب^۲ ف^۲}{د^۲} + \frac{د^۲ ف^۲}{ب^۲}}$

$= ا^۳ د ف + ج^۳ ب ف + ع^۳ ب د : ب^۳ ج ع + د^۳ ا ع + ف^۳ ا ج$ .... (ب)

اور $پ ا - ق ج + ر ع : پ ب - ق د + ر ف = \sqrt[۳]{ا ج ع} : \sqrt[۳]{ب د ف}$

$= \sqrt{ا^۲ - ج^۲ + ع^۲ + ۲ ا ج} : \sqrt{ب^۲ - د^۲ + ف^۲ + ۲ ب د}$ ...(ج)

۲۰ — اگر لا − ۱ شخصوں کے لا + ۱ دن کے کام کی نسبت لا + ۲ شخصوں کے لا − ۱ دن کے کام سے ۹ : ۱۰ ہو تو لا معلوم کرو۔

۲۱ — ایسے چار متناسب اعداد معلوم کرو جن کی طرفین کا مجموعہ ۲۱ ہو وسطین کا مجموعہ ۱۹ اور اُن سب کے مجذوروں کا مجموعہ ۴۴۲ ہو

۲۲ ۔ دو ظرف ا اور ب ہیں اُنمیں دو مختلف قسم کی شراب کے مرکب بھرے گئے ہیں ا میں مرکب کی نسبت ۲ : ۷ ہے اور ب میں ۱ : ۵ ہر ایک ظرف سے کتنی کتنی مقداریں مختلف مرکبوں کی لی جائیں کہ ایک نیا مرکب بن جائے جس میں ۲ گیلن ایک مرکب کے اور ۹ گیلن دوسرے کے شامل ہوں ۔

۲۳ ۔ ایک ظرف شراب سے پُر ہے اس میں سے ۹ گیلن نکالے گئے ہیں اور اسے پانی سے بھر دیا گیا ہے ۔ اگر ظرف میں اس وقت شراب اور پانی کی نسبت ۱۶ : ۹ ہو تو معلوم کرو کہ اس ظرف کی کل گنجایش کتنی ہے ۔

۲۴ ۔ اگر چار مقادیر متناسب مسلسل میں ہوں تو ثابت کرو کہ پہلی اور آخری مقدار کا فرق باقی دو مقداروں کے فرق کا کم از کم تین گنا ہے ۔

۲۵ ۔ کسی ملک میں ۱۸۷۱ء سے لیکر ۱۸۸۱ء تک آبادی ۹۶ ۱۵ فیصدی بڑھی ۔ اگر قصباتی آبادی ۱۸ فیصدی اور دیہاتی آبادی ۴ فیصدی بڑھی ہو تو ۱۸۷۱ء میں قصباتی اور دیہاتی آبادی کا مقابلہ کرو۔

۲۶ ۔ کسی ملک میں چاء کا صرف قہوہ سے ۵ گنا زیادہ ہے اگر ا فیصدی زیادہ چاء اور ب فیصدی زیادہ قہوہ صرف ہوتا تو کل مقدار صرف شدہ ج فیصدی زیادہ ہوتی ۔ لیکن اگر ب فیصدی زیادہ چاء اور ا فیصدی زیادہ قہوہ استعمال ہوتا تو کل مقدار استعمال شدہ ۳ ج فیصدی زیادہ ہوتی ۔ ا اور ب کا مقابلہ کرو ۔

۲۷ ۔ پیتل کی ترکیب میں جست اور تانبے کی آمیزش ہے کانسے میں ۸۰ فیصدی تانبا ۴ فیصدی جست اور ۱۶ فیصدی قلعی شامل ہے ۔ کسی پگھلے ہوئے پیتل اور کانسے کے مرکب میں ۷۴ فیصدی تانبا اور ۱۶ فیصدی جست اور ۱۰ فیصدی قلعی پائی گئی پیتل کی ترکیب میں تانبے اور جست کی

نسبت معلوم کرو۔

۲۸ ۔ چند ملاح کشتی کو ایک خاص فاصلہ تک بہاؤ کے خلاف ۸۴ منٹ میں لیجا سکتے ہیں اور بہاؤ کے رُخ میں اسی فاصلہ کو کھڑے پانی کی نسبت ۹ منٹ کم عرصہ میں طے کر لیتے ہیں معلوم کرو کہ بہاؤ کے رُخ اسی فاصلہ کو کتنی دیر میں طے کر لین گے ۔

باب سوم

تغیّر

۳۲ — اگر مقدار ما موقوف ہو یا حاصل ہو سکے یا حسابی اصطلاح میں **جملہ** ہو ایک دوسری مقدار لا کا تو اس ربط کو ہم کئی طرح سے بیان کر سکتے ہیں مثلاً

ما = ۳ لا

ما = ۱۷ لا^{۲}

ما = ا لا + ب

ما = ا لا^{۲} + ب لا + ج

ما = ۲ $\sqrt{\text{لا}}$ اور علیٰ ہذا القیاس

لا کو **متغیر متبوع** اور ما کو **متغیر تابع** کہتے ہیں۔ کیونکہ ہم لا کے لئے جو قیمت چاہیں مقرر کر سکتے ہیں اور ارتباطات جبریہ مندرجہ بالا سے ما کی مطابق قیمت ہر ایک صورت میں حاصل ہو سکتی ہے۔

لا اور ما کے سوا باقی تمام مقادیر مثلاً ۳ و ۱۷ و ا و ب وغیرہا جو معادلات بالا میں شامل ہیں مقادیر **مستقل** یا **نامتغیر** کہلاتی ہیں کیونکہ ان کی قیمت ہمیشہ وہی رہتی ہے اور مقادیر متغیر ما اور لا کے بدلنے سے ان میں فرق نہیں آتا۔

۳۳ — **تعریف**۔ جب کہا جائے کہ ایک مقدار ما ایسے بدلتی ہے جیسے

ایک دوسری مقدار لا با لاستقامت تو اس سے یہ مراد ہوتی ہے کہ دو مقادیر ایک دوسرے پر اس طرح موقوف ہیں کہ اگر لا کو بدلا جائے تو ھا بھی اسی نسبت سے بدلیگا۔

نوٹ ۔ لفظ "بالاستقامت" کو اکثر حذف کرتے ہیں اور صرف یہی کہتے ہیں کہ ھا ایسا بدلتا ہے جیسا لا ۔

جب ھا اس طرح بدلے جسطرح لا تو اس قسم کے تغیر کو **تغیر مستقیم** کہتے ہیں اور اسے اس رمز $\propto$ سے تعبیر کرتے ہیں۔ مثلاً ھا $\propto$ لا کا یہ مطلب ہے کہ "ھا ایسا بدلتا ہے جیسا لا"

اس قسم کے تغیر کی مثال یہ ہے اگر ایک ریل گاڑی یکساں رفتار سے ۶۰ منٹ میں ۴۰ میل جارہی ہو تو وہ ۳۰ منٹ میں ۲۰ میل اور ۱۲۰ منٹ میں ۸۰ میل جائیگی وغیرہ وغیرہ ہر ایک صورت میں طے کردہ فاصلہ اسی نسبت سے بڑھتا ہے یا گھٹتا ہے جیسے وقت ۔ اسے اکثر یوں بیان کرتے ہیں کہ جب رفتار یکساں ہو تو **فاصلہ ایسے بدلتا ہے جیسے وقت** ۔

۴۳ ۔ اگر ھا ایسا بدلتا ہو جیسا لا تو ھا حاصل ضرب لا اور ایک مقدار مستقل کے برابر ہوگا ۔

فرض کرو کہ ھا و ھا_1 و ھا_2 و ھا_3 و ۔۔۔۔ اور لا و لا_1 و لا_2 و لا_3 و ۔۔۔۔۔۔ مطابق قیمتیں ھا اور لا کی ہیں

بموجب تعریف $\frac{\text{ھا}}{\text{ھا}_1} = \frac{\text{لا}}{\text{لا}_1}$ و $\frac{\text{ھا}_1}{\text{ھا}_2} = \frac{\text{لا}_1}{\text{لا}_2}$ و $\frac{\text{ھا}_2}{\text{ھا}_3} = \frac{\text{لا}_2}{\text{لا}_3}$ اور علیٰ ہذا القیاس

$\therefore \frac{\text{ھا}_1}{\text{لا}_1} = \frac{\text{ھا}_2}{\text{لا}_2} = \frac{\text{ھا}_3}{\text{لا}_3} = \ldots\ldots$ چونکہ ہر یک $\frac{\text{ھا}}{\text{لا}}$ کے برابر ہے

اسلئے نسبت $\frac{\text{ما کی کوئی قیمت}}{\text{لا کی مطابق قیمت}}$ ہمیشہ وہی رہتی ہے

یعنی $\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ = م جہاں م مقدار مستقل ہے۔

∴ ما = م لا .... (۱)

اگر ما اور لا کی مطابق قیمتوں کا کوئی زوج معلوم ہو تو مساوات (۱) سے مقدار مستقل م کی قیمت حاصل ہوسکتی ہے۔

فرض کرو کہ ما = ۳ جب لا = ۱۲ تو ۳ = م × ۱۲

اسلئے م = $\frac{۱}{۴}$ اور ما = $\frac{۱}{۴}$ لا

مثال ۔ کسی دائرہ کا محیط ∝ قطر

∴ $\frac{\text{محیط}}{\text{قطر}}$ = ایک مستقل مقدار

یہ مقدار π سے تعبیر ہوتی ہے اور اس کی قیمت ۳٫۱۴۱۵۹ ہے۔

اسلئے محیط = ۲ π ر جہاں ر نصف قطر ہے یہاں π عبرانی حرف "جیت" ہے

۳۵ ۔ تغیر ربط تناسب کو بیان کرنے کا طریق جلیہ ہے

فرض کرو کہ نظام ذیل میں

متغیر متبوع کی قیمتیں	متغیر تابع کی مطابق قیمتیں
لا لاَ	ما ماَ

متغیرات متبوع اور تابع کی کوئی سی قیمتوں کے دو مطابق زوج (لا و ما) اور (لاَ و ماَ) ہیں اور ان میں ربط تناسب یہ ہے ما : ماَ = لا : لاَ ...... (۱)

جس سے $\frac{\text{ما}}{\text{ماَ}} = \frac{\text{لا}}{\text{لاَ}}$ یعنی ما = $\left(\frac{\text{ماَ}}{\text{لاَ}}\right)$ لا

اب اگر ما/لا ایک مستقل نسبت ہو یعنی (ما و لا) ایک غیر متبدل زوج ہو تو اس نسبت کو ہم ا سے تعبیر کر سکتے ہیں جہاں ا مقدار مستقل ہے اسلئے

ما = ا لا .... (۲)

یعنی ما ایک مستقل ضعف لا کا ہے۔

مثال ۔ فرض کرو کہ (ما و لا) اور (مآ و لآ) دو مطابق زوجوں کے لئے ربط ما : لا = مآ : لآ صحیح ہے اور جب لا = ۳ تو ما = ۶

اب چونکہ ۶ اور ۳ مطابق قیمتوں کا ایک زوج ہے اسلئے ما : لا = ۶ : ۳

یعنی ما/لا = ۶/۳ = ۲ اسلئے ما = ۲ لا

برعکس اس کے مساوات (۲) سے مساوات (۱) حاصل ہو سکتی ہے کیونکہ بموجب (۲)

ما = ا لا

اور اگر مآ و لآ دو مطابق قیمتیں ہوں تو

مآ = ا لآ

اسلئے ما/مآ = ا لا/ا لآ = لا/لآ

جب ہم یہ کہتے ہیں کہ ما ایسا بدلتا ہے جیسا لا تو اس سے ہمارا یہ مطلب ہوتا ہے کہ ما ایک ایسا جملہ لا کا ہے کہ لا کی قیمت میں کوئی تبدیلی ما کی قیمت میں ایک متناسب تبدیلی پیدا کرتی ہے۔ پس معلوم ہوا کہ رمز $\propto$ قائم مقام ہے "متناسب ہے" کا

اگر ما $\propto$ لا اور جب لا کی ایک خاص قیمت ن ہو تو ما کی مطابق قیمت م ہوگی اس طرح پر کہ ما و لا و م و ن متناسب ہونگے یعنی ما : لا = م : ن

۳۶ ۔ اکثر ایسا بیان کرتے ہیں کہ " اگر ما سے فاصلہ تعبیر کریں جو کسی شخص نے یکساں رفتار سے طے کیا ہو اور لا سے عرصہ مسافت تعبیر کریں

تو ما ∝ لا یعنی $\frac{ما}{لا}$ ایک نسبت مستقل ہے۔"

یہاں فاصلہ اور وقت ایک قسم کی مقادیر نہیں ہیں اور اس لئے اُن میں ربط نسبت نہیں ہوسکتا۔ لیکن یاد رہے کہ ما اور لا اعداد ہیں ما فاصلے کی اکائیوں کو تعبیر کرتا ہے اور لا وقت کی اکائیوں کو۔

اگر ما = تعداد میلوں کی

اور لا = تعداد گھنٹوں کی

تو $\frac{ما}{لا}$ ایک جائز نسبت ہے اور اس کے معنی بخوبی سمجھ میں آسکتے ہیں۔

اگر فاصلہ طے شدہ ۴ گھنٹے کے بعد ۱۲ میل ہو تو ما : لا = ۱۲ : ۴ یعنی ما = ۳ لا اگر ہم لا کے لئے کوئی اور خاص قیمت مثلاً ۵ مقرر کریں تو بھی ما = ۳ لا اسلئے ما = ۳ × ۵ = ۱۵

۷۴ ۔ اگر ایک مقدار ما اس طرح بدلے جس طرح کہ ایک دوسری مقدار لا کا متکافی یا مقلوب تو ہم کہا کرتے ہیں کہ ما اور لا میں **تغیر معکوس** ہے اور اسے بعض اوقات اس طرح بیان کرتے ہیں کہ ما بدلتا ہے **بالعکس** لا کے۔

پس اگر ما اور لا میں تغیر معکوس ہو تو ما = $\frac{م}{لا}$ جہاں م ایک مقدار مستقل ہے۔ تغیر معکوس کی توضیح کے لئے ایک مثال مندرجہ ذیل ہے۔

اگر ۶ آدمی ایک کام کو ۸ گھنٹہ میں کرتے ہوں تو ۱۲ آدمی اسی کام کو ۴ گھنٹے میں اور ۲ آدمی ۲۴ گھنٹے میں کرینگے اور علی ہذا القیاس۔

اس سے ظاہر ہے کہ اگر آدمیوں کی تعداد بڑھا دی جائے تو وقت اُسی نسبت سے گھٹ جائیگا۔ اور برعکس اس کے۔

مثال ۱ ۔ فرض کرو کہ لا کا جذر الکعب ما کے مجذور کے بالعکس بدلتا ہے

اگر لا = ۸ جب ما = ۳ تو لا معلوم کرو جب ما = $۱\frac{۱}{۲}$

بموجب شرائط سوال $\sqrt[۳]{\text{لا}} = \frac{\text{م}}{\text{ما}^{۲}}$ جہاں م ایک مقدار مستقل ہے

اس مساوات میں لا = ۸ اور ما = ۳ رکھنے سے

$۲ = \frac{\text{م}}{۹}$ ∴ م = ۱۸ اور $\sqrt[۳]{\text{لا}} = \frac{۱۸}{\text{ما}^{۲}}$

اس لئے ما = $\frac{۳}{۲}$ رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے لا = ۵۱۲

مثال ۲ — کسی سیارہ کی گردش کے وقت کا مجذور ایسا بدلتا ہے جیساکہ مکعب اُس فاصلے کا جو سیارہ اور سورج کے درمیان ہو۔ اگر فرض کیا جائے کہ زمین اور زہرہ (وینس) کے فاصلے سورج سے جداگانہ ۹۱۲۶۵ اور ۶۶۰ لاکھ میل ہیں تو زہرہ کی گردش کا وقت دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ایک گردش کا وقت ت ہے دنوں میں اور د فاصلہ ہے لاکھ میلوں میں۔

بموجب شرائط سوال $\text{ت}^{۲} \propto \text{د}^{۳}$

یا $\text{ت}^{۲} = \text{ک}\,\text{د}^{۳}$ جہاں ک مقدار مستقل ہے پس زمین کے لئے

$۳۶۵ \times ۳۶۵ = \text{ک} \times ۹۱۲۶۵ \times ۹۱۲۶۵ \times ۹۱۲۶۵$

جس سے $\text{ک} = \frac{۳۶۵ \times ۳۶۵}{۹۱۲۶۵ \times ۹۱۲۶۵ \times ۹۱۲۶۵}$

$= \frac{۱}{(۲۶۵)^{۳} \times ۳۶۵} = \frac{(۱۰)^{۳}}{(۲۵)^{۳} \times ۳۶۵}$

اِسلئے $\text{ت}^{۲} = \frac{(۱۰)^{۳}}{(۲۵)^{۳} \times ۳۶۵}\,\text{د}^{۳}$

زہرہ کے لئے $\text{ت}^{۲} = \frac{(۱۰)^{۳}}{(۲۵)^{۳} \times ۳۶۵} \times (۶۶۰)^{۳} =$

$$= \frac{(۱۰)^{۶} \times (۶۶)^{۳}}{۳۶۵ \times (۲۵)^{۳}} = \frac{۴^{۳} \times (۶۶)^{۳}}{۳۶۵}$$

اسلئے ت $= ۴ \times ۶۶ \times \sqrt[۳]{\frac{۲۶۴}{۳۶۵}}$

$= ۲۶۴ \times \sqrt[۳]{۰٫۷۲۳۳}$ تقریباً

$= ۲۶۴ \times ۰٫۸۵$

$= ۲۲۴٫۴$

اسلئے زہرہ کی گردش کا وقت $۲۲۴\frac{۱}{۲}$ دن ہے۔

۳۸ ۔ اگر ایک مقدار اس طرح بدلے جس طرح کہ دو یا زیادہ مقادیر کا حاصل ضرب بدلتا ہے تو ہم کہا کرتے ہیں کہ ان میں **تغیر مشترک** ہے

اگر ی بدلتا ہے بالاشتراک لا اور ما کے تو ی = م لا ما جہاں م مقدار مستقل ہے۔

مثلاً کسی رقم کا سود بدلتا ہے بالاشتراک اصل روپیہ اور مدت اور شرح فیصدی کے ۔

۳۹ ۔ اگر تین مقادیر ہوں اور پہلی مقدار اسی نسبت سے بدلے جیساکہ حاصل ضرب دوسری مقدار اور تیسری مقدار کے متکافی کا بدلتا ہے تو مقادیر اول اور دوم میں تغیر مستقیم اور اوّل اور سوم میں تغیر معکوس کہلائیگا۔ یعنی اگر ی بدلتا ہے بالاستقامت لا کے اور بالعکس ما کے تو ی $= \frac{\text{م لا}}{\text{ما}}$ جہاں م مقدار مستقل ہے۔

ما = م لا + ن لا^{۲} جہاں م اور ن مقادیر مستقل ہیں۔ اس جگہ ما ایسا جملہ ہے لا کا جس میں دو ارقام شامل ہیں ان میں سے ایک لا کے

متناسب ہے اور دوسری $لا^2$ کے
اگر $ما = \frac{ک}{لا^2}$ تو ما بدلتا ہے بالعکس لا کے مجذور کے کشش زمین اس اصول کی ایک مثال ہے کیونکہ کسی بیرونی شے پر زمین کی کشش بدلتی ہے بالعکس اُس فاصلہ کے مجذور کے جو زمین کے مرکز اور اُس شے کے درمیان ہو۔ اگر یہ فاصلہ دوگنا ہو جائے تو کشش کو $\frac{1}{4}$ سے ضرب دینا پڑیگا۔ اگر فاصلہ تین گنا ہو جائے تو کشش اپنی اصلی مقدار کا $\frac{1}{9}$ ہو جائے گی۔

اگر ما $\propto$ لا تو اسے ہم اس طرح بیان کرتے ہیں کہ ما = م لا جہاں م مقدار مستقل ہے۔ اگر اسیوقت ما $\propto$ ی تو ہم اسے بیان کر سکتے ہیں ما = ن ی جہاں ن مقدار مستقل ہے۔ مگر ضرور نہیں کہ ما = م ی کیونکہ دونوں صورتوں میں ایک ہی مقدار مستقل نہیں ہوسکتی۔ اگرچہ خاص صورتوں میں ممکن ہے۔

۴۰ ۔ جب ما $\propto$ لا تو ما = م لا اسکی ترسیم ایک ایسا خط مستقیم ہے جو مبدأ میں سے گزرتا ہے۔

جب ما $\propto$ $لا^2$ تو ما = م $لا^2$ اس کی ترسیم **شلجمی** (قطعہ مکافی) ہے
جب ما $\propto$ $\frac{1}{لا}$ تو ما لا = م اس کی ترسیم **ہذلولی** (قطعہ زائد) ہے

۴۱ ۔ اگر لا $\propto$ ما اور ما $\propto$ ی تو لا $\propto$ ی

چونکہ لا $\propto$ ما اسلئے $\frac{لا}{ما}$ = م (مقدار مستقل)

اور چونکہ ما $\propto$ ی اسلئے $\frac{ما}{ی}$ = ن (مقدار مستقل)

اسلئے ضرب دینے سے $\frac{لا}{ی}$ = م ن = مقدار مستقل اسلئے لا $\propto$ ی

۴۲۔ اگر ی ∞ ما جب لا مستقل ہو اور ی ∞ لا جب ما مستقل ہو تو ثابت کرو کہ ی ∞ ما لا جب ما اور لا دونوں بدلیں۔

ثبوت۔ چونکہ ی ∞ ما جب لا مستقل ہو۔

∴ ی = م ما (جہاں م موقوف ما پر نہیں ہے) .... (۱)

لیکن ی ∞ لا جب ما مستقل ہو

∴ م ما ∞ لا جب ما مستقل ہو اسلئے م ∞ لا

∴ م = ن لا (جہاں ن موقوف لا پر نہیں ہے) .... (۲)

نیز چونکہ ن جزضربی ہے م کا اسلئے وہ ما پر موقوف نہیں ہے۔

پس (۱) میں م کی قیمت رکھنے سے ی = ن ما لا (جہاں ن موقوف لا اور ما پر نہیں ہے)

اسلئے ی ∞ لا ما

متبادل ثبوت۔ نظام ذیل میں متغیرات کی مطابق قیمتوں پر خیال کرو [اس جگہ ی صرف لا اور ما پر موقوف ہے اور اگر ی ∞ لا جب ما مستقل ہو اور ی ∞ ما جب لا مستقل ہو تو یہ ثابت کرنا ہے کہ ی ∞ لا ما جب لا اور ما دونوں بدلیں]

متغیر تابع	متغیر متبوع
ی	لا و ما
ی۱	لاَ و ما
یَ	لاَ و ماَ

اب چونکہ دونوں ی اور ی۱ کے مطابق ما کی وہی قیمت ہے اس لئے بموجب

شرائط سوال $\frac{ی}{ی_۱} = \frac{لا}{لا_۱}$

نیز چونکہ دونوں ی۱ اور یَ کے مطابق لا کی وہی قیمت ہے۔

اسلئے $\frac{ی_۱}{یَ} = \frac{ما}{ما_۱}$

اب ان معادلات سے $\frac{ی}{ی_۱} \times \frac{ی_۱}{یَ} = \frac{لا}{لا_۱} \times \frac{ما}{ما_۱}$

یعنی $\frac{ی}{یَ} = \frac{لا ما}{لا_۱ ما_۱}$ جس سے ثابت ہوتا ہے کہ ی ∞ لا ما

اسی طرح سے ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ اگر ی موقوف ہو لا۱ و لا۲ و لا۳...لان پر اور صرف انہیں مقادیر پر اور ی ایسا بدلتا ہو جیساکہ اِن مقادیر میں سے کوئی ایک مقدار جبکہ باقی مقادیر مستقل فرض کی جائیں تو

ی ∞ $لا_۱ \times لا_۲ \times لا_۳ \times \ldots \times لا_ن$ جب سب بدلیں

۴۳۔ دفعہ گزشتہ میں جو مسئلہ ثابت کیا گیا ہے اس کی چند مثالیں ذیل میں مندرج ہیں۔

اگر مزدوروں کی تعداد معین ہو تو انکے کام کی مقدار ایسے بدلتی ہے جیسے اُن دنوں کی تعداد جتنے دن انہوں نے کام کیا ہو اور کسی معینہ وقت میں کام کی مقدار ایسے بدلتی ہے جیسے مزدوروں کی تعداد۔ اسلئے جب دنوں کی تعداد اور مزدوروں کی تعداد دونوں بدلیں۔ تو کام کی مقدار اس طرح بدلیگی جس طرح کہ دنوں کی تعداد اور مزدوروں کی تعداد کا حاصل ضرب

علم ہندسہ میں مثلث کا رقبہ ∞ قاعدہ جب ارتفاع مستقل ہو اور رقبہ ∞ ارتفاع جب قاعدہ مستقل ہو۔ اور رقبہ ∞ قاعدہ × ارتفاع جب قاعدہ اور ارتفاع دونوں بدلیں۔

مثال ۱ - ۴ دن میں $\frac{1}{2}$ ۱۷ ایکڑ زمین میں ہل چلانے کے لئے ۶ بیلوں کی ضرورت ہے اگر بیلوں کی تعداد ۵۴ ہو تو معلوم کرو کہ $\frac{1}{4}$ ۲ دن میں کتنے ایکڑ زمین میں ہل چلانا ممکن ہوگا -

بیلوں کی تعداد کو ب سے اور ایکڑوں کو ا سے اور دنوں کو د سے تعبیر کرو۔

ہمیں معلوم ہے کہ ا $\propto$ ب جب د مستقل ہو اور ا $\propto$ د جب ب مستقل ہو $\therefore$ ا $\propto$ د ب

اسلئے ا = م د ب جہاں م مقدار مستقل ہے -

چونکہ ۴ دن میں $\frac{1}{2}$ ۱۷ ایکڑ زمین میں ہل چلانے کے لئے ۶ بیلوں کی ضرورت ہے -

اسلئے $\frac{۳۵}{۲}$ = م × ۴ × ۶ $\therefore$ م = $\frac{۳۵}{۴۸}$

اسلئے ا = $\frac{۳۵}{۴۸}$ د ب

$\therefore$ جب د = $\frac{۹}{۴}$ اور ب = ۵۴

تو ایکڑوں کی تعداد مطلوبہ = $\frac{۳۵}{۴۸} \times \frac{۹}{۴} \times$ ۵۴ = $\frac{۱۹}{۳۲}$ ۸۸

مثال ۲ - فرض کرو کہ رقّاص کے اہتزاز کا وقت اس طرح بدلتا ہے جس طرح اسکے طول کا جذر- اگر ایک رقاص جس کی لمبائی ۱۵٫۶۴۴ سنٹی میٹر ہو ۴۴ سکنڈ میں ۱۰۵ مرتبہ حرکت کرے تو اُس رقاص کا طول معلوم کرو جو ایک سکنڈ میں صرف ایک حرکت کرے -

فرض کرو کہ ت سکنڈ ایک اہتزاز کا وقت ہے اور ل سنٹی میٹر رقاص کا طول ہے -

تب ت = ک $\sqrt{\text{ل}}$

جب $ل = ۱۷٫۴۴$ اور $ت = \frac{۴۴}{۱۰۵}$

تو $\frac{۴۴}{۱۰۵} = ک\sqrt{۱۷٫۴۴}$

اسلئے $ک = \frac{۴۴}{\sqrt{۱۷٫۴۴} \times ۱۰۵}$

ہمیں ل کی قیمت چاہیئے جب ت = ۱

$\sqrt{ل} = \frac{ت}{ک} = \frac{۱}{ک}$

$\therefore ل = \frac{۱}{ک^۲} = \frac{۱۷٫۴۴ \times ۱۰۵^۲}{۴۴^۲}$

$= \frac{۱۶ \times ۱٫۰۹ \times ۱۰۵ \times ۱۰۵}{۱۶ \times ۱۲۱} = \frac{۱٫۰۹ \times ۱۰۵ \times ۱۰۵}{۱۲۱}$

$= \frac{۱۲۰۱۷٫۲۵}{۱۲۱} = ۹۹٫۳۲$ سنٹی میٹر

مثال ۳ — ایک قائم مخروط مستدیر کا حجم $\propto$ نصف قطر کا مجذور جب ارتفاع مستقل ہو اور $\propto$ ارتفاع جب قاعدہ مستقل ہو۔ اگر قاعدہ کا نصف قطر ۷ فٹ ہو اور ارتفاع ۱۵ فٹ تو حجم ۷۷۰ مکعب فٹ ہوتا ہے ایک ایسے مخروط کا ارتفاع معلوم کرو جس کا حجم ۱۳۲ مکعب فٹ ہو اور وہ ایک ایسے قاعدہ پر کھڑا ہو جس کا نصف قطر ۳ فٹ ہو۔

فرض کرو کہ ع اور ر جداگانہ ارتفاع اور نصف قطر (قاعدہ مخروط) کو فٹوں میں تعبیر کرتے ہیں

بموجب شرائط سوال $۷۷۰ = م \times ۷^۲ \times ۱۵$

جس سے $م = \frac{۲۲}{۲۱}$

(ع) کسی سطح پر اشتداد روشنی بدلتا ہے بالعکس اُس فاصلہ کے جو سطح اور مبداء کے درمیان ہو -

۴۵ - اس باب کو ہم چند متفرق مثالوں کے حل سے ختم کریں گے -

مثال ۱ - اگر لا و ما و ی تین ایسی مقادیر متغیر ہوں کہ ما + ی - لا مقدار مستقل ہو اور (لا + ما - ی) (لا + ی - ما) ∞ ما ی تو ثابت کرو کہ

لا + ما + ی ∞ ما ی

بموجب شرائط سوال ما + ی - لا = ک .... (۱)

اور (لا + ما - ی)(لا + ی - ما) = م ما ی .... (۲)

جہاں ک اور م مقادیر مستقل ہیں

(۲) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے لا^۲ - (ما - ی)^۲ = م ما ی

∴ لا^۲ - (ما + ی)^۲ = (م - ۴) ما ی

یا (لا + ما + ی)(لا - ما - ی) = (م - ۴) ما ی

اسلئے (۱) سے (لا + ما + ی)(- ک) = (م - ۴) ما ی

∴ لا + ما + ی = $\left(\frac{۴ - م}{ک}\right)$ ما ی = مقدار مستقل × ما ی

اسلئے لا + ما + ی ∞ ما ی

مثال ۲ - ایک انجن بغیر ٹرین کے ۲۴ میل فی گھنٹہ جا سکتا ہے اور اُس کی رفتار ایک ایسی مقدار کے مطابق گھٹتی ہے جو خود گاڑیوں کی تعداد کے جذر کے موافق بدلتی ہے - اگر چار گاڑیاں لگائی جائیں تو رفتار ۲۰ میل فی گھنٹہ ہوتی ہے - بڑی سے بڑی تعداد گاڑیوں کی معلوم کرو جنھیں انجن ہلا سکتا ہے -

فرض کرو کہ لا = گاڑیوں کی تعداد کے جو لگائی گئی ہیں رفتار

فی گھنٹہ = ۲۴ - م √لا جہاں م مستقل ہے

اب چونکہ رفتار فی گھنٹہ ۲۰ میل ہے جب لا = ۴

اسلئے ۲۰ = ۲۴ - م √۴ = ۲۴ - ۲م یعنی م = ۲

اسلئے انجن کی رفتار لا گاڑیوں کے ساتھ = ۲۴ - ۲ √لا

جس سے ظاہر ہے اگر لا کو بڑھایا جائے تو رفتار گھٹے گی۔

فرض کرو کہ لا = لا۱ جب رفتار صفر ہو اسلئے

۰ = ۲۴ - ۲ √لا۱

∴ √لا۱ = ۱۲ اور لا۱ = ۱۴۴

پس اگر ۱۴۴ گاڑیاں لگائی جائیں تو عین اُسوقت انجن اُنھیں نہیں ہلا سکیگا۔

اسلئے گاڑیوں کی بڑی سے بڑی تعداد جو انجن ہلا سکتا ہے = ۱۴۳

مثال ۳ - ایک ریل کے سفر کا عرصہ بدلتا ہے بالاستقامت فاصلہ طی شدہ کے اور بالعکس رفتار کے اور رفتار بدلتی ہے بالاستقامت مقدار کوئلہ صرف شدہ کے جذر کے اور بالعکس گاڑیوں کی تعداد کے جو ٹرین میں لگی ہوئی ہوں ۲۵ میل کے سفر میں آدھ گھنٹہ لگا اور ۱۸ گاڑیوں کے ساتھ ۱۰ ہنڈرویٹ کوئلہ کے صرف ہوئے - معلوم کرو کہ ۲۱ میل سفر کے لئے ۲۸ منٹ میں ۱۶ گاڑیوں کے ساتھ کتنا کوئلہ درکار ہوگا۔

فرض کرو کہ ت تعبیر کرتی ہے وقت کو گھنٹوں میں

اور د " " بُعد کو میلوں میں

اور ر " " رفتار فی گھنٹہ میلوں میں

اور ق " " کل ہنڈرویٹ مقدار کوئلہ صرف شدہ فی میل

اور س گاڑیوں کی تعداد کو تعبیر کرتا ہے

تو بموجب شرائط سوال ہے

$$ت \propto \frac{د}{ر}$$

اور $ر \propto \frac{\sqrt{ق}}{س}$

جس سے $ت \propto \frac{س\,د}{\sqrt{ق}}$

یا $ت = \frac{ک\,س\,د}{\sqrt{ق}}$ جہاں ک مقدار مستقل ہے

اس مساوات میں اوپر دی ہوئی قیمتیں مندرج کرنے سے (چونکہ $ق = \frac{۱۰}{۲۵}$)

$$\frac{۱}{۲} = \frac{۵ \times ۲۵ \times ۱۸ \times ک}{\sqrt{۱۰}}$$

یعنی $ک = \frac{\sqrt{۱۰}}{۳۶ \times ۱۲۵}$

اسلئے $ت = \frac{د\,س\,\sqrt{۱۰}}{\sqrt{ق}\;۳۶ \times ۱۲۵}$

اب ت و س و د کی قیمتیں جو سوال کے دوسرے حصے میں دی ہوئی ہیں مندرج کرنے سے

$$\frac{۲۸}{۶۰} = \frac{۲۱ \times ۱۶ \times \sqrt{۱۰}}{\sqrt{ق}\;۳۶ \times ۱۲۵}$$

یعنی $\sqrt{ق} = \frac{۲۱ \times ۱۶ \times \sqrt{۱۰}}{۲۸ \times ۷۵} = \frac{۴}{۲۵}\sqrt{۱۰}$

جس سے ق = $\frac{۳۲}{۱۲۵}$

اسلئے کوئلہ کی مقدار مطلوبہ = $\frac{۳۲ \times ۲۱}{۱۲۵} = \frac{۴۷}{۱۲۵}$ ۵ ہنڈرویٹ

امثلہ نمبری ۳

۱ - اگر لا ایسا بدلتا ہو جیسا ما اور لا = ۸ جب ما = ۱۵ تو لا دریافت کرو جب ما = ۱۰

۲ - اگر ف بدلتا ہو بالعکس ق کے اور ف = ۷ جب ق = ۳ تو ف معلوم کرو جب ق = ۲$\frac{۱}{۳}$

۳ - اگر لا کا مجذور ایسا بدلتا ہو جیسا ما کا مکعب اور لا = ۳ جب ما = ۴ تو ما کی قیمت دریافت کرو جب لا = $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

۴ - ا ایسا بدلتا ہے جیسا ب اور ج بالاشتراک اگر ا = ۲ جب ب = $\frac{۳}{۵}$ اور ج = $\frac{۱}{۲۷}$ تو ج کی قیمت معلوم کرو جب ا = ۵۴ اور ب = ۳

۵ - اگر ا ایسا بدلتا ہو جیسا ج اور ب ایسا بدلتا ہو جیسا ج تو ا ± ب اور $\sqrt{اب}$ ایسا بدلیں گے جیسا ج

۶ - اگر ا ایسا بدلتا ہو جیسا ب ج تو ب بدلیگا بالعکس $\frac{ج}{ا}$ کے۔

۷ - ف بدلتا ہے بالاستقامت ق کے اور بالعکس ر کے نیز ف = $\frac{۲}{۳}$ جب ق = $\frac{۳}{۷}$ اور ر = $\frac{۹}{۱۴}$ معلوم کرو ق جب ف = $\sqrt{۴۸}$ اور ر = $\sqrt{۷۵}$

۸- اگر لا ایسا بدلتا ہو جیسا ما تو ثابت کرو کہ $لا^2 + ما^2$ ایسا بدلے گا جیسا $لا^2 - ما^2$

۹- اگر ما ایسا بدلتا ہو جیسا دو مقادیر کا مجموعہ جن میں سے ایک مقدار بدلتی ہے بالاستقامت لا کے اور دوسری بدلتی ہے بالعکس لا کے اور اگر ما = ۶ جب لا = ۴ اور ما = ۳$\frac{1}{3}$ جب لا = ۳ تو لا اور ما کے باہمی ربط کو مساوات کی صورت میں بیان کرو

۱۰- اگر ما دو ایسی مقادیر کے مجموعہ کے برابر ہو جن میں سے ایک مقدار بدلتی ہو بالاستقامت لا کے اور دوسری بالعکس $لا^2$ کے اور اگر ما=۱۹ جب لا = ۲ یا ۳ تو ما کو لا کی رقوم میں دریافت کرو۔

۱۱- اگر ا بدلتا ہو بالاستقامت ب کے جذر کے اور بالعکس ج کے مکعب کے اور اگر ا = ۳ جب ب = ۲۵۶ اور ج = ۲ تو ب کی قیمت معلوم کرو جب ا = ۲۴ اور ج = $\frac{1}{2}$

۱۲- یہ معلوم ہے کہ لا + ما ایسا بدلتا ہے جیسا ی + $\frac{1}{ی}$ اور لا-ما ایسا بدلتا ہے جیسا ی - $\frac{1}{ی}$ باہمی ربط لا اور ی کا دریافت کرو۔ بشرطیکہ ی = ۲ جب لا = ۳ اور ما = ۱

۱۳- اگر ا بدلتا ہے بالاشتراک ب اور ج کے جبکہ ب ایسا بدلتا ہے جیسا $د^2$ اور ج بدلتا ہے بالعکس ا کے تو ثابت کرو کہ ا ایسا بدلتا ہے جیسا د۔

۱۴- اگر ما ایسا بدلتا ہے جیساکہ تین مقادیر کا مجموعہ جن میں سے پہلی مقدار مستقل ہے دوسری مقدار ایسے بدلتی ہے جیسے لا اور تیسری ایسے بدلتی ہے جیسے $لا^2$ اور اگر ما = ۰ جب لا = ۱ اور ما = ۱

جب لا = ۲ اور ما = ۴ جب لا = ۳ تو ما کی قیمت دریافت کرو جب لا = ۷

۱۵- جب ایک جسم حالت سکون سے ہوا میں گرتا ہے تو نقطہ ابتدائی سے اُس کا فاصلہ ایسا بدلتا ہے جیسا مجذور اُس وقت کا جو اُس نے گرنے میں صرف کیا ہو اگر ایک جسم ½ ۴۰۲ فٹ ۵ سکنڈ میں نیچے گرے تو دریافت کرو کہ ۱۰ سکنڈ میں وہ کتنا گریگا۔ نیز معلوم کرو کہ دسویں سکنڈ میں وہ کتنا گرے گا؟

۱۶- کسی گولے کا حجم ایسا بدلتا ہے جیسا اُس کے نصف قطر کا مکعب اور جب نصف قطر ½۳ فٹ ہو تو حجم ⅔ ۱۷۹ مکعب فٹ ہوتا ہے۔ اگر نصف قطر ا فٹ ۹ انچ ہو تو حجم دریافت کرو

۱۷- کسی گول ٹکیا کا وزن ایسا بدلتا ہے جیسا اُس کے نصف قطر کا مجذور اگر موٹائی مستقل ہو۔ اور ایسا بدلتا ہے جیسا کہ موٹائی جب نصف قطر مستقل ہو۔ ایسی دو ٹکیوں کی موٹائیوں کی باہمی نسبت ۹ : ۸ ہے اگر پہلی ٹکیا کا وزن دوسری کے وزن کا دو چند ہو تو اُن کے نصف قطروں کی نسبت معلوم کرو۔

۱۸- ایک کشتیوں کی دوڑ کی تقریب پر کسی ایک دن میں دوڑوں کی تعداد ایسے بدلتی ہے جیسے دنوں کی تعداد شروع تقریب سے اُس دن تک اور دنوں کی تعداد آخر تقریب سے اُس دن تک بالاشتراک جبکہ ہر دو صورتوں میں زیر بحث دن کو شامل کیا جائے۔ تین دنوں میں بالترتیب ۶ و ۵ و ۳ دوڑیں ہوئیں۔ معلوم کرو کہ یہ کون سے دن تھے اور تقریب کتنے دن رہی؟

۱۹۔ کسی ہیرے کی قیمت اُس کے وزن کے مجذور کے موافق بدلتی ہے تین سونے کی انگوٹھیاں وزن میں برابر ہیں اور ان میں ہیرے جڑے ہوئے ہیں۔ انگوٹھیوں کی قیمتیں جداگانہ ا پونڈ و ب پونڈ و ج پونڈ ہیں اور انکے ہیروں کے اوزان بالترتیب ۳ و ۴ و ۵ رتی ہیں۔ ثابت کرو کہ ایک رتی ہیرے کی قیمت $\left(\frac{ا+ج}{۲} - ب\right)$ پونڈ ہے اگر لاگت سب انگوٹھیوں کی یکساں ہو۔

۲۰۔ دو شخصوں کے وظیفے اُن کی ملازمت کی مدتوں کے جذر کے متناسب ہیں ایک نے دوسرے کی نسبت ۹ سال زیادہ خدمت کی ہے اور اُس کا وظیفہ دوسرے کے وظیفہ سے ۵۰ روپیہ زیادہ ہے۔ اگر پہلے شخص کی ملازمت کی مدت دوسرے کی مدت ملازمت سے $۴\frac{۱}{۴}$ سال زیادہ ہوتی تو انکے وظیفوں میں نسبت ۹ : ۸ کی ہوتی معلوم کرو کہ انھوں نے کتنے سال خدمت کی ہے اور اُن کے وظیفے جداگانہ کیا کیا ہیں؟

۲۱۔ کسی سیارہ کی کشش اپنے چاندوں پر بدلتی ہے بالاستقامت اُس کی مقدار مادہ (م) کے۔ اور بدلتی ہے بالعکس فاصلہ (د) کے مجذور کے۔ نیز کسی چاند کے عرصہ گردش کا مجذور بدلتا ہے بالاستقامت اسکے بُعد کے اور بالعکس کشش تجاذب کے۔

اگر م و د و ت کی مطابق قیمتیں $م_۱$ و $د_۱$ و $ت_۱$ اور $م_۲$ و $د_۲$ و $ت_۲$ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{م_۱ ت_۱^۲}{م_۲ ت_۲^۲} = \frac{د_۱^۳}{د_۲^۳}$$

اس نتیجہ کو استعمال کرنے سے مشتری (جیپیٹر) کے اُس چاند کا عرصہ گردش معلوم کرو جس کے فاصلے کو ہمارے چاند کے فاصلے سے نسبت ۳۵ : ۳۱ کی ہے۔ اور یہ معلوم ہے کہ مشتری کی مقدارِ مادہ زمین کی مقدار مادہ کی ۳۴۳ گنی ہے اور ہمارے چاند کا عرصہ گردش ۲۷۶۳۲ دن ہے۔

۲۲۔ کسی انجن میں کوئلہ کا خرچ رفتار کے مجذور کے موافق بدلتا ہے جب رفتار ۱۶ میل فی گھنٹہ ہو تو ایک گھنٹہ میں ۲ ٹن کوئلہ صرف ہوتا ہے اگر ایک ٹن کوئلہ کی قیمت ۱۰ شلنگ ہو اور انجن پر دوسرے اخراجات ۱۱ شلنگ ۳ پنس فی گھنٹہ ہوں تو ۱۰۰ میل سفر کی کم سے کم لاگت دریافت کرو

باب چہارم

سلسلہ حسابیہ

۴۶ - **تعریف** - جبر مقابلہ میں جب مقادیر اس طرح منسلک ہوں کہ اُن کا باہمی تعلق کسی قانون کے مطابق ہو تو ایسی مقادیر کو **سلسلہ** کہتے ہیں -

مگر بعض اوقات **مجموعہ** متعدد ارقام کو جن میں سے ہر ایک رقم کسی قانون مشترک کے مطابق مرتب کی گئی ہو سلسلہ کہتے ہیں -

مثلاً فرض کرو کہ ج (ن) کوئی جملہ ن کا ہے تب

ج (۱) + ج (۲) + ج (۳) + ... + ج (ر) + ... + ج (ن) .... (۱)

کو سلسلہ کہیں گے -

ج (۱) کو پہلی رقم اور ج (۲) کو دوسری رقم ..... اور ج (ر) کو ر ویں رقم کہتے ہیں آیندہ **رقم عامہ** کو ہم ر ویں یا ع ویں رقم سے تعبیر کریں گے - فی الحال ہم ایسے سلسلوں پر غور کرینگے جن میں تعداد ارقام (ن) محدود ہو -

فرض کرو کہ ج (ن) = ن تب ہمیں سلسلہ ذیل حاصل ہوگا

۱ + ۲ + ۳ + ... + ن (۲)

اگر ج (ن) = ۱ / (ا + ب ن) تو سلسلہ حاصل ہوگا -

$$\frac{1}{ا+ب} + \frac{1}{ا+۲ب} + \frac{1}{ا+۳ب} + \cdots + \frac{1}{ا+رب} + \cdots + \frac{1}{ا+ن ب} \quad (۳)$$

اگر $ج(ن) = \frac{\lfloor ن}{۲ - \lfloor ن}$ تو سلسلہ ذیل حاصل ہوگا۔

$$\frac{\lfloor ۱}{۲-\lfloor ۱} + \frac{\lfloor ۲}{۲-\lfloor ۲} + \frac{\lfloor ۳}{۲-\lfloor ۳} + \cdots + \frac{\lfloor ر}{۲-\lfloor ر} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{\lfloor ن}{۲-\lfloor ن} \quad (۴)$$

اس سے ظاہر ہے کہ جب کسی سلسلہ کی ن ویں رقم معلوم ہو تو ہم باقی سب ارقام ن کی جگہ متواتر ا و ۲ و ۳ ..... رکھنے سے حاصل کرسکتے ہیں۔ مثلاً اگر ن ویں رقم $= ن^۲ + ۲ن$ تو سلسلہ کی صورت تفصیلی یہ ہوگی۔

$$(۱^۲ + ۲ \times ۱) + (۲^۲ + ۲ \times ۲) + (۳^۲ + ۲ \times ۳) + \cdots + (ن^۲ + ۲ن)$$

$$یا\ ۳ + ۸ + ۱۵ + \cdots\cdots + (ن^۲ + ۲ن)$$

مگر یہ کہنا درست نہیں کہ جب پہلی چند رقمیں دی ہوئی ہوں تو اُن سے رقم عامہ یا ن ویں رقم دریافت ہوسکتی ہے خصوصاً جبکہ اُس رقم کی صورت کے متعلق اور کچھ بھی معلوم نہ ہو اس امر کی توضیح آخری سلسلہ کی دوسری صورت سے بخوبی ہوسکتی ہے۔ جہاں پہلی چند رقموں میں سلسلہ کا قانونِ ترکیب بالکل ضائع ہو چکا ہے۔

۴۷۔ تعریف۔ کسی فرق مشترک سے گھٹنے یا بڑھنے والے سلسلہ مقادیر کو **سلسلہ حسابیہ** کہتے ہیں۔ اس قسم کے سلسلہ میں ہر ایک رقم رقم ماقبل پر ایک مستقل مقدار (خواہ یہ مقدار مثبت ہو یا منفی)

زیادہ کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

اس مستقل مقدار کو فرق عام یا **فرق مشترک** کہتے ہیں۔

فرق مشترک = دوسری رقم - پہلی رقم = تیسری رقم - دوسری رقم

= چوتھی رقم - تیسری رقم اور علیٰ ہذا القیاس

۳ و ۷ و ۱۱ و ۱۵ و .... سلسلہ حسابیہ ہے جسکا فرق مشترک ۴ ہے

۸ و ۲ و -۴ و -۱۰ و ..... " " " -۶ "

لا و ۵ لا و ۹ لا و ۱۳ لا و .... " " " ۴ لا "

ا و ا ± د و ا ± ۲ د و ا ± ۳ د و ... " " " ± د "

ا و ا + ف و ا + ۲ ف و ا + ۳ ف و ... " " " + ف "

۴۸ - کسی سلسلہ حسابیہ کی ن ویں رقم دریافت کرو جب رقم اول اور فرق مشترک معلوم ہوں۔

اگر سلسلہ ا و ا + ف و ا + ۲ ف و ا + ۳ ف و ..... کا بغور ملاحظہ کیا جائے تو معلوم ہوگا کہ ہر ایک رقم میں ف کا سر یا مکرر عددی تعداد ارقام سے جو اس رقم تک ہو بقدر ایک کے کم ہے مثلاً

تیسری رقم = ا + ۲ ف

چوتھی " = ا + ۳ ف

بیسویں " = ا + ۱۹ ف

اور بالعموم ع ویں رقم = ا + (ع - ۱) ف

اگر رقموں کی کل تعداد ن ہو اور خ سے آخری رقم تعبیر کی جائے

تو خ = ا + (ن - ۱) ف ...... (۱)

مثال ۱ - سلسلہ ۱۰ و ۸ و ۶ و ۴ و ...... کی ۱۹ ویں رقم دریافت کرو

پہلی رقم = ۱۰ اور فرق مشترک = -۲

اسلئے ۱۹ ویں رقم = ۱۰ + (۱۹ - ۱) × (-۲) = ۱۰ - ۲×۱۸

= -۲۶

مثال ۲ - سلسلہ ۵ و ۷ و ۹ و ۱۱ وغیرہ کی کونسی رقم ۲۵ کے برابر ہے؟

فرض کرو کہ سلسلہ کی ر ویں رقم مطلوبہ ہے۔

تب ۲۵ = ۵ + (ر - ۱) × ۲ = ۳ + ۲ر جس سے ر = ۱۱

پس معلوم ہوا کہ سلسلہ معلومہ کی ۱۱ ویں رقم = ۲۵

مثال ۳ - سلسلہ (ن ا - ب) + (ن - ۱) ا + [(ن - ۲) ا + ب] + ... کی ۸ ویں رقم اور ۲ن ویں رقم دریافت کرو

پہلی رقم = ن ا - ب و فرق مشترک = (ن - ۱) ا - (ن ا - ب)

= [(ن - ۲) ا + ب] - (ن - ۱) ا = ب - ا

۸ ویں رقم = ن ا - ب + (۸ - ۱) (ب - ا)

= ن ا - ب + ۷ ب - ۷ ا = ا (ن - ۷) + ۶ ب

۲ ن ویں رقم = ن ا - ب + (۲ ن - ۱) (ب - ا)

= ن ا + (۲ ن - ۱) ب - ا (۲ ن - ۱) - ب

= ا (۱ - ن) + ۲ (ن - ۱) ب = (۲ ب - ا) (ن - ۱)

مثال ۴ - سلسلہ ۹ و ۱۱ و ۱۳ و ۱۵ وغیرہ کی کونسی ارقام ۶۵ و ۹۹ و ۶ ن - ۱۳ اور ۵ (۲ پ + ۳) ہیں؟ **جواب** - ۲۹ ویں و ۴۶ ویں و (۳ ن - ۱۰) ویں و (۵ پ + ۴) ویں

مثال ۵ - کسی سلسلہ حسابیہ میں کل ۲۵ رقمیں ہیں آخری رقم ۷۵ ہے

اور فرق مشترک ۳ اسکی پہلی رقم دریافت کرو جواب ۳

مثال ۶ ـ ثابت کرو کہ کسی سلسلہ حسابیہ میں شروع اور آخیر سے دو متساوی الابعاد رقموں کا مجموعہ پہلی اور آخری رقم کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے

۴۹ ـ سلسلہ حسابیہ میں متعدد ارقام کا مجموعہ دریافت کرو ۔

فرض کرو کہ ا = رقم اول وف = فرق مشترک ون = تعداد ارقام وخ = آخری رقم اور ص = ن ارقام کا حاصل جمع تب

ص = ا + (ا + ف) + (ا + ۲ف) + ... + (خ − ۲ف) + (خ − ف) + خ

اگر اس سلسلے کی ترتیب الٹ دی جائے تو

ص = خ + (خ − ف) + (خ − ۲ف) + ... + (ا + ۲ف) + (ا + ف) + ا

دونوں سلسلوں کو جمع کرنے سے

۲ص = (ا + خ) + (ا + خ) + ... ن رقموں تک = ن (ا + خ)

∴ ص = $\frac{ن}{۲}$ (ا + خ) .... (۱)

دفعہ ۴۸ سے ہمیں معلوم ہے کہ خ = رقم آخر = ا + (ن − ۱) ف

اسلئے ص = $\frac{ن}{۲}$ {۲ا + (ن − ۱) ف} ..... (۲)

مثال ۱ ـ سلسلہ ۵$\frac{۱}{۲}$ و ۶$\frac{۳}{۴}$ و ۸ وغیرہ کی ۱۷ رقموں کا مجموعہ دریافت کرو

اس مثال میں ا = ۵$\frac{۱}{۲}$ و ف = ۱$\frac{۱}{۴}$ اور ن = ۱۷ نتیجہ مندرجہ بالا (۲) سے

ص = $\frac{۱۷}{۲}$ {$\frac{۱۱}{۲}$ × ۲ + $\frac{۵}{۴}$ × ۱۶} = $\frac{۱۷}{۲}$ (۱۱ + ۲۰)

= $\frac{۱۷ × ۳۱}{۲}$ = ۲۶۳$\frac{۱}{۲}$

مثال ۲ - سلسلہ ۱+۲+۳+۴+.... کا مجموعہ ۱۰۰ رقموں تک دریافت کرو

سلسلہ کی آخری رقم = ۱۰۰

اسلئے مجموعہ مطلوبہ = $\frac{۱۰۰}{۲}$ (۱ + ۱۰۰) = ۵۰ × ۱۰۱ = ۵۰۵۰

مثال ۳ - کسی سلسلہ حسابیہ کی ۵ رقموں کا مجموعہ ۳۵ ہے اسکی رقم متوسط دریافت کرو -

سلسلہ حسابیہ کی پانچ رقموں کے مجموعہ کو نہایت مختصر صورت میں لانے کے لئے ان ارقام کو اس طرح لکھو ا - ۲ف و ا - ف و ا و ا + ف و ا + ۲ف

اس صورتمیں ۵ا = مجموعہ = ۳۵ اسلئے رقم متوسط = ا = ۷

مثال ۴ - ایک سلسلہ کی پہلی رقم ۵ آخری رقم ۴۵ اور حاصل جمع ۴۰۰ ہے کل رقموں کی تعداد اور فرق مشترک معلوم کرو -

اگر تعداد ارقام ن ہو تو قانون جبیریہ ص = $\frac{ن}{۲}$ (ا + خ) سے جہاں ص حاصل جمع ہے اور خ آخری رقم   ۴۰۰ = $\frac{ن}{۲}$(۵ + ۴۵)

∴ ن = ۱۶

اگر فرق مشترک ف ہو تو ۴۵ = ۱۶ ویں رقم = ۵ + ۱۵ ف

∴ ف = ۲ $\frac{۲}{۳}$

مثال ۵ - سلسلہ $\frac{ن-۱}{ن}$ + $\frac{ن-۳}{ن}$ + $\frac{ن-۵}{ن}$ + ... کا مجموعہ ن رقموں تک دریافت کرو

فرق مشترک = $\frac{ن-۳}{ن}$ - $\frac{ن-۱}{ن}$ = - $\frac{۲}{ن}$ و پہلی رقم = $\frac{ن-۱}{ن}$

اور ص = $\frac{ن}{۲}$ {۲ا + ف (ن - ۱)} بموجب نتیجہ (۲)

∴ ص = $\frac{ن}{۲}$ { $\frac{۲(ن-۱)}{ن}$ + (ن - ۱) × - $\frac{۲}{ن}$ }

$$= \frac{ن}{۲}\left\{\frac{۴(ن-۱)}{ن} - \frac{۲(ن-۱)}{ن}\right\} = \frac{ن}{۲} \times ۰ = ۰$$

مثال ۶ ـ سلسلہ حسابیہ کی ۵۴ ویں اور چوتھی رقمیں بالترتیب ۶۱- اور ۶۴ ہیں ۲۳ ویں رقم معلوم کرو۔

اگر ا پہلی رقم ہو اور ف فرق مشترک تو

۶۱- = ۵۴ ویں رقم = ا + ۵۳ ف

۶۴ = چوتھی رقم = ا + ۳ ف

جس سے معلوم ہوا کہ ف = $-\frac{۵}{۲}$ اور ا = $۷۱\frac{۱}{۲}$

اور ۲۳ ویں رقم = ا + ۲۲ ف = $۱۶\frac{۱}{۲}$

نوٹ ـ اس سے معلوم ہوا کہ اگر سلسلہ حسابیہ کی دو رقمیں معلوم ہوں۔ تو تمام سلسلہ مکمل طور پر معلوم ہوسکتا ہے جیساکہ مثال مندرجہ بالا سے ظاہر ہے۔

۵۰ ـ اواسط حسابیہ

تعریف ۱ ـ جب تین مقادیر سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو درمیانی مقدار کو دوسری دو کا **اوسط حسابی** کہتے ہیں۔ مثلاً ۵ اوسط حسابی ہے ۳ اور ۷ کے درمیان ا اوسط حسابی ہے ا - ف و ا + ف کے درمیان

تعریف ۲ ـ اگر ا اور ب کوئی دو مقادیر ہوں اور $لا_{۱}$ و $لا_{۲}$ و $لا_{۳}$ و $لا_{۴}$ .... $لا_{ن-۱}$ و $لا_{ن}$ کئی ایک ایسی مقادیر ہوں کہ ا و $لا_{۱}$ و $لا_{۲}$ و $لا_{۳}$ و... $لا_{ن-۱}$ و $لا_{ن}$ و ب ایک سلسلہ حسابیہ ہو تو مقادیر $لا_{۱}$ و $لا_{۲}$ و $لا_{۳}$ و... و $لا_{ن}$ کو ا اور ب کے اواسط حسابیہ کہیں گے مثلاً ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ اواسط حسابیہ

ہیں ۲ اور ۸ کے درمیان اور اسی طرح سے اعداد ۳$\frac{1}{2}$ و ۵ و ۶$\frac{1}{2}$ اواسط حسابیہ ہیں انہی اعداد ۲ اور ۸ کے درمیان کیونکہ ہر دو سلسلے ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ اور ۲ و ۳$\frac{1}{2}$ و ۵ و ۶$\frac{1}{2}$ و ۸ حسابی سلسلے ہیں

نوٹ ۔ مندرجہ بالا مثالوں سے ظاہر ہے کہ دو مقادیر کے درمیان اواسط حسابیہ کے مختلف نظام غیرمحدود ہیں ۔

۵۱ ۔ دو مقادیر معلومہ ا اور ب کا اوسط حسابی دریافت کرو ۔

فرض کرو کہ لا اوسط حسابی ہے اسلئے ا و لا و ب سلسلہ حسابیہ میں ہیں ۔

$$\text{لا} - \text{ا} = \text{ب} - \text{لا} \quad \text{یعنی}\ ۲\,\text{لا} = \text{ا} + \text{ب}$$

$$\therefore \text{لا} = \frac{\text{ا} + \text{ب}}{۲}$$

مثال ۔ $\frac{1}{4}$ اور $\frac{1}{2}$ کا اوسط حسابی $= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2} = \frac{\frac{3}{4}}{2} = \frac{3}{8}$

۵۲ ۔ دو مقادیر معلوم کے درمیان متعدد اواسط حسابیہ مندرج کرو ۔

فرض کرو کہ ا اور ب مقادیر معلوم ہیں اور انکے درمیان ن اواسط حسابیہ مندرج کرنی ہیں ۔ اگر ا اور ب کو بھی شامل کیا جائے تو کل ارقام مع ن اواسط حسابیہ کے ن + ۲ ہونگی ۔ اب ہمیں ایک ایسا سلسلہ حسابیہ معلوم کرنا ہے جس میں ن + ۲ ارقام ہوں اور جس کی ا پہلی اور ب آخری رقم ہو

اگر فرق مشترک = ف تو ب = (ن + ۲) ویں رقم

$$= \text{ا} + (\text{ن} + ۱)\,\text{ف}$$

$$\therefore \text{ف} = \frac{\text{ب} - \text{ا}}{\text{ن} + ۱}$$

اسلئے اوساط مطلوبہ ہیں $ا + \frac{ب - ا}{ن + ۱}$ و $ا + \frac{۲(ب - ا)}{ن + ۱}$

و $ا + \frac{۳(ب - ا)}{ن + ۱}$ و ...... $ا + \frac{ن(ب - ا)}{ن + ۱}$

مثال ۱ - ۴ اور ۶۷ کے درمیان ۲۰ اوساط حسابیہ مندرج کرو۔

یہاں تعداد ارقام ۲۲ ہے اسلئے ۶۷ = ۴ + ۲۱ ف اگر ف فرق عام ہو

∴ ف = ۳ اور سلسلہ ۴ و ۷ و ۱۰ و ..... ۶۱ و ۶۴ و ۶۷ ہے

اسلئے اوساط مطلوبہ ۷ و ۱۰ و ۱۳ و ..... ۶۱ و ۶۴ ہیں

مثال ۲ - کسی سلسلہ حسابیہ میں رقموں کی تعداد طاق ہے ثابت کرو کہ درمیانی رقم کا دوچند پہلی اور آخری رقم کے مجموعے کے برابر ہے

چونکہ تعداد ارقام طاق ہے اسلئے اس کو ۲ ن + ۱ سے تعبیر کرسکتے ہیں۔ صریحاً درمیانی رقم کے دونوں طرف ن ارقام ہیں۔ اسلئے یہ شروع اور آخر سے (ن + ۱) ویں رقم ہے۔ فرض کرو کہ رقم متوسط م ہے۔

اسلئے $م = ا + (\overline{ن + ۱} - ۱)$ ف جہاں ف فرق شترک ہے

$= ا + ن ف$ ......(۱)

نیز $م = خ + (\overline{ن + ۱} - ۱)(- ف)$ جہاں خ رقم آخر ہے

$= خ - ن ف$ ......(۲)

اسلئے جمع کرنے سے ۲ م = ا + خ

مثال ۳ - ثابت کرو کہ سلسلہ حسابیہ میں رقموں کی طاق تعداد کا مجموعہ درمیانی رقم اور تعداد ارقام کے حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے

فرض کرو کہ ۲ ن + ۱ = تعداد ارقام

رقموں کا مجموعہ = $\frac{۲ن + ۱}{۲}$ (ا + خ) جہاں ا اور خ بالترتیب پہلی اور آخری رقمیں ہیں۔

= $\frac{۲ن + ۱}{۲}$ × ۲ م [بموجب مثال سابق]

=(۲ن + ۱) × م

مثال ۴ ۔ ۱ اور ۱۹ کے درمیان اوساط حسابیہ کی تعداد دریافت کرو جبکہ دوسرے اوسط کی نسبت اوسط آخر سے ۱ : ۶ ہو۔

فرض کرو ف = فرق مشترک اور ن = تعداد اوساط اور دوسرا اوسط = ۱ + ۲ ف اور آخر کا یعنی ن واں اوسط = ۱۹ ۔ ف

اسلئے $\frac{۱ + ۲ف}{۱۹ - ف}$ = $\frac{۱}{۶}$ جس سے ۱۳ف = ۱۳ یا ف = ۱

اب چونکہ ۱۹ سلسلہ کی (ن + ۲) ویں رقم ہے اسلئے

۱۹ = ۱ + (ن + ۱) ف = ن + ۲

اسلئے ن = ۱۷

مثال ۵ ۔ ۱ اور ۲۱ کے درمیان اوساط حسابیہ کا ایک ایسا سلسلہ دریافت کرو جس میں اوساط کے مجموعے کی نسبت دو سب سے بڑی اوسطوں کے مجموعے سے ۱۱ : ۴ ہو۔ جواب ۹ اوساط ۳، ۵، ۷، وغیرہ ۱۹

مثال ۶ ۔ ثابت کرو کہ کسی سلسلہ حسابیہ کی (م ۔ ن) ویں اور (م + ن) ویں رقموں کا مجموعہ م ویں رقم کا دوچند ہوتا ہے۔

مثال ۷ ۔ کسی سلسلہ حسابیہ کی (ن + ۱) ویں رقم $\frac{م ا - ن ب}{ا - ب}$ ہے (۲ن + ۱) رقموں تک سلسلے کا مجموعہ دریافت کرو۔

جواب $\frac{م ا - ن ب}{ا - ب}$ (۲ ن + ۱)

۵۳ - اگر ن ارقام کا مجموعہ معلوم ہو تو سلسلہ کی کوئی سی رقم دریافت کرو۔

مفصلہ ذیل مثالیں اسی ترکیب عمل کی توضیح کے لئے منتخب کی گئی ہیں۔

مثال ۱۔ کسی سلسلے کی ن ارقام کا مجموعہ = ۵ $ن^۲$ + ۳ ن اُس کی پہلی پانچ رقمیں دریافت کرو۔

فرض کرو کہ $ق_۱$ و $ق_۲$ و $ق_۳$ و .... $ق_ن$ بالترتیب سلسلہ کی پہلی و دوسری و تیسری و .... ن ویں رقموں کو تعبیر کرتے ہیں اور فرض کرو کہ $ص_۱$ و $ص_۲$ و $ص_۳$ ...... $ص_ن$ بالترتیب سلسلہ کی ۱ و ۲ و ۳ .... ن رقموں کے مجموعوں کو تعبیر کرتے ہیں۔

صریحاً $ص_۱$ = $ق_۱$ اور $ص_۲$ = $ق_۱$ + $ق_۲$ اور $ص_۳$ = $ق_۱$ + $ق_۲$ + $ق_۳$ وغیرہ۔

بموجب شرائط سوال $ص_ن$ = ۵ $ن^۲$ + ۳ ن

اسلئے فرض کرو کہ ن = ۱ تو $ص_۱$ = ۵ + ۳ = ۸

" ن = ۲ " $ص_۲$ = ۲۰ + ۶ = ۲۶

" ن = ۳ " $ص_۳$ = ۴۵ + ۹ = ۵۴

" ن = ۴ " $ص_۴$ = ۸۰ + ۱۲ = ۹۲

" ن = ۵ " $ص_۵$ = ۱۲۵ + ۱۵ = ۱۴۰ اور علیٰ ہذالقیاس۔

اسلئے $ق_۱$ = $ص_۱$ = ۸

$ق_۲$ = $ص_۲$ - $ص_۱$ = ۲۶ - ۸ = ۱۸

$$\text{ق}_{۳} = \text{ص}_{۳} - \text{ص}_{۲} = ۵۴ - ۲۶ = ۲۸$$

$$\text{ق}_{۴} = \text{ص}_{۴} - \text{ص}_{۳} = ۹۲ - ۵۴ = ۳۸$$

$$\text{ق}_{۵} = \text{ص}_{۵} - \text{ص}_{۴} = ۱۴۰ - ۹۲ = ۴۸$$

اور علیٰ ہذا القیاس۔

پس سلسلہ کی پہلی ۵ رقمیں ۸ و ۱۸ و ۲۸ و ۳۸ اور ۴۸ ہیں۔

مثال ۲۔ کسی سلسلہ حسابیہ کی ن ارقام کا مجموعہ $\text{ن}^{۲} + ۴\,\text{ن}$ ہے پہلی رقم اور فرق مشترک دریافت کرو

معلوم ہے $\text{ص}_{\text{ن}} = \text{ن}^{۲} + ۴\,\text{ن}$

فرض کرو کہ ن = ۱ تب $\text{ص}_{۱} = ۱ + ۴ = ۵$

اگر ن = ۲ تو $\text{ص}_{۲} = ۴ + ۸ = ۱۲$

اسلئے $\text{ق}_{۱} = \text{ص}_{۱} = ۵$

اور $\text{ق}_{۲} = \text{ص}_{۲} - \text{ص}_{۱} = ۱۲ - ۵ = ۷$

پس رقم اوّل = ۵ اور فرق مشترک = ۲

مثال ۳۔ خواہ ن کوئی قیمت اختیار کرے $\text{ص} = \text{پ}\,\text{ن} + \text{ر}\,\text{ن}^{۲}$ اس سلسلہ کی م ویں رقم دریافت کرو۔

$\text{ص}_{\text{ن}}$ (یعنی ن رقموں کا حاصل جمع) $= \text{پ}\,\text{ن} + \text{ر}\,\text{ن}^{۲}$

اسلئے $\text{ص}_{\text{ن}-۱} = \text{پ}(\text{ن} - ۱) + \text{ر}(\text{ن} - ۱)^{۲}$

$\therefore \text{ق}_{\text{ن}} = \text{ص}_{\text{ن}} - \text{ص}_{\text{ن}-۱} = \text{پ} + \text{ر}(۲\text{ن} - ۱)$

اسلئے م ویں رقم $= \text{پ} + \text{ر}(۲\text{م} - ۱)$

مثال ۵۔ ایک سلسلہ کی ن ویں رقم ۳ ن - ۱ ہے اُس کی

پہلی ع ارقام کا حاصل جمع دریافت کرو

پہلی رقم $= ۳ \times ۱ - ۱ = ۲$، آخری رقم $= ۳ع - ۱$

$\therefore$ حاصل جمع $= \frac{ع}{۲} \{ ۲ + ۳ع - ۱ \} = \frac{ع}{۲} (۳ع + ۱)$

امثلہ نمبری ۴

۱ - سلسلہ ۲ و $۳\frac{۱}{۴}$ و $۴\frac{۱}{۲}$ وغیرہ کا حاصل جمع ۲۰ رقموں تک دریافت کرو

۲ - ″ ″ ۴۹ و ۴۴ و ۳۹ ″ ″ ۱۷ ″ ″

۳ - ″ $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۷}{۱۲}$ ″ ″ ۱۹ ″ ″

۴ - ″ ۳ و $\frac{۷}{۳}$ و $۱\frac{۲}{۳}$ ″ ″ ن ″ ″

۵ - ″ ۳٫۷۵ و ۳٫۵ و ۳٫۲۵ و ....کا ۱۶ ″ ″

۶ - ″ $-۷\frac{۱}{۲}$ و -۷ و $-۶\frac{۱}{۲}$ و ......کا ″ ۲۴ ″ ″

۷ - ″ ۳٫۱ و $-۱٫۳$ و $-۵٫۷$ و ....کا ″ ۱۰ ″ ″

۸ - ″ $\frac{۶}{\sqrt{۳}}$ و $۳\sqrt{۳}$ و $\frac{۱۲}{\sqrt{۳}}$ و ....کا ″ ۵۰ ″ ″

۹ - ″ $\frac{۳}{\sqrt{۵}}$ و $\frac{۴}{\sqrt{۵}}$ و $\sqrt{۵}$ و .....کا ″ ۲۵ ″ ″

۱۰ - ″ $ا - ۳ب$ و $۲ا - ۵ب$ و $۳ا - ۷ب$ و ....کا ″ ۴۰ ″ ″

۱۱ - ″ $۲ا - ب$ و $۴ا - ۳ب$ و $۶ا - ۵ب$ و ....کا ″ ن ″ ″

۱۲ - ″ $\frac{ا + ب}{۲}$ و ا و $\frac{۳ا - ب}{۲}$ و .....کا ″ ۲۱ ″ ″

۱۳ - ″ $\frac{ن - ۱}{ن}$ و $\frac{ن - ۲}{ن}$ و $\frac{ن - ۳}{ن}$ و .....کا ″ ن ″ ″

۱۴ - سلسلہ $(ا + لا)^۲$ و $(ا^۲ + لا^۲)$ و $(ا - لا)^۲$ وغیرہ کا حاصل جمع ن رقموں تک دریافت کرو

۱۵- سلسلہ (ا - ب)/(ا + ب) ، (۳ا - ۲ب)/(ا + ب) ، (۵ا - ۳ب)/(ا + ب) وغیرہ کا حاصل جمع ن رقموں تک دریافت کرو

۱۶- ۱۹ اوساط حسابیہ ۱/۴ اور -۹ ۳/۴ کے درمیان مندرج کرو

۱۷- ۱۷ " ۳ ۱/۲ " - ۴۱ ۱/۲ " "

۱۸- ۱۸ " -۵۳لا " ۳لا " "

۱۹- لا " لا^{۲} " ا " "

۲۰- کسی سلسلے کی ن رقموں کا مجموعہ ۲ن^{۲} + ۷ن ہے اسکی پہلی ۵ رقمیں دریافت کرو

۲۱- " ن " ۲ن^{۲} ہے اسکی پہلی رقم اور فرق مشترک دریافت کرو

۲۲- " ن " ن^{۳}+ن^{۲}+۱ ہے اسکی پہلی تین رقمیں دریافت کرو

۲۳- " ن " ۳ن^{۲}+۱۰ن ہے رقم اول اور فرق مشترک "

۲۴- " ن " ن^{۲}+ن ہے اسکی ۳۵ ویں رقم دریافت کرو

۲۵- پہلے ن طاق طبعی اعداد کا مجموعہ دریافت کرو -

۲۶- کسی سلسلہ حسابیہ میں پہلی رقم = ۲، آخری رقم = ۲۹ اور مجموعہ = ۱۵۵ فرق مشترک معلوم کرو -

۲۷- سلسلہ حسابیہ کی ۱۵ رقموں کا مجموعہ ۶۰۰ ہے اور فرق مشترک ۵ ہے رقم اول معلوم کرو -

۲۸- سلسلہ حسابیہ کی تیسری رقم ۱۸ ہے اور ساتویں رقم ۳۰ ہے ۱۷ رقموں کا مجموعہ دریافت کرو -

۲۹- تین اعداد سلسلہ حسابیہ میں ہیں اُن کا حاصل جمع = ۲۷ اور اُن کا حاصل ضرب = ۵۰۴ اُنہیں معلوم کرو

۳۰- تین اعداد سلسلہ حسابیہ میں ہیں اُن کا حاصل جمع ۱۲ ہے اور

اُن کے مکعبوں کا حاصل جمع ۴۰۸ ہے اُنہیں دریافت کرو۔

۳۱۔ کسی سلسلہ کی ن ویں رقم ۴ ن + ۱ ہے اُس کی ۱۵ رقموں کا مجموعہ دریافت کرو۔

۳۲۔ کسی سلسلہ کی ع ویں رقم $\frac{ع}{۲} + ۲$ ہے اُس کی ۳۵ رقموں کا مجموعہ دریافت کرو۔

۳۳۔ کسی سلسلہ کی ن ویں رقم $\frac{ن}{ا} + ب$ ہے اُس کی ع رقموں کا مجموعہ دریافت کرو۔

۳۴۔ سلسلہ $\frac{۲ا^۲ - ۱}{ا}$ ، $۴ا - \frac{۳}{ا}$ ، $\frac{۶ا^۲ - ۵}{ا}$ وغیرہ کا ن رقموں تک مجموعہ دریافت کرو۔

۵۴۔ اگر کسی سلسلہ حسابیہ میں ص و ا و ف کی قیمتیں دی ہوئی ہوں تو ن کی قیمت دریافت کرنے کے لئے ہمیں ایک مساوات درجہ دوم حل کرنی پڑتی ہے

اس طرح پر کہ $ص = \frac{ن}{۲}\{۲ا + (ن - ۱)ف\}$

یا $۲ص = ۲ا ن + ف ن^۲ - ف ن$

یا $ن^۲ + \frac{۲ا - ف}{ف} ن = \frac{۲ص}{ف}$

یہ ایک مساوات درجہ دوم ہے اور اس سے ن کی دو قیمتیں ملیں گی اگر ایک مثبت ہو اور دوسری منفی تو صرف قیمتِ مثبت کام کی ہے اور اگر دونوں مثبت ہوں تو معلوم ہوا کہ دو مجموعاتِ مقادیر ایسے ہیں کہ شرائط سوال کو پورا کرتے ہیں۔

مثال ۱۔ ایک سلسلہ حسابیہ کا حاصل جمع ۵۴ ہے۔ پہلی رقم ۱۴ اور

فرق مشترک -۲ ہے اس کی تعداد ارقام دریافت کرو ۔

$$\text{ص} = \frac{\text{ن}}{\text{۲}}\left\{\text{۲ا} + \text{ف}\,(\text{ن} - \text{۱})\right\} \text{ یعنی } \text{۲ص} = \text{ن}\left\{\text{۲ا} + \text{ف}\,(\text{ن} - \text{۱})\right\}$$

اسلئے

$$\text{۱۰۸} = \text{ن}\left\{\text{۲۸} - \text{۲}\,(\text{ن} - \text{۱})\right\} \text{ یا } \text{۱۰۸} = \text{۲۸ن} - \text{۲ن}^{\text{۲}} + \text{۲ن}$$

$$\text{یعنی}\quad \text{ن}^{\text{۲}} - \text{۱۵ن} + \text{۵۴} = \text{۰}$$

$$\text{یا}\quad \left(\text{ن} - \frac{\text{۱۵}}{\text{۲}}\right)^{\text{۲}} + \text{۵۴} - \frac{\text{۲۲۵}}{\text{۴}} = \text{۰}$$

$$\text{یا}\quad \text{ن} - \frac{\text{۱۵}}{\text{۲}} = \pm \frac{\text{۳}}{\text{۲}}$$

$$\therefore\quad \text{ن} = \text{۹ یا ۶}$$

اگر سلسلے کی تمام رقمیں بالتفصیل لکھی جائیں ۱۴ و ۱۲ و ۱۰ و ۸ و ۶ و ۴ و ۲ و ۰ و -۲ ..... تو معلوم ہوگا کہ ۶ رقموں کا مجموعہ ۵۴ ہے اور چونکہ آخری تین رقموں کا مجموعہ صفر ہے اسلئے نو رقموں کا مجموعہ بھی ۵۴ ہے

مثال ۲ - کتنی رقمیں سلسلہ -۹ و -۶ و -۳ و .... کی لی جائیں کہ حاصل جمع ۶۶ ہو؟

$$\text{یہاں}\quad \frac{\text{ن}}{\text{۲}}\left\{-\text{۱۸} + (\text{ن} - \text{۱})\,\text{۳}\right\} = \text{۶۶}$$

$$\text{یعنی}\quad \text{ن}^{\text{۲}} - \text{۷ن} - \text{۴۴} = \text{۰} \text{ یا } (\text{ن} - \text{۱۱})(\text{ن} + \text{۴}) = \text{۰}$$

$$\therefore\quad \text{ن} = \text{۱۱ یا } -\text{۴}$$

اگر ہم سلسلہ کی ۱۱ رقمیں لیں یعنی -۹ و -۶ و -۳ و ۰ و ۳ و ۶ و ۹ و ۱۲ و ۱۵ و ۱۸ و ۲۱ تو صریحاً انکا حاصل جمع ۶۶ ہے اگر ہم آخری رقم سے شروع کریں اور پیچھے کی طرف ۴ رقمیں گنیں تو بھی حاصل جمع ۶۶ ہے اس سے معلوم ہوا کہ اگرچہ ن کی منفی قیمت ہمارے سوال کا پورا جواب نہیں ہے مگر پھر بھی اسے ہم قابل فہم معنی دے سکتے ہیں جیسا کہ دفعہ ذیل سے ظاہر ہے ۔

۵۵ - اس نتیجہ کی تحقیق صورت عامہ میں اس طرح ہو سکتی ہے - ن کی قیمت معلوم کرنے کے لئے مساوات ذیل ہے

ف ن^{۲} + (۲ ا - ف) ن - ۲ ص = ۰ .... (۱)

اس سے ہمیں ن کی دو قیمتیں ملیں گی - چونکہ فی الحال زیر بحث وہی عمل ہے جس میں ن کی ایک قیمت مثبت ہے دوسری منفی ہم ان کو ن$_{۱}$ اور -ن$_{۲}$ سے تعبیر کریں گے -

سلسلہ کی ن$_{۱}$ ویں رقم = ا + (ن$_{۱}$ - ۱) ف

اگر ہم اس رقم سے شروع ہو کر پیچھے کی طرف گنیں تو فرق عام - ف ہوگا اور ن$_{۲}$ ارقام کا مجموعہ

= ن$_{۲}$/۲ {۲(ا + $\overline{\text{ن}_{۱} - ۱}$ ف) + (ن$_{۲}$ - ۱)(- ف)}

اب ہم ثابت کریں گے کہ یہ ص کے برابر ہے -

جملہ = ن$_{۲}$/۲ {۲ ا + (۲ ن$_{۱}$ - ن$_{۲}$ - ۱) ف}

= ۱/۲ {۲ ا ن$_{۲}$ + ۲ ن$_{۱}$ ن$_{۲}$ ف - ن$_{۲}$(ن$_{۲}$ + ۱) ف}

= ۱/۲ {۲ ن$_{۱}$ ن$_{۲}$ ف - (ف ن$_{۲}^{۲}$ - $\overline{۲ \text{ا} - \text{ف}}$ ن$_{۲}$)}

= ۱/۲ (۴ ص - ۲ ص) = ص کیونکہ ن$_{۲}$ مساوات ف ن^{۲} + (۲ ا - ف) ن - ۲ ص = ۰ کی ایک قیمت ہے اور - ن$_{۱}$ ن$_{۲}$ اس مساوات کی دونوں قیمتوں کا حاصل ضرب ہے

نوٹ - اگر ن کی قیمت کسری ہو تو اس حل کے مطابق رقموں کی کوئی تعداد شرائط سوال کو پورا نہیں کریگی -

مثال ۱ - کتنی رقمیں سلسلہ ۲۶ ، ۲۱ ، ۱۶ ..... کی لی جائیں کہ حاصل جمع ۷۴ ہو؟

یہاں ن/۲ {۵۲ + (ن - ۱)(- ۵)} = ۷۴

یعنی ۵ ن² - ۷۵ ن + ۱۴۸ = ۰

یا (ن - ۴)(۵ ن - ۳۷) = ۰

∴ ن = ۴ یا ۷ ۲/۵ ۔ یہاں تعداد ارقام ۴ ہے۔ نیز ظاہر ہے کہ اگر ۷ رقمیں سلسلہ کی لی جاویں تو حاصل جمع ۷۴ سے زیادہ ہے اور اگر ۸ لی جاویں تو کم۔

مثال ۲ - کسی سلسلہ حسابیہ کا مجموعہ ۷۲ ہے رقم اول ۱۷ ہے اور فرق مشترک -۲ تعداد ارقام دریافت کرو اور ہر دو جوابات کی تشریح سلسلہ کی صورت مفصلہ سے کرو۔ **جواب** ۶ یا ۱۲

مثال ۳ - سلسلہ -۸ ، -۶ ، -۴ وغیرہ کی کتنی رقموں کا مجموعہ ۵۲ ہوگا؟

جواب ۱۳ یا -۴

۵۶ - ہم اس جگہ سلسلہ حسابیہ کی چند متفرق مثالیں دیں گے۔

مثال ۱ - کسی سلسلہ حسابیہ کی پ ارقام کا مجموعہ ق ہے اور ق ارقام کا مجموعہ پ ہے - اس کی (پ + ق) رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو

فرض کرو کہ ا = رقم اول اور ف = فرق مشترک چونکہ پ رقموں کا مجموعہ = ق

اسلئے ق = پ/۲ {۲ا + (پ - ۱) ف}

یا ۲ق = پ × ۲ا + پ (پ - ۱) ف .... (۱)

اسی طرح سے ۲پ = ق × ۲ا + ق (ق - ۱) ف .... (۲)

(۱) سے (۲) کو تفریق کرنے سے

۲(ق - پ) = (پ - ق) ۲ا + {(پ۲ - ق۲) - (پ - ق)} ف

= (پ - ق) ۲ا + (پ - ق) (پ + ق - ۱) ف

∴ -۲ = ۲ا + (پ + ق - ۱) ف

اسلئے (پ + ق) رقموں کا حاصل جمع

= (پ + ق)/۲ × {۲ا + (پ + ق - ۱) ف}

= (پ + ق)/۲ × (-۲) = -(ب + ق)

مثال ۲ - کسی سلسلہ حسابیہ کی پ ویں رقم ا ہے اور ق ویں رقم ب ثابت کرو کہ پہلی (پ + ق) ارقام کا حاصل جمع = (پ + ق)/۲ {ا + ب + (ا - ب)/(پ - ق)}

فرض کرو کہ سلسلہ مجوزہ کی رقم اول = لا اور فرق مشترک = ما

تب ا = لا + (پ - ۱) ما

اور ب = لا + (ق - ۱) ما

اسلئے ا - ب = (پ - ق) ما .... (۱)

اور ا + ب = ۲لا + (پ + ق - ۲) ما .... (۲)

اسلئے (پ + ق) رقموں کا حاصل جمع

= (پ + ق)/۲ {۲لا + (پ + ق - ۱) ما}

= (پ + ق)/۲ {[۲لا + (پ + ق - ۲) ما] + ما}

= (پ + ق)/۲ {ا + ب + (ا - ب)/(پ - ق)}

مثال ۳ - دو حسابی سلسلوں کے مجموعات ن ارقام کی باہمی نسبت ۷ ن + ۱ : ۴ ن + ۲۷ ہے اُن کی ۱۱ ویں رقموں کی نسبت دریافت کرو۔

فرض کرو کہ دونوں سلسلوں کی پہلی رقمیں اور فرق مشترک بالترتیب $ا_۱$ و $ف_۱$ اور $ا_۲$ و $ف_۲$ ہیں۔

بموجب شرائط سوال $\frac{۲ ا_۱ + (ن - ۱) ف_۱}{۲ ا_۲ + (ن - ۱) ف_۲} = \frac{۷ ن + ۱}{۴ ن + ۲۷}$ اب ہمیں $\frac{ا_۱ + ۱۰ ف_۱}{ا_۲ + ۱۰ ف_۲}$ کی قیمت معلوم کرنی ہے۔ اسلئے فرض کرو کہ ن = ۲۱ اس سے حاصل ہوگا $\frac{۲ ا_۱ + ۲۰ ف_۱}{۲ ا_۲ + ۲۰ ف_۲} = \frac{۱۴۸}{۱۱۱} = \frac{۴}{۳}$ پس نسبت مطلوبہ ۴ : ۳ ہے۔

مثال ۴ - اگر $ص_۱$ و $ص_۲$ و $ص_۳$ ..... و $ص_پ$ مجموعات ن ارقام ایسے حسابیہ سلسلوں کے ہوں جن کی پہلی رقمیں ۱ و ۲ و ۳ و ۴ ... ہیں اور فرق مشترک ۱ و ۳ و ۵ و ۷ و... ہیں تو $ص_۱ + ص_۲ + ص_۳ + ... + ص_پ$ کی قیمت دریافت کرو۔

$$ص_۱ = \frac{ن}{۲}\left\{۲ + (ن - ۱)\right\} = \frac{ن(ن + ۱)}{۲}$$

$$ص_۲ = \frac{ن}{۲}\left\{۴ + (ن - ۱) ۳\right\} = \frac{ن(۳ ن + ۱)}{۲}$$

$$ص_۳ = \frac{ن}{۲}\left\{۶ + (ن - ۱) ۵\right\} = \frac{ن(۵ ن + ۱)}{۲}$$

$$ص_پ = \frac{ن}{۲}\left\{۲ پ + (ن - ۱)(۲ پ - ۱)\right\} = \frac{ن}{۲}\left\{(۲ پ - ۱) ن + ۱\right\}$$

اسلئے مجموعہ مطلوبہ $= \frac{ن}{۲}\left\{(ن + ۱) + (۳ ن + ۱) + ... + (\overline{۲ پ - ۱} \times ن + ۱)\right\}$

$$= \frac{ن}{۲}\{(ن + ۳ن + ۵ن + ... + \overline{۲پ-۱} \times ن) + پ\}$$

$$= \frac{ن}{۲}\{ن (۱ + ۳ + ۵ + ... + \overline{۲پ-۱}) + پ\}$$

$$= \frac{ن}{۲} (ن پ^۲ + پ) = \frac{ن پ}{۲} (ن پ + ۱)$$

مثال ۵ - اگر سلسلہ ۲ و ۵ و ۸ و .... اور سلسلہ ۳ و ۷ و ۱۱ .... کو سو سو ارقام تک مفصل لکھا جائے تو معلوم کرو کہ ان میں کتنی ارقام متماثل ہونگی
فرض کرو کہ پہلے سلسلہ کی لا ویں اور دوسرے سلسلہ کی ما ویں رقمیں متماثل ہیں -

تب ۲ + (لا - ۱) ۳ = ۳ + (ما - ۱) ۴ یا ۳ لا - ۱ = ۴ ما - ۱

اسلئے ۳ لا = ۴ ما یعنی $\frac{لا}{ما} = \frac{۴}{۳}$

اسلئے ضروری ہے کہ $\left\{\begin{matrix} لا = ۴ \\ ما = ۳ \end{matrix}\right\}$ یا $\left\{\begin{matrix} لا = ۸ \\ ما = ۶ \end{matrix}\right\}$ یا $\left\{\begin{matrix} لا = ۱۲ \\ ما = ۹ \end{matrix}\right\}$ اور علیٰ ہذا القیاس

پس معلوم ہوا کہ لا کی قیمتیں ہیں ۱ × ۴ و ۲ × ۴ و ۳ × ۴ و ۴ × ۴ اور علیٰ ہذا القیاس - اور چونکہ لا کی بڑی سے بڑی قیمت ۲۵ × ۴ ہوسکتی ہے اسلئے معلوم ہوا کہ لا اور ما کی قیمتوں کے ۲۵ زوج ہیں -

پس دونوں سلسلوں میں متماثل ارقام کی تعداد = ۲۵

مثال ۶ - اگر $ص_{ن}$ سے ایک سلسلہ حسابیہ کی ن ارقام کا حاصل جمع تعبیر ہو تو ثابت کرو کہ $ص_{ن+۳} - ۳ص_{ن+۲} + ۳ص_{ن+۱} - ص_{ن} = ۰$

فرض کرو کہ $ق_{ن}$ = ن ویں رقم اور ف = فرق مشترک

تب $ص_{ن+۳} - ۳ص_{ن+۲} + ۳ص_{ن+۱} - ص_{ن}$

$= (ص_{ن+۳} - ص_{ن+۲}) - ۲(ص_{ن+۲} - ص_{ن+۱}) + (ص_{ن+۱} - ص_{ن})$

= (ن + ۳) ویں رقم - ۲ {(ن + ۲) ویں رقم} + (ن + ۱) ویں رقم

$= ق_{ن+۳} - ۲ق_{ن+۲} + ق_{ن+۱} = (ق_{ن+۳} - ق_{ن+۲})$

$-(ق_{ن+۲} - ق_{ن+۱}) = ف - ف = ۰$

امثلہ نمبری ۵

۱ - معلوم ہے $ا = -۲$ و $ف = ۴$ و $ص = ۱۶۰$ دریافت کرو ن -

۲ - کتنی ارقام سلسلہ ۱۲ و ۱۶ و ۲۰ و ..... کی لی جائیں کہ مجموعہ ۲۰۸ کے برابر ہو؟

۳ - کسی سلسلہ حسابیہ میں تیسری رقم پہلی رقم کی چار گنی ہے اور چھٹی رقم ۱۷ ہے سلسلہ دریافت کرو -

۴ - کسی سلسلہ حسابیہ کی دوسری و ۳۱ ویں اور آخری رقمیں بالترتیب $\frac{۳}{۴}$ ۷ و $\frac{۱}{۲}$ و $-\frac{۱}{۲}$ ۶ ہیں - رقم اول اور تعداد ارقام دریافت کرو -

۵ - کسی سلسلہ حسابیہ کی چوتھی و ۴۲ ویں اور آخری رقمیں بالترتیب ۰ و ۹۵- و ۱۲۵- ہیں پہلی رقم اور کل تعداد ارقام دریافت کرو -

۶ - ایک شخص پر ۳۶۰۰ روپیہ قرض ہے وہ اسے ۴۰ قسطوں میں ادا کرنا چاہتا ہے جو کہ سلسلہ حسابیہ میں ہیں ۳۰ قسطیں ادا کرنے کے بعد وہ فوت ہوگیا اور اس کے قرض کا ایک تہائی حصہ ادا کرنا باقی رہا

پہلی قسط کی قیمت دریافت کرو۔

۷ - دو اعداد کا مجموعہ $\frac{1}{4}$۲ ہے اُن کے درمیان اوساط حسابیہ کی جفت تعداد مندرج کی گئی ہے اوساط کا مجموعہ اُن کی تعداد سے بقدر ایک کے زیادہ ہے - اوساط کی تعداد معلوم کرو۔

۸ - سلسلہ ۲، ۵، ۸، ... کی ن ارقام کا مجموعہ ۹۵۰ ہے نَ کی قیمت معلوم کرو۔

۹ - سلسلہ $\frac{1}{1+\sqrt{\text{لا}}}$ ، $\frac{1}{1-\text{لا}}$ ، $\frac{1}{1-\sqrt{\text{لا}}}$ ، ... کی ن رقموں کا مجموعہ دریافت کرو۔

۱۰ - اگر ۷ رقموں کا مجموعہ ۴۹ ہو اور ۱۷ رقموں کا ۲۸۹ تو ن رقموں کا مجموعہ دریافت کرو۔

۱۱ - اگر سلسلہ حسابیہ کی پ ویں و ق ویں و ر ویں رقمیں بالترتیب ا و ب و ج ہوں تو ثابت کرو کہ (ق - ر) ا + (ر - پ) ب + (پ - ق) ج = ۰

۱۲ - ثابت کرو کہ

$$(1)\quad \text{ف} = \frac{\text{خ}^2 - \text{ا}^2}{2\,\text{ص} - (\text{خ} + \text{ا})}$$

$$(2)\quad \text{ص} = \frac{\text{خ} + \text{ا}}{2\,\text{ف}}\,(\text{خ} - \text{ا} + \text{ف})$$

جہاں ا = رقم اول و خ = رقم آخر و ص = حاصل جمع ن ارقام اور ف = ق مشترک ۔

۱۳ - چار اعداد سلسلہ حسابیہ میں ہیں اُن کا حاصل جمع ۲۴ ہے اور انکا حاصل ضرب ۹۴۵ انہیں دریافت کرو۔

۱۴۔ ۲۰ کو ایسے چار حصوں میں تقسیم کرو جو سلسلہ حسابیہ میں ہوں اور پہلے اور چوتھے حصے کے حاصل ضرب کو دوسرے اور تیسرے کے حاصل ضرب سے نسبت ۲ : ۳ کی ہو

۱۵۔ کسی سلسلہ حسابیہ کی پ ویں رقم ق ہے اور ق ویں رقم پ ہے اس کی م ویں رقم دریافت کرو۔

۱۶۔ کتنی رقمیں سلسلہ ۹ و ۱۲ و ۱۵ و ...... کی لی جائیں کہ حاصل جمع ۳۰۶ ہو ؟

۱۷۔ اگر کسی سلسلہ حسابیہ کی ن ارقام کا مجموعہ ۲ ن + ۳ ن^{۲} ہو تو اسکی رٓ ویں رقم دریافت کرو۔

۱۸۔ اگر کسی سلسلہ حسابیہ کی م ارقام کے مجموعہ کو ن ارقام کے مجموعہ سے نسبت م^{۲} : ن^{۲} کی ہو تو ثابت کرو کہ م ویں رقم کو ن ویں رقم سے نسبت ۲ م - ۱ : ۲ ن - ۱ کی ہو گی۔

۱۹ ۔ اگر سلسلہ ۱ و ۳ و ۵ و ۷ و ۹ وغیرہ کی ۲ ن + ۱ ارقام لی جائیں تو ثابت کرو کہ سلسلہ ارقام ۱ و ۵ و ۹ وغیرہ کے مجموعہ کو باقی ارقام ۳ و ۷ و ۱۱ وغیرہ کے مجموعہ سے وہی نسبت ہے جو ن + ۱ کو ن سے ہے۔

۲۰۔ اگر ن کی تمام قیمتوں کے لئے ص = ن(۵ ن - ۳) تو پ ویں رقم دریافت کرو ۔

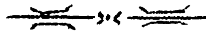
۲۱۔ کسی سلسلہ حسابیہ کی تعداد ارقام جفت ہے۔ طاق رقموں کا مجموعہ ۲۴ ہے اور جفت رقموں کا ۳۰ اور آخری رقم رقم اول سے بقدر $۱۰\frac{۱}{۲}$ کے زیادہ ہے۔ تعداد ارقام دریافت کرو۔

۲۲ ۔ دو مختلف نظام اعداد ہیں ہر ایک میں تین ارقام سلسلہ حسابیہ میں

ہیں۔ اور ہر ایک کا مجموعہ ۱۵ ہے پہلے نظام کا فرق مشترک دوسرے نظام کے فرق مشترک سے بقدر ایک کے زیادہ ہے اور پہلے نظام کے حاصل ضرب کو دوسرے نظام کے حاصل ضرب سے نسبت ۷ : ۸ کی ہے۔ اعداد دریافت کرو۔

۲۳۔ لا اور ۲ما کا (روان اوسط حسابی ۲ لا اور ما کے (روین اوسط حسابی کے برابر ہے جبکہ ہر ایک صورت میں ن اواسط حسابیہ مندرج کی جائیں لا اور ما کا باہمی ربط دریافت کرو۔

۲۴۔ اگر کسی سلسلہ حسابیہ کی پ رقموں کا مجموعہ ق رقموں کے مجموعہ کے برابر ہو تو ثابت کرو کہ پ + ق ارقام کا مجموعہ صفر ہے



باب پنجم

سلسلہ ہندسیہ

۵۷ — جب کسی سلسلۂ مقادیر کی ہر ایک رقم اپنی رقم ماقبل اور کسی مستقل جز ضربی کے حاصل ضرب کے برابر ہو تو ایسے سلسلے کو سلسلہ ہندسیہ کہتے ہیں۔

اس جز ضربی کو **نسبت مشترک** کہتے ہیں اور کسی رقم کو اسکی رقم ماقبل پر تقسیم کرنے سے اس کو معلوم کرتے ہیں۔

مثلاً ۳ و ۱۲ و ۴۸ و ۱۹۲ و ..... ایک سلسلہ ہندسہ ہے جسکی نسبت مشترک ۴ ہے

۱ و $-\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۹}$ و $-\frac{۱}{۲۷}$ و ...... " " " $-\frac{۱}{۳}$ "

۲۰ و ۱۰ و ۵ و ۲٫۵ و .... " " " $\frac{۱}{۲}$ "

ا و ار و ا$ر^۲$ و ا$ر^۳$ و ...... " " " ر "

ا و اب و ا$ب^۲$ و ا$ب^۳$ و .... " " " ب "

۵۸ — اگر رقم اول اور نسبت مشترک معلوم ہوں تو سلسلہ ہندسیہ کی ن ویں رقم دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ا رقم اول ہے اور ب نسبت مشترک

سلسلہ ا و اب و ا$ب^۲$ و ا$ب^۳$ و ..... کا بغور ملاحظہ کرنے سے

معلوم ہوگا کہ کسی رقم میں ب کا قوت نما تعداد ارقام سے جو اُس رقم تک ہو بقدر ایک کے کم ہے۔

مثلاً تیسری رقم = $ا ب^{۲}$

چھٹی رقم = $ا ب^{۵}$

۲۰ ویں رقم = $ا ب^{۱۹}$

اور بالعموم ع ویں رقم = $ا ب^{ع-۱}$

اگر ن = تعداد ارقام اور خ = آخری رقم

تو خ = $ا ب^{ن-۱}$

مثال ۱ - سلسلہ ۴ و ۱۲ و ۳۶ وغیرہ کی آٹھویں رقم دریافت کرو

نسبت مشترک = $\frac{۱۲}{۴}$ = ۳ اسلئے ۸ ویں رقم = ۴×۳^{۷} = ۸۷۴۸

مثال ۲ - پانچویں اور ن-۱ ویں رقمیں سلسلہ $\frac{۳}{۲}$ و -۱ و $\frac{۲}{۳}$ و ..... کی دریافت کرو۔ جواب $\frac{۸}{۲۷}$ و $\pm \frac{۲^{ن-۳}}{۳^{ن-۳}}$ مثبت یا منفی بمطابق اِس کے کہ ن جفت ہے یا طاق۔

مثال ۳ - سلسلہ ہندسیہ کی پہلی دو رقمیں ۱۲۵ اور ۲۵ ہیں - چھٹی اور ساتویں رقمیں دریافت کرو۔ جواب $\frac{۱}{۲۵}$ و $\frac{۱}{۱۲۵}$

۵۹ - تعریف ۱ - جب تین مقادیر سلسلہ ہندسیہ میں ہوں تو درمیانی مقدار کو دوسری دو کا **اوسط ہندسی** کہتے ہیں۔

تعریف ۲ - جب مقادیر $ہ_{۱}$ و $ہ_{۲}$ و $ہ_{۳}$ و $ہ_{۴}$ و...... وغیرہ ایسی ہوں کہ ا و $ہ_{۱}$ و $ہ_{۲}$ و $ہ_{۳}$ و $ہ_{۴}$ و...... و ج ایک سلسلہ ہندسیہ ہو تو $ہ_{۱}$ و $ہ_{۲}$ و $ہ_{۳}$ و $ہ_{۴}$... کو ا اور ج کے **اواسط ہندسیہ** کہتے ہیں۔

۶۰ - دو مقادیر کا اوسط ہندسی دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ا اور ج دو مقادیر ہیں اور ما ان کا اوسط ہندسی ہے اب چونکہ ا و ما و ج سلسلہ ہندسیہ میں ہیں۔

اسلئے $\frac{ما}{ا} = \frac{ج}{ما}$ یا $ما^2 = ا ج$

یا $ما = \sqrt{ا ج}$

یعنی دو مقادیر کا اوسط ہندسی اُن کے حاصل ضرب کے جذر کے برابر ہے۔

۶۱ — دو مقادیر معلوم میں متعدد اواسط ہندسیہ مندرج کرو۔

فرض کرو کہ ا اور ج دو مقداریں ہیں اور ن اواسط ہندسیہ کی تعداد کو تعبیر کرتا ہے۔ سلسلہ کی کل تعداد ارقام = ن + ۲

پس ہمیں ایک ایسا سلسلۂ ہندسیہ معلوم کرنا ہے جس کی پہلی رقم ا ہو اور آخری رقم ج۔ اگر نسبت مشترک کو ب سے تعبیر کریں تو

$ج = (ن + ۲)$ ویں رقم $= ا ب^{ن+۱}$

$\therefore ب^{ن+۱} = \frac{ج}{ا}$

$ب = \left(\frac{ج}{ا}\right)^{\frac{1}{ن+۱}}$ .... (۱)

اواسط مطلوبہ ہوئیں $ا ب$ و $ا ب^2$ و $ا ب^3$ و .... و $ا ب^ن$

جہاں ب کی قیمت (۱) سے حاصل ہوتی ہے۔

مثال ۱ — تین اواسط ہندسیہ $\frac{1}{2}$ اور ۱۲۸ کے درمیان مندرج کرو

فرض کرو کہ $م_1$ و $م_2$ و $م_3$ اواسط مطلوبہ ہیں

تب $\frac{1}{2}$ و $م_1$ و $م_2$ و $م_3$ و ۱۲۸ سلسلہ ہندسیہ میں ہیں

اگر سلسلہ مجوزہ کی نسبت مشترک ب ہو تو ۱۲۸ = پانچویں رقم $= \frac{1}{2} ب^4$

اس لئے $ب^{۴} = ۲۵۶$ جس سے $ب = ۴$

اسلئے $ا_{۱} = \frac{۱}{۲} \times ۴ = ۲$ و $ا_{۲} = \frac{۱}{۲} \times ۴^{۲} = ۸$ و $ا_{۳} = \frac{۱}{۲} \times ۴^{۳} = ۳۲$

مثال ۲ ـ ۱۶۰ اور ۵ کے درمیان ۴ اواسط ہندسیہ مندرج کرو ـ

ہم نے ۶ رقوم سلسلۂ ہندسیہ کی معلوم کرنی ہیں جن میں سے پہلی رقم ۱۶۰ ہے اور چھٹی رقم ۵ ـ

اگر ب نسبت مشترک ہو تو ۵ = چھٹی رقم = ۱۶۰ $ب^{۵}$ یا $ب^{۵} = \frac{۱}{۳۲}$

اس لئے $ب = \frac{۱}{۲}$ پس

اواسط مطلوبہ ہوئیں ۸۰ و ۴۰ و ۲۰ و ۱۰

مثال ۳ ـ چار اواسط ہندسیہ $\frac{۲}{۳}$ اور $- ۵\frac{۱}{۱۶}$ کے درمیان مندرج کرو ـ

جواب ـ ۱ و $\frac{۳}{۲}$ و $- \frac{۹}{۴}$ و $\frac{۲۷}{۸}$

مثال ۴ ـ ۹ اواسط ہندسیہ $۱\frac{۱۳}{۲۴۳}$ اور $- ۶\frac{۳}{۴}$ کے درمیان مندرج کرو

جواب $۱\frac{۴۷}{۸۱}$ و $۲\frac{۱۰}{۲۷}$ و $۳\frac{۵}{۹}$ و $۵\frac{۱}{۳}$ و ۸ و ۱۲ و ۱۸ و ۲۷ و $۴۰\frac{۱}{۲}$

۶۲ ـ متعدد ارقام سلسلۂ ہندسیہ میں ہیں اُن کا حاصل جمع دریافت کرو

فرض کرو ا = پہلی رقم، ب = نسبت مشترک، ن = تعداد ارقام اور ص = حاصل جمع ـ

تب $ص = ا + اب + اب^{۲} + \dots + اب^{ن-۲} + اب^{ن-۱}$ ...(۱)

ہر ایک رقم کو ب سے ضرب دو ـ

$ب ص = اب + اب^{۲} + اب^{۳} + \dots + اب^{ن-۱} + اب^{ن}$ ...(۲)

(۱) کو (۲) سے تفریق کرو تو حاصل ہوگا ـ

$ب ص - ص = اب^{ن} - ا$

$\therefore ص (ب - ۱) = ا (ب^{ن} - ۱)$

$$\therefore \text{ص} = \frac{\text{ا}(\text{ب}^{\text{ن}} - ۱)}{\text{ب} - ۱} \quad \text{.............} \quad (۳)$$

شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو - ا سے ضرب دو تو حاصل ہوگا

$$\text{ص} = \frac{\text{ا}(۱ - \text{ب}^{\text{ن}})}{۱ - \text{ب}} \quad \text{.............} \quad (۴)$$

چونکہ $\text{ا ب}^{\text{ن} - ۱} = \text{خ}$ جہاں خ رقم آخر ہے

اسلئے $\text{ص} = \frac{\text{ب خ} - \text{ا}}{\text{ب} - ۱}$

نوٹ - بہتر ہوگا کہ طالب علم ص کی ہر دو صور جبریہ (۳) اور (۴) کو یاد رکھے اور (۴) کو ہمیشہ استعمال کرے سوائے اُس صورت کے جب ب مثبت ہو اور ایک سے بڑی ہو

مثال ۱ - سلسلہ $\frac{۲}{۳}$ و - ۱ و $\frac{۳}{۲}$ و .... کی ۷ رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو -

نسبت مشترک = $-\frac{۳}{۲}$ اسلئے ضابطہ (۴) کی استعانت سے -

$$\text{ص} = \frac{\frac{۲}{۳}\left\{۱ - \left(-\frac{۳}{۲}\right)^{۷}\right\}}{۱ + \frac{۳}{۲}} = \frac{\frac{۲}{۳}\left\{۱ + \frac{۲۱۸۷}{۱۲۸}\right\}}{\frac{۵}{۲}}$$

$$= \frac{۲}{۳} \times \frac{۲۳۱۵}{۱۲۸} \times \frac{۲}{۵} = \frac{۴۶۳}{۹۶}$$

مثال ۲ - سلسلہ ۳ + $۴\frac{۱}{۲}$ + $۶\frac{۳}{۴}$ + ... کا حاصل جمع ۵ رقموں تک دریافت کرو -

نسبت مشترک = $۴\frac{۱}{۲} \div ۳ = \frac{۹}{۲} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۳}{۲}$

اسلئے اگر حاصل جمع ص ہو تو قانون جبریہ (۳) کی مدد سے

$$\text{ص} = \frac{۳\left\{\left(\frac{۳}{۲}\right)^{۵} - ۱\right\}}{\frac{۳}{۲} - ۱} = \frac{۳\left\{\frac{۲۴۳}{۳۲} - ۱\right\}}{\frac{۱}{۲}}$$

$$= ۳ \times \frac{۲۱۱}{۳۲} \times ۲ = \frac{۶۳۳}{۱۶} = ۳۹\frac{۹}{۱۶}$$

مثال ۳ ــ سلسلہ $(\text{ا}^{۲} - \text{د}^{۲}) + (\text{ا} + \text{د}) + \frac{\text{ا} + \text{د}}{\text{ا} - \text{د}} + \ldots$ کا ن رقموں تک حاصل جمع دریافت کرو۔

نسبت مشترک $= \frac{۱}{\text{ا} - \text{د}}$

$$\text{ص} = \frac{(\text{ا}^{۲} - \text{د}^{۲})\left\{\left(\frac{۱}{\text{ا} - \text{د}}\right)^{\text{ن}} - ۱\right\}}{\frac{۱}{\text{ا} - \text{د}} - ۱}$$

$$= \frac{(\text{ا}^{۲} - \text{د}^{۲})\left\{(\text{ا} - \text{د})^{\text{ن}} - ۱\right\}}{(\text{ا} - \text{د})^{\text{ن}}} \times \frac{\text{ا} - \text{د}}{\text{ا} - \text{د} - ۱}$$

$$= \frac{(\text{ا} + \text{د})}{(\text{ا} - \text{د})^{\text{ن} - ۲}} \times \frac{\left\{(\text{ا} - \text{د})^{\text{ن}} - ۱\right\}}{\text{ا} - \text{د} - ۱}$$

۶۳ ــ کسی سلسلہ ہندسیہ کی غیر متناہی تعداد ارقام کے مجموعہ سے ہماری کیا مراد ہے؟

اگر نسبت مشترک ب بلحاظ عددی قیمت کے ایک سے کم نہو تو ظاہر ہے کہ جیسا ہم سلسلہ میں آگے بڑھتے جائیں گے ارقام سلسلہ بھی عددی قیمت میں بڑھتی جائیں گی اس لئے اس صورت میں غیر متناہی تعداد ارقام کا مجموعہ غیر متناہی ہوگا۔

لیکن اگر ب کسر واجب ہو تو ارقام سلسلہ بتدریج گھٹتی جائینگی

اوراس صورت میں ایک ایسی حد کا معلوم کرنا ممکن ہوگا جس سے سلسلہ کا مجموعہ ہرگز نہ بڑھ سکے خواہ تعداد ارقام کچھ ہی لی جائے اور آخرالامر جس حد کے لاانتہا قریب یہ مجموعہ آجائے گا اگر ہم تعداد ارقام کافی طور پر زیادہ لیں۔

اس حد کو **مجموعہ سلسلہ غیر متناہی** کہتے ہیں

۶۴ - سلسلہ ۱ و $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۲^۲}$ و $\frac{۱}{۲^۳}$ ..... پر غور کرو

$$\text{ن ارقام کا مجموعہ} = \frac{۱ - \frac{۱}{۲^{ن}}}{۱ - \frac{۱}{۲}} = ۲\left(۱ - \frac{۱}{۲^{ن}}\right)$$

$$= ۲ - \frac{۱}{۲^{ن-۱}}$$

اس نتیجہ سے ظاہر ہے کہ خواہ کتنی ارقام سلسلہ مندرجہ بالا کی لیجائیں اس کا مجموعہ ہمیشہ ۲ سے کم رہے گا نیز ہم دیکھتے ہیں کہ ن کو کافی بڑا لینے سے ہم کسر $\frac{۱}{۲^{ن-۱}}$ کو اتنا چھوٹا بنا سکتے ہیں جتنا چاہیں - پس رقموں کی تعداد کافی لینے سے مجموعہ سلسلہ مذکورہ اور ۲ میں فرق اتنا کم ہو سکتا ہے جتنا ہم چاہیں -

اس نتیجے کی توضیح بطریق ہندسی اس طرح ہوسکتی ہے -

ب $ف_۴$ $ف_۳$ $ف_۲$ $ف_۱$ ا

فرض کروکہ $\overline{\text{اب}}$ ایک محدود خط مستقیم ہے - $\overline{\text{اب}}$ کی تنصیف $ف_۱$ پر کرو - اور $\overline{ف_۱\text{ب}}$ کی $ف_۲$ پر اور $\overline{ف_۲\text{ب}}$ کی $ف_۳$ پر اور $\overline{ف_۳\text{ب}}$ کی $ف_۴$ پر اور علیٰ ہذا القیاس

اس سے ظاہر ہے کہ اگر ہم اسی طرح سے اپنے اعمال تنصیف کو جاری رکھیں تو ب کے اتنا قریب پہنچ سکتے ہیں جتنا چاہیں۔ یعنی ہمارے آخری حصہ $ف_ر$ اور ب میں فاصلہ اتنا کم ہو سکتا ہے جو کسی معین مقدار سے جس کو ہم چھٹائی کا معیار مان لیں کم ہو۔

اب اگر فرض کیا جائے کہ ا ب = ۲ انچ

تو ا $ف_۱$ = ۱ ״

$ف_۱ ف_۲ = \frac{۱}{۲}$ ״

$ف_۲ ف_۳ = \frac{۱}{۲^۲}$ ״

$ف_۳ ف_۴ = \frac{۱}{۲^۳}$ ״ اور علیٰ ہٰذالقیاس

تو حاصل جمع سلسلہ غیر متناہی $= ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۲^۳} + \ldots \infty$ تک

$= اف_۱ + ف_۱ف_۲ + ف_۲ف_۳ + ف_۳ف_۴ + \ldots \infty$ تک

جس سے ثابت ہوا کہ سلسلے کا حاصل جمع طول ا ب یعنی ۲ سے کبھی زیادہ نہیں ہو سکتا۔ خواہ تعداد ارقام کچھ ہی لی جائے۔

۶۵۔ کسی سلسلہ ہندسیہ کی نسبت مشترک ایک سے کم ہے اس کی غیر متناہی تعداد ارقام کا مجموعہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ سلسلہ مجوزہ ا و اب و $اب^۲$ و $اب^۳$ و.... ہے اور $ص_ن$ حاصل جمع ن ارقام کو تعبیر کرتا ہے۔

$$ص_ن = \frac{ا(۱ - ب^ن)}{۱ - ب} = \frac{ا}{۱ - ب} - \frac{اب^ن}{۱ - ب}$$

چونکہ ب کسر واجب ہے اسلئے جتنا بڑا ن ہوگا اتنا ہی چھوٹا $ب^ن$ اور اسلئے جملہ $\frac{اب^ن}{۱ - ب}$ ہوگا۔ اسلئے ن کی قیمت کافی زیادہ لینے سے

ہم $\frac{\text{ا ب}^{\text{ن}}}{\text{ا - ب}}$ کو کسی معین مقدار سے جسے ہم اپنا چھٹائی کا معیار مقرر کریں چھوٹا بنا سکتے ہیں پس معلوم ہوا کہ ہم جتنی زیادہ ارقام سلسلہ لیں گے مجموعہ ارقام اتنا ہی قریب قریب $\frac{\text{ا}}{\text{ا - ب}}$ کے آتا جائے گا -

اسلئے $\frac{\text{ا}}{\text{ا - ب}}$ کو مجموعہ ارقام سلسلہ ہندسیہ غیر متناہی کہتے ہیں اور اسے اس طرح لکھتے ہیں کہ

$$\text{ص}_{\infty} = \frac{\text{ا}}{\text{ا - ب}}$$

ہم اس نتیجہ کو اس طرح بیان کرسکتے ہیں -

سلسلہ ا، ا ب، ا ب^{۲}، ا ب^{۳}، ..... (جس میں ب بلحاظ عددی قیمت کے ایک سے کم ہے) کی ن ارقام کا مجموعہ $\frac{\text{ا}}{\text{ا - ب}}$ سے کبھی نہیں بڑھ سکتا لیکن متواتر اس کے نزدیک آتا جاتا ہے اور اگر ن کو لاانتہا بڑا لیا جائے تو مجموعہ مذکورہ $\frac{\text{ا}}{\text{ا - ب}}$ کے لاانتہا قریب آجائے گا -

نوٹ - یاد رہے $\frac{\text{ا}}{\text{ا - ب}}$ حقیقی حاصل جمع سلسلۂ لانہایت کا نہیں ہے بلکہ یہ کہنا زیادہ صحیح ہے کہ ن کے بڑھانے سے سلسلے کا حقیقی مجموعہ اس جلد کے قریب قریب آتا جاتا ہے -

۶۶ - سلسلہ ہندسیہ کا اتساع اور استدقاق

سلسلہ ہندسیہ ص = ا + ا ب + ا ب^{۲} + ... + ا ب$^{\text{ن}-۱}$ پر غور کرو

اگر ب = ۱ تو سلسلہ ہوگا -

$$\text{ص} = \text{ا} + \text{ا} + \text{ا} + \cdots\cdots + \text{ا} = \text{ن ا}$$

پس ن کی قیمت کافی طور پر بڑی لینے سے ہم سلسلہ مندرجہ بالا کے مجموعہ ارقام (ص) کو کسی بڑی سے بڑی مقدار سے زیادہ یا بڑا بنا سکتے ہیں۔

اگر ب بلحاظ عددی قیمت کے ایک سے بڑی ہو تو بھی یہی نتیجہ صحیح ہوگا کیونکہ اُس صورت میں

$$ص = \frac{ا(ب^{ن} - ۱)}{ب - ۱}$$

$$= \frac{اب^{ن}}{ب - ۱} - \frac{ا}{ب - ۱}$$

اب چونکہ $ب > ۱$ ہم ن کی قیمت کافی زیادہ لینے سے ($ب^{ن}$ کو اور اسلئے) جملہ $\frac{اب^{ن}}{ب - ۱}$ کو اتنا بڑا بنا سکتے ہیں جتنا چاہیں

اسلئے ن کو کافی بڑا لینے سے ہم مجموعہ ارقام (ص) کو کسی لاانتہا بڑی مقدار معینہ سے بڑا بنا سکتے ہیں۔

ان دونوں صورتوں میں سلسلہ ہندسیہ متّسع کہلاتا ہے اگر ب بلحاظ عددی قیمت کے ایک سے کم ہو یعنی $ب < ۱$ تو ہم ن کو کافی بڑا لینے سے ($ب^{ن}$ کو اور اسلئے) $\frac{اب^{ن}}{۱ - ب}$ کو اتنا چھوٹا بنا سکتے ہیں جتنا چاہیں اسلئے معلوم ہوا کہ ن کو کافی بڑا لینے سے ہم ص اور $\frac{ا}{۱ - ب}$ کے فرق کو اتنا چھوٹا بنا سکتے ہیں جتنا چاہیں بعض اوقات اس کو اس طرح بیان کرتے ہیں کہ جب ب بلحاظ عددی قیمت کے ایک سے کم ہو تو مجموعہ سلسلہ غیر متناہی $ا + اب + اب^{۲} + \ldots$ کی قیمت $\frac{ا}{۱ - ب}$ ہوتی ہے۔

اس صورت میں سلسلہ ہندسیہ مستدق کہلاتا ہے کیونکہ سلسلہ

کا مجموعہ قیمت $\frac{ا}{۱ - ب}$ کے قریب قریب آتا جاتا ہے۔

مثال ۱ ـ سلسلہ غیر متناہی $\frac{۳}{۲} - \frac{۲}{۳} + \frac{۸}{۲۷} - \dots$ کا مجموعہ دریافت کرو۔

اس جگہ $ا = \frac{۳}{۲}$ و $ب = -\frac{۲}{۳} \div \frac{۳}{۲} = -\frac{۴}{۹}$

اسلئے مجموعہ مطلوبہ $= \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۴}{۹} + ۱} = \frac{۳}{۲} \times \frac{۹}{۱۳} = \frac{۲۷}{۲۶}$

مثال ۲ ـ سلسلہ ہندسیہ میں تین اعداد کا حاصل جمع ۱۹ ہے اور حاصل ضرب ۲۱۶ انہیں دریافت کرو۔

اعداد کو $\frac{ا}{ب}$ و ا و اب سے تعبیر کرو

$\frac{ا}{ب} \times ا \times اب = ۲۱۶$ یعنی $ا^۳ = ۲۱۶$ یا $ا = ۶$ پس

اعداد ہوئے $\frac{۶}{ب}$ و ۶ و ۶ب

$\therefore \frac{۶}{ب} + ۶ + ۶ب = ۱۹$

$\therefore ۶ - ۱۳ب + ۶ب^۲ = ۰$ یعنی $ب = \frac{۳}{۲}$ یا $\frac{۲}{۳}$

اسلئے اعداد مطلوبہ ۴ و ۶ و ۹ ہیں

مثال ۳ ـ ایک غیر متناہی سلسلہ ہندسیہ کا حاصل جمع ۱۵ ہے اور اسکی رقموں کے مربعوں کا حاصل جمع ۴۵ ہے۔ سلسلہ دریافت کرو

فرض کرو کہ ا = پہلی رقم، ب = نسبت مشترک

سلسلہ کا حاصل جمع $= \frac{ا}{۱ - ب} = ۱۵$ .... (۱)

رقموں کے مربعوں کا حاصل جمع $= \frac{ا^۲}{۱ - ب^۲} = ۴۵$ ...... (۲)

(۲) کو (۱) پر تقسیم کرنے سے $\frac{ا}{۱ + ب} = ۳$ (۳)

(۱) اور (۳) سے $\frac{۱ + ب}{۱ - ب} = ۵$

∴ ب = $\frac{۲}{۳}$ اور ا = ۵

اسلئے سلسلہ مطلوبہ ہوا ۵ و $\frac{۱۰}{۳}$ و $\frac{۲۰}{۹}$ و ....

امثلہ نمبری ۶

۱۔ سلسلہ $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۹}$ و .... کو ۷ رقموں تک جمع کرو

۲۔ " -۲ و $۲\frac{۱}{۲}$ و $-۳\frac{۱}{۸}$ و ...... " ۶ " "

۳۔ " $\frac{۳}{۴}$ و $۱\frac{۱}{۲}$ و ۳ و .... " ۸ " "

۴۔ " ۲ و -۴ و ۸ و .... " ۱۰ " "

۵۔ " ۱۶ء۲ و ۵ء۴ و ۱ء۸ و ..... " ۷ " "

۶۔ " ۱ و ۵ و ۲۵ و .... " ع " "

۷۔ " ۳ و -۴ و $\frac{۱۶}{۳}$ و .... " ۲ن " "

۸۔ " ۱ و $\sqrt{۳}$ و ۳ و .... " ۱۲ " "

۹۔ " $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$ و -۲ و $\frac{۸}{۲\sqrt{۲}}$ و .... " ۷ " "

۱۰۔ " $-\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۲}$ و $-\frac{۳}{۴}$ و .... " ۷ " "

۱۱۔ ۳ اواسط ہندسیہ $۲\frac{۱}{۴}$ اور $\frac{۴}{۹}$ کے درمیان مندرج کرو

۱۲۔ ۵ " " $۳\frac{۵}{۹}$ " $۴۰\frac{۱}{۲}$ " "

۱۳۔ ۶ " " ۱۴ " $-\frac{۷}{۶۴}$ " "

ذیل کے غیر متناہی سلسلوں کا حاصل جمع دریافت کرو

۱۴۔ $\frac{۸}{۵}$ و -۱ و $\frac{۵}{۸}$ و ....

۱۵۔ ۰ء۴۵ و ۰ء۰۱۵ و ۰ء۰۰۰۵ و ....

۱۶۔ ۱ء۶۶۵ و $-$۱ء۱۱ و ء۷۴ و ....

۱۷ـ $۳^{-۱}$ و $۳^{-۲}$ و $۳^{-۳}$ و ....

۱۸ـ ۳ و $\sqrt{۳}$ و ۱ و ....

۱۹ـ ۷ و $\sqrt{۴۲}$ و ۶ و ....

۲۰ـ $\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}-۱} + \frac{۱}{۲-\sqrt{۲}} + \frac{۱}{۲} + ...$

۲۱ـ $(\sqrt{۲}+۱) + ۱ + (\sqrt{۲}-۱) + ...$

۲۲ـ $\left(\frac{۱}{د}\right)^{\frac{۱}{۲}} - \left(\frac{د}{۱}\right)^{\frac{۱}{۲}} + \left(\frac{د}{۱}\right)^{\frac{۳}{۲}} - ....$ جہاں د بلحاظ عددی قیمت کے ۱ سے کم ہے۔

۲۳ـ سلسلہ ہندسیہ میں پہلی ۶ رقموں کا مجموعہ پہلی تین رقموں کے مجموعہ کا ۹ گنا ہے۔ نسبت مشترک معلوم کرو۔

۲۴ـ سلسلہ ہندسیہ کی پانچویں رقم ۸۱ ہے اور دوسری رقم ۲۴ سلسلہ دریافت کرو۔

۲۵ـ کسی سلسلہ ہندسیہ کی نسبت مشترک ۳ ہے مجموعہ ۷۲۸ اور آخری رقم ۴۸۶ رقم اول دریافت کرو

۲۶ـ سلسلہ ہندسیہ کی پہلی رقم ۷ ہے آخری رقم ۴۴۸ اور مجموعہ ارقام ۸۸۹ نسبت مشترک معلوم کرو۔

۲۷ـ سلسلہ ہندسیہ میں تین عددوں کا مجموعہ ۳۸ ہے اور ان کا حاصل ضرب ۱۷۲۸ ہے انہیں دریافت کرو۔

۲۸ـ سلسلہ ہندسیہ میں تین اعداد کا متواتر حاصل ضرب ۲۱۶ ہے اور ان میں سے دو دو اعداد کے حاصل ضرب کا مجموعہ ۱۵۶ ہے

اُنہیں دریافت کرو۔

۲۹۔ اگر $س_ع = ۱ + ب^ع + ب^{۲ع} + \ldots\ldots$ ∞ تک

اور $ص_ع = ۱ - ب^ع + ب^{۲ع} - \ldots\ldots$ ∞ تک

تو ثابت کرو کہ $س_ع + ص_ع = ۲ س_{۲ع}$

۳۰۔ اگر کسی سلسلہ ہندسیہ کی ف ویں، ق ویں، ر ویں ارقام بالترتیب ل و م و ن ہوں تو ثابت کرو کہ $ل^{ق-ر} م^{ر-ف} ن^{ف-ق} = ۱$

۳۱۔ کسی غیر متناہی سلسلہ ہندسیہ کا مجموعہ ۴ ہے اور ارقام کے مکعبوں کا مجموعہ ۱۹۲ ہے سلسلہ دریافت کرو۔

۶۷۔ متوالی کسور اعشاریہ غیر متناہی سلسلہ ہندسیہ کی ایک عمدہ مثال ہے۔

مثال ۱۔ $\dot{۲}\dot{۳}۴۰$ کی قیمت دریافت کرو۔

$$۰۴\dot{۲}\dot{۳} = ۰۴۲۳۲۳۲۳\ldots\ldots$$

$$= \frac{۴}{۱۰} + \frac{۲۳}{۱۰۰۰} + \frac{۲۳}{۱۰۰۰۰۰} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{۴}{۱۰} + \frac{۲۳}{۱۰^۳} + \frac{۲۳}{۱۰^۵} + \ldots$$

$$= \frac{۴}{۱۰} + \frac{۲۳}{۱۰^۳}\left\{۱ + \frac{۱}{۱۰^۲} + \frac{۱}{۱۰^۴} + \ldots\ldots\right\}$$

$$= \frac{۴}{۱۰} + \frac{۲۳}{۱۰^۳} \times \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{۱۰^۲}}$$

$$= \frac{۴}{۱۰} + \frac{۲۳}{۱۰^۳} \times \frac{۱۰۰}{۹۹}$$

$$= \frac{۴}{۱۰} + \frac{۲۳}{۹۹۰} = \frac{۴۱۹}{۹۹۰}$$

۶۸۔ کسور اعشاریہ متوالی یا مدور کی قیمت دریافت کرنیکا قاعدہ

اس طرح ثابت ہو سکتا ہے۔

اگر ف سے غیر متوالی ہندسوں کو تعبیر کریں جن کی تعداد ط ہے اور اگر ق سے دور مکرر کو تعبیر کریں جس میں ع ہندسے شامل ہیں اور ت = قیمت کسور اعشاریہ متوالی تو

ت = ... ق ق ف ء

اسلئے $10^{ط}$ × ت = ... ق ق ء ف

اور $10^{ط+ع}$ × ت = ... ق ق ء ق ف

تفریق سے ($10^{ط+ع}$ ـ $10^{ط}$) ت = ق ف ـ ف

اسلئے ت = $\frac{ق ف - ف}{10^{ط}(10^{ع} - 1)}$ .... (۱)

اب ($10^{ع}$ ـ ۱) ایک ایسا عدد ہے جس میں ع دفعہ ۹ شامل ہے اسلئے معلوم ہوا کہ (۱) کا نسب نما ایک ایسا عدد ہے جس میں ہندسہ ۹ صریحاً ع دفعہ تکرار پاتا ہے اور اس کے اول یعنی دائیں طرف ط صفر ہیں۔ کسور اعشاریہ مدور کو کسور عام میں لانے کا قاعدہ حسب ذیل ہے۔

شمار کنندہ بنانے کے لئے ایسے عدد صحیح سے جو متوالی اور غیر متوالی ہندسوں سے ملکر بنا ہو وہ عدد تفریق کرو جس میں صرف غیر متوالی ہندسے شامل ہوں اور نسب نما بنانے کے لئے ایسا عدد لو جس میں ہندسہ ۹ اتنی دفعہ تکرار پائے جتنے متوالی ہندسے دور مکرر میں ہوں اور اس کے اول یعنی دائیں طرف اتنے صفر لکھو جتنے غیر متوالی ہندسے ہوں۔

۶۹ - خاص قسم کے سلسلوں کا جمع کرنا

سلسلہ ا و (ا + ف) ب و (ا + ۲ ف) ب^{۲} و (ا + ۳ ف) ب^{۳} و.... کی ن ارقام کا مجموعہ دریافت کرو -

اس سلسلہ میں ہر ایک رقم سلسلہ حسابیہ ا و ا + ف و ا+۲ف و.... اور سلسلہ ہندسیہ ا و ب و ب^{۲} و ب^{۳} و .... کی مطابق رقموں کا حاصل ضرب ہے -

فرض کرو کہ ص سے حاصل جمع ن ارقام تعبیر ہوتا ہے تب

ص = ا + (ا + ف) ب + (ا + ۲ ف) ب^{۲} + ... + {ا + (ن - ۱) ف} ب$^{ن-۱}$

ب ص = ا ب + (ا + ف) ب^{۲} + ... + {ا + (ن - ۲) ف} ب$^{ن-۱}$

+ {ا + (ن - ۱) ف} ب^{ن}

عمل تفریق سے

ص (۱ - ب) = ا + (ف ب + ف ب^{۲} + ... + ف ب$^{ن-۱}$)

- (ا + $\overline{ن - ۱}$ ف) ب^{ن}

∴ ص = $\frac{ا}{۱ - ب}$ + $\frac{ف ب (۱ - ب^{ن-۱})}{(۱ - ب)^{۲}}$ - $\frac{(ا + \overline{ن - ۱}\ ف) ب^{ن}}{۱ - ب}$

اگر ب < ۱ تو ن کو کافی بڑا لینے سے ہم ب^{ن} کو اتنا چھوٹا بنا سکتے ہیں جتنا چاہیں - اب فرض کرو کہ اس طرح سے تمام رقمیں جن میں ب^{ن} شامل ہے ساقط کردی جائیں تو حاصل جمع ص$_{\infty}$ = $\frac{ا}{۱ - ب}$ + $\frac{ف ب}{(۱ - ب)^{۲}}$

جہاں ص سے ہم سلسلۂ غیر متناہی کے مجموعہ کو تعبیر کرتے ہیں

نوٹ - اس قسم کے سلسلوں کو جمع کرنے میں طالب علم کو ضابطہ مندرجہ بالا کے استعمال کرنے کی ضرورت نہیں اُسے چاہیئے کہ ہر ایک صورت مین نتیجہ مطلوب کو بلا واسطہ مفصل عمل سے حاصل کرے امثلہ ذیل سے طریقِ عمل کی توضیح ہوگی -

مثال ۱ - سلسلہ $۱ + \frac{۳}{۲} + \frac{۵}{۴} + \frac{۷}{۸} + \cdots$ کی ن ویں رقم اور ن ارقام کا مجموعہ دریافت کرو -

سلسلہ مجوزہ اس طرح لکھا جا سکتا ہے

$$۱ + ۳ \times \left(\frac{۱}{۲}\right) + ۵ \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} + ۷ \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳} + \cdots\cdots$$

اس سے ظاہر ہے کہ سلسلہ مجوزہ کی ہر ایک رقم سلسلہ حسابیہ ۱ و ۳ و ۵ وغیرہ اور سلسلہ ہندسیہ ۱ و $\frac{۱}{۲}$ و $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}$ و $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}$ وغیرہ کی مطابق رقموں کا حاصل ضرب ہے - اس لئے سلسلہ معلومہ کی ن ویں رقم

$$= \{۱ + (\text{ن} - ۱)۲\} \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^{\text{ن}-۱} = \frac{۲\text{ن} - ۱}{۲^{\text{ن}-۱}}$$

اگر حاصل جمع ن ارقام ص سے تعبیر کیا جائے تو $\frac{۱}{۲}$ کی جگہ لا رکھنے سے

$$\text{ص} = ۱ + ۳\text{لا} + ۵\text{لا}^{۲} + ۷\text{لا}^{۳} + \cdots + (۲\text{ن} - ۱)\,\text{لا}^{\text{ن}-۱}$$

$$\text{ص لا} = \text{لا} + ۳\text{لا}^{۲} + ۵\text{لا}^{۳} + \cdots + (۲\text{ن} - ۳)\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + (۲\text{ن} - ۱)\,\text{لا}^{\text{ن}}$$

اسلئے تفریق سے

$$\text{ص}\,(۱-\text{لا}) = ۱ + ۲\text{لا} + ۲\text{لا}^{۲} + \dots + ۲\text{لا}^{\text{ن}-۱} - (۲\text{ن}-۱)\,\text{لا}^{\text{ن}}$$

$$= ۱ + \{۲\text{لا} + ۲\text{لا}^{۲} + ۲\text{لا}^{۳} + \dots \ (\text{ن}-۱)\ \text{رقموں تک}\} - (۲\text{ن}-۱)\,\text{لا}^{\text{ن}}$$

$$\text{یا}\ \tfrac{۱}{۲}\,\text{ص} = ۱ + \frac{۲\times\frac{۱}{۲}\left\{۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\text{ن}-۱}\right\}}{۱-\frac{۱}{۲}} - (۲\text{ن}-۱)\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\text{ن}}$$

$$= ۱ + ۲\left\{۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\text{ن}-۱}\right\} - (۲\text{ن}-۱)\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\text{ن}-۱}$$

$$= ۳ - \left(\frac{۱}{۲}\right)^{\text{ن}-۱}\left\{۲ + \frac{۲\text{ن}-۱}{۲}\right\} = ۳ - \frac{۲\text{ن}+۳}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\text{ن}-۱}$$

$$\text{اسلئے ص} = ۶ - (۲\text{ن}+۳)\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\text{ن}-۱} = ۶ - \frac{۲\text{ن}+۳}{۲^{\text{ن}-۱}}$$

مثال ۲ - اگر لا $<$ ۱ تو سلسلہ غیر متناہی

$۱ + ۲\text{لا} + ۳\text{لا}^{۲} + ۴\text{لا}^{۳} + \dots$ کو جمع کرو

فرض کرو کہ $\text{ص} = ۱ + ۲\text{لا} + ۳\text{لا}^{۲} + ۴\text{لا}^{۳} + \dots$

$\text{لا ص} = \text{لا} + ۲\text{لا}^{۲} + ۳\text{لا}^{۳} + \dots$

$$\therefore \text{ص}\,(۱-\text{لا}) = ۱ + \text{لا} + \text{لا}^{۲} + \text{لا}^{۳} + \dots = \frac{۱}{۱-\text{لا}}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{۱}{(۱-\text{لا})^{۲}}$$

مثال ۳ - سلسلہ $۱ + \frac{۴}{۵} + \frac{۷}{۵^{۲}} + \frac{۱۰}{۵^{۳}} + \dots$ کو ن رقموں تک جمع کرو۔

فرض کرو کہ $\text{ص} = ۱ + \frac{۴}{۵} + \frac{۷}{۵^{۲}} + \frac{۱۰}{۵^{۳}} + \dots + \frac{۳\text{ن}-۲}{۵^{\text{ن}-۱}}$

$$\therefore \tfrac{۱}{۵}\,\text{ص} = \frac{۱}{۵} + \frac{۴}{۵^{۲}} + \frac{۷}{۵^{۳}} + \dots + \frac{۳\text{ن}-۵}{۵^{\text{ن}-۱}} + \frac{۳\text{ن}-۲}{۵^{\text{ن}}}$$

$$\therefore \frac{۴}{۵}\text{ص} = ۱ + \left(\frac{۳}{۵} + \frac{۳}{۵^{۲}} + \cdots + \frac{۳}{۵^{\text{ن}-۱}}\right) - \frac{۳\text{ن}-۲}{۵^{\text{ن}}}$$

$$= ۱ + \frac{۳}{۵}\left(۱ + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۵^{۲}} + \cdots + \frac{۱}{۵^{\text{ن}-۲}}\right) - \frac{۳\text{ن}-۲}{۵^{\text{ن}}}$$

$$= ۱ + \frac{۳}{۵} \times \frac{۱ - \frac{۱}{۵^{\text{ن}-۱}}}{۱ - \frac{۱}{۵}} - \frac{۳\text{ن}-۲}{۵^{\text{ن}}}$$

$$= ۱ + \frac{۳}{۴}\left(۱ - \frac{۱}{۵^{\text{ن}-۱}}\right) - \frac{۳\text{ن}-۲}{۵^{\text{ن}}}$$

$$= \frac{۷}{۴} - \frac{۱۲\text{ن}+۷}{۴ \times ۵^{\text{ن}}}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{۳۵}{۱۶} - \frac{۱۲\text{ن}+۷}{۱۶ \times ۵^{\text{ن}-۱}}$$

مثال ۵ — سلسلہ $۱ + \frac{۲}{۵} + \frac{۳}{۵^{۲}} + \frac{۴}{۵^{۳}} +$ وغیرہ کو ن رقموں تک جمع کرو۔

جواب $\frac{۵^{\text{ن}+۱} - ۵ - ۴\text{ن}}{۱۶ \times ۵^{\text{ن}-۱}}$

مثال ۶ — سلسلہ $\text{لا} + ۲^{۲} \times \text{لا}^{۲} + ۳^{۲} \times \text{لا}^{۳} + \cdots + \text{ن}^{۲} \times \text{لا}^{\text{ن}}$ کو جمع کرو

جواب $\frac{\text{لا} + \text{لا}^{۲} - (\text{ن}+۱)^{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}+۱} + (۲\text{ن}^{۲} + ۲\text{ن} - ۱)\,\text{لا}^{\text{ن}+۲} - \text{ن}^{۲} \times \text{لا}^{\text{ن}+۳}}{(۱ - \text{لا})^{۳}}$

۷۰ — سلسلہ ہندسیہ کی متفرق مثالیں

مثال ۱ — اگر $\text{ص}_{\text{ن}}$ سے حاصل جمع ن ارقام کسی سلسلہ ہندسیہ کا تعبیر ہو تو مجموعہ $\text{ص}_{۱} + \text{ص}_{۲} + \text{ص}_{۳} + \cdots + \text{ص}_{\text{ن}}$ کی قیمت دریافت کرو

فرض کروکہ ا = رقم اول اور ب = نسبت مشترک

$$\text{ص}_{\text{ن}} = \frac{\text{ا}(\text{ب}^{\text{ن}} - ۱)}{\text{ب} - ۱}$$

اسلئے $ص_1 = \frac{ا(ب-1)}{ب-1}$ و $ص_2 = \frac{ا(ب^2-1)}{ب-1}$ و $ص_3 = \frac{ا(ب^3-1)}{ب-1}$ اور علیٰ ہذا القیاس

اسلئے $ص_1 + ص_2 + ص_3 + \dots\dots + ص_ن$

$$= \frac{ا}{ب-1}\left\{(ب-1) + (ب^2-1) + (ب^3-1) + \dots + (ب^ن-1)\right\}$$

$$= \frac{ا}{ب-1}\left\{(ب + ب^2 + ب^3 + \dots + ب^ن) - ن\right\}$$

$$= \frac{ا}{ب-1}\left\{\frac{ب(ب^ن-1)}{ب-1} - ن\right\}$$

$$= \frac{ب\,ا(ب^ن-1)}{(ب-1)^2} - \frac{ن\,ا}{ب-1}$$

مثال ۲ — سلسلہ ۵ + ۵۵ + ۵۵۵ + ... کی ن رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ص مجموعہ مطلوبہ ہے

اسلئے ص = ۵ + ۵۵ + ۵۵۵ + ... ن رقموں تک

$$= ۵\{1 + 11 + 111 + \dots\dots \text{ن رقموں تک}\}$$

$$= \frac{۵}{۹}\{۹ + ۹۹ + ۹۹۹ + \dots\dots \text{ن رقموں تک}\}$$

$$= \frac{۵}{۹}\{(1۰-1) + (1۰۰-1) + (1۰۰۰-1) + \dots \text{ن رقموں تک}\}$$

$$= \frac{۵}{۹}\{(1۰ + 1۰^2 + 1۰^3 + \dots \text{ن رقموں تک}) - ن\}$$

$$= \frac{۵}{۹}\left\{\frac{1۰(1۰^ن-1)}{1۰-1} - ن\right\} = \frac{۵۰}{۸1}(1۰^ن-1) - \frac{۵ن}{۹}$$

مثال ۳ — سلسلہ ۱ + ۵ + ۱۳ + ۲۹ + ...کو ن رقموں تک جمع کرو۔

فرض کرو کہ $ق_ن$ سے سلسلہ مجوزہ کی ن ویں رقم تعبیر ہوتی ہے

اور ص = حاصل جمع مطلوب

ص = ۱ + ۵ + ۱۳ + ۲۹ + ... + $ق_{ن}$

نیز ص = ۰ + ۱ + ۵ + ۱۳ + ... + $ق_{ن-۱}$ + $ق_{ن}$

تفریق سے ۰ = (۱ + ۴ + ۸ + ۱۶ + ... ن رقموں تک) - $ق_{ن}$

اسلئے $ق_{ن}$ = ۱ + {۴ + ۸ + ۱۶ + ... $\overline{ن-۱}$ رقموں تک}

$= ۱ + \frac{۴(۲^{ن-۱}-۱)}{۲-۱} = ۱ + ۲^{۲} \times (۲^{ن-۱}-۱) = ۲^{ن+۱}-۳$

اسلئے پہلی رقم = $۲^{۲}-۳$، دوسری رقم = $۲^{۳}-۳$، تیسری رقم = $۲^{۴}-۳$، اور علیٰ ہذا القیاس

اسلئے ص $= (۲^{۲}-۳) + (۲^{۳}-۳) + (۲^{۴}-۳) + ... + (۲^{ن+۱}-۳)$

= ($۲^{۲} + ۲^{۳} + ۲^{۴}$ + ... ن رقموں تک) - ۳ن

$= \frac{۲^{۲}(۲^{ن}-۱)}{۲-۱} - ۳ن = ۴(۲^{ن}-۱) - ۳ن$

مثال ۴ - سلسلہ ۲ + ۴ + $\frac{۱۴}{۳}$ + $\frac{۴۴}{۹}$ + ... کو ن رقموں تک جمع کرو۔

فرض کرو کہ $ق_{ن}$ = ن ویں رقم، ص = ن رقموں کا حاصل جمع -

ص = ۲ + ۴ + $\frac{۱۴}{۳}$ + $\frac{۴۴}{۹}$ + ... + $ق_{ن}$

نیز ص = ۰ + ۲ + ۴ + $\frac{۱۴}{۳}$ + ... + $ق_{ن-۱}$ + $ق_{ن}$

اسلئے تفریق سے ۰ = (۲ + ۲ + $\frac{۲}{۳}$ + $\frac{۲}{۹}$ + ... ن ارقام تک) - $ق_{ن}$

اسلئے $ق_{ن}$ = ۲ + ۲{۱ + $\frac{۱}{۳}$ + $\frac{۱}{۹}$ + ... $\overline{ن-۱}$ ارقام تک}

$$= 2 + 2\,\frac{\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{\text{ن}-1}\right\}}{1-\frac{1}{3}} = 5 - \frac{1}{3^{\text{ن}-2}}$$

اسلئے پہلی رقم $= 5 - \frac{1}{3^{-1}}$، دوسری رقم $= 5 - \frac{1}{3^{0}}$

تیسری رقم $= 5 - \frac{1}{3}$، چوتھی رقم $= 5 - \frac{1}{3^{2}}$ اور علیٰ ہذا القیاس

اسلئے $\text{ص} = 5\text{ن} - \left\{\frac{1}{3^{-1}} + \frac{1}{3^{0}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^{2}} + \ldots\ \text{ن رقم تک}\right\}$

$$= 5\text{ن} - \frac{1}{3^{-1}} \times \frac{\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{\text{ن}}\right\}}{1-\frac{1}{3}} = 5\text{ن} - 3 \times \frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{\text{ن}}\right\}$$

$$= 5\text{ن} - \frac{9}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{\text{ن}}}\right)$$

مثال ۵ — اگر کسی سلسلہ ہندسیہ کی پ ویں، ق ویں، ر ویں ارقام بالترتیب عہ و بہ و صہ ہوں تو عہ و بہ و صہ کا باہمی ربط دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ا = رقم اول، ب = نسبت مشترک

$\text{عہ} = \text{ا ب}^{\text{پ}-1}$ .... (۱)

$\text{بہ} = \text{ا ب}^{\text{ق}-1}$ .... (۲)

$\text{صہ} = \text{ا ب}^{\text{ر}-1}$ .... (۳)

اب ہمیں ا اور ب کو ان معادلات سے ساقط کرنا ہے

(۱) کو (۲) پر اور (۲) کو (۳) پر تقسیم کرو۔

پس $\frac{\text{عہ}}{\text{بہ}} = \text{ب}^{\text{پ}-\text{ق}}$ اور $\frac{\text{بہ}}{\text{صہ}} = \text{ب}^{\text{ق}-\text{ر}}$

اسلئے $\left(\frac{\text{عہ}}{\text{بہ}}\right)^{\text{ق}-\text{ر}} = \{\text{ب}\}^{(\text{پ}-\text{ق})(\text{ق}-\text{ر})}$ اور اسلئے $= \left(\frac{\text{بہ}}{\text{صہ}}\right)^{\text{پ}-\text{ق}}$

∴ عہ$^{ق-ر}$ × صہ$^{پ-ق}$ = بہ$^{پ-ق}$ × بہ$^{ق-ر}$ = بہ$^{پ-ر}$

اسلئے عہ$^{ق-ر}$ × بہ$^{ر-پ}$ × صہ$^{پ-ق}$ = ۱

مثال ۶ — اگر ا و ب و ج و د سلسلہ ہندسیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ

(ا - د)^{۲} = (ب - ج)^{۲} + (ج - ا)^{۲} + (د - ب)^{۲}

نسبت مشترک = $\frac{ب}{ا}$ = $\frac{ج}{ب}$ = $\frac{د}{ج}$

اسلئے ب^{۲} = اج و ج^{۲} = ب د و ب ج = اد ..... (۱)

اسلئے (ب - ج)^{۲} + (ج - ا)^{۲} + (د - ب)^{۲}

= (ب^{۲} + ج^{۲} - ۲ ب ج) + (ج^{۲} + ا^{۲} - ۲ اج) + (د^{۲} + ب^{۲} - ۲ د ب)

= ۲ (ب^{۲} - اج) + ۲ (ج^{۲} - ب د) + ا^{۲} + د^{۲} - ۲ ب ج

= ۲ × ۰ + ۲ × ۰ + ا^{۲} + د^{۲} - ۲ اد {بموجب ۱}

= (ا - د)^{۲}

مثال ۷ — اگر ن اواسط ہندسیہ دو مقادیر ا اور ج کے درمیان مندرج کی جائیں تو ثابت کرو کہ اُن کا حاصل ضرب = (اج)$^{\frac{ن}{۲}}$

فرض کرو کہ اب و اب^{۲} و .... اب^{ن} اواسط ہندسیہ ہیں تب ج = اب$^{ن+۱}$

اسلئے حاصل ضرب اواسط = (اب)(اب^{۲})(اب^{۳}) .... (اب^{ن})

= ا^{ن} × ب$^{۱+۲+۳+.....+ن}$ = ا^{ن} × ب$^{\frac{ن(ن+۱)}{۲}}$

= ا$^{\frac{ن}{۲}}$ (اب$^{ن+۱}$)$^{\frac{ن}{۲}}$ = ا$^{\frac{ن}{۲}}$ × ج$^{\frac{ن}{۲}}$ = (اج)$^{\frac{ن}{۲}}$

مثال ۸ — سلسلہ غیر متناہی اب + (ا + اد) ب^{۲} + (ا + اد + اد^{۲}) ب^{۳} + ...

کا مجموعہ دریافت کرو۔ اُس میں د اور ب دونوں ایک سے کم ہیں۔

فرض کرو کہ ص_{∞} = مجموعہ سلسلہ لانہایت

$\text{ص}_{\infty} = \text{ا ب} + \text{ا(ا + د) ب}^{۲} + \text{ا(ا + د + د}^{۲}\text{) ب}^{۳} + \ldots\ldots$

اسلئے $\text{ص}_{\infty}\text{(ا - د)} = \text{ا ب(ا - د)} + \text{ا(ا - د}^{۲}\text{) ب}^{۲} + \text{ا(ا - د}^{۳}\text{) ب}^{۳} + \ldots\ldots$

$= \text{ا ب (ا + ب + ب}^{۲} + \ldots\ldots\text{)} - \text{ا ب د (ا + ب د + ب}^{۲}\text{د}^{۲} + \ldots\ldots\text{)}$

$$= \frac{\text{ا ب}}{\text{ا - ب}} - \frac{\text{ا ب د}}{\text{ا - ب د}} = \frac{\text{ا ب (ا - د)}}{\text{(ا - ب)(ا - ب د)}}$$

اسلئے $\text{ص}_{\infty} = \dfrac{\text{ا ب}}{\text{(ا - ب)(ا - ب د)}}$

امثلہ نمبری ۷

۱ ۔ سلسلہ $۱ + ۲\text{ا} + ۳\text{ا}^{۲} + ۴\text{ا}^{۳} + \ldots\ldots$ کون رقموں تک جمع کرو

۲ ۔ " $۱ + \frac{۳}{۴} + \frac{۷}{۱۶} + \frac{۱۵}{۶۴} + \frac{۳۱}{۲۵۶} + \ldots\ldots$ کو لاتناہی تک "

۳ ۔ " $۱ + ۳\text{لا} + ۵\text{لا}^{۲} + ۷\text{لا}^{۳} + ۹\text{لا}^{۴} + \ldots$ کو لاتناہی تک "

اس میں لا < ۱

۴ ۔ " $۱ + \frac{۲}{۲} + \frac{۳}{۲^{۲}} + \frac{۴}{۲^{۳}} + \ldots\ldots$ کون رقموں تک "

۵ ۔ " $۱ + \frac{۳}{۲} + \frac{۵}{۴} + \frac{۷}{۸} + \ldots\ldots$ کو لاتناہی تک "

۶ ۔ " $۱ + ۳\text{لا} + ۶\text{لا}^{۲} + ۱۰\text{لا}^{۳} + \ldots\ldots$ کو لاتناہی تک "

اس میں لا < ۱

۷ ۔ کسی سلسلہ ہندسیہ کی پہلی رقم ا ہے اور تیسری رقم ج ۔ ثابت کرو کہ اس سلسلہ کی (ن + ۱) ویں رقم برابر ہوگی اُس سلسلہ ہندسیہ

کی (۲ ن + ۱) ویں رقم کے جس کی پہلی رقم ا ہو اور پانچویں رقم ج۔

۸ - ایک سلسلہ ہندسیہ کی پہلی رقم ا ہے اور نسبت مشترک ب۔ اگر اس کی ۲ ن ارقام کا مجموعہ ایک ایسے سلسلہ کی ن ارقام کے مجموعہ کے برابر ہو جس کی پہلی رقم ج ہو اور نسبت مشترک $ب^2$ تو ثابت کرو کہ ج سلسلہ اول کی پہلی دو ارقام کے مجموعہ کے برابر ہے

۹ - سلسلہ غیر متناہی ا + (ا + د) ب + (ا + د + $د^2$) $ب^2$ + (ا + د + $د^2$ + $د^3$) $ب^3$ + ... کا مجموعہ دریافت کرو اس میں د اور ب کسور واجب ہیں۔

۱۰ - سلسلہ ہندسیہ میں تین اعداد کا مجموعہ ۷۰ ہے اگر طرفین میں سے ہر ایک کو ۴ سے اور اوسط کو ۵ سے ضرب دیدی جائے تو یہ حاصل ضرب سلسلہ حسابیہ میں ہوتے ہیں اعداد دریافت کرو۔

۱۱ - کسی غیر متناہی سلسلہ ہندسیہ کی پہلی دو ارقام کا مجموعہ ۵ ہے اور ہر ایک رقم اپنے مابعد کی تمام رقموں کے مجموعہ کی ۳ گنی ہے سلسلہ دریافت کرو۔

۱۲ - تین اعداد سلسلہ ہندسیہ میں ہیں اُن میں سے ایسے تین اعداد منفی کر دئے گئے ہیں جو خود سلسلہ ہندسیہ میں ہیں اور دیکھا گیا ہے کہ باقی ماندہ تین اعداد بھی سلسلہ ہندسیہ میں ہیں - ثابت کرو کہ ان تینوں سلسلوں کی نسبت مشترک ایک ہی ہے۔

۱۳ - اگر کسی سلسلہ ہندسیہ میں م = مجموعہ ن ارقام و ض = حاصلضرب ن ارقام اور ق = سلسلہ کی ن ارقام کے مقلوبوں کا مجموعہ تو ثابت کرو کہ

$$ض^{۲} = \left(\frac{م}{ق}\right)^{ن}$$

۱۴- کسی سلسلہ کی دویں رقم (۲د + ۱)۲^{د} ہے اُس کی ن ارقام کا مجموعہ دریافت کرو۔ ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو۔

۱۵- لا + ا د لا^{۲} + ۲ ا د لا^{۳} + ۳ ا د ...... کو ن ارقام تک

۱۶- لا (لا + ما) + لا^{۲} (لا^{۲} + ما^{۲}) + لا^{۳} (لا^{۳} + ما^{۳}) + ... کو ن ارقام تک

۱۷- ا + $\frac{۱}{۳}$ د ۳ ا - $\frac{۱}{۶}$ د ۵ ا + $\frac{۱}{۱۲}$ د .... کو ۲ع ارقام تک

۱۸- $\frac{۲}{۳}$ + $\frac{۳}{۳^{۲}}$ + $\frac{۲}{۳^{۳}}$ + $\frac{۳}{۳^{۴}}$ + $\frac{۲}{۳^{۵}}$ + $\frac{۳}{۳^{۶}}$ + ... کو لاتناہی تک

۱۹- سلسلہ $\frac{۴}{۷}$ - $\frac{۵}{۷^{۲}}$ + $\frac{۴}{۷^{۳}}$ - $\frac{۵}{۷^{۴}}$ + $\frac{۴}{۷^{۵}}$ - $\frac{۵}{۷^{۶}}$ ... کو لاتناہی تک

۲۰- ″ ۴ + ۴۴ + ۴۴۴ + ... کو ن رقموں تک جمع کرو

۲۱- ″ ۸ + ۸۸ + ۸۸۸ + ... کو ۸ ″ ″

۲۲- ″ ۶ + ۶۶ + ۶۶۶ + ... کو ۹ ″ ″

۲۳- ″ ٫۹ + ٫۹۹ + ٫۹۹۹ + ... کو ن ″ ″

۲۴- ″ ۱ + ۷ + ۲۵ + ۷۹ + ۲۴۱ + ... کو ن ″ ″

۲۵- ″ ۰ + ۶ + ۲۴ + ۷۸ + ۲۴۰ + ... کو ن ″ ″

۲۶- ″ -۶ - ۴ + ۰ + ۸ + ۲۴ + ... کو ن ″ ″

۲۷- ″ ۳ + ۶ + ۱۱ + ۲۰ + ۳۷ + ۷۰ + ... کی ن ویں رقم نیز مجموعہ ن ارقام دریافت کرو۔

۲۸- اگر ا اور د کا اوسط حسابی اُن کے اوسط ہندسی کا دوچند ہو تو ثابت کرو کہ ا : د = ۲ + $\sqrt{۳}$: ۲ - $\sqrt{۳}$

۲۹۔ کسی سلسلہ کی ہر ایک جفت رقم اپنی رقم ماقبل کی ا گنی ہے اور ہر ایک طاق رقم اپنی رقم ماقبل کی ج گنی ہے۔ رقم اوّل ایک ہے ۲ ن ارقام تک اس سلسلہ کا حاصل جمع دریافت کرو۔

۳۰۔ اگر کسی سلسلہ ہندسیہ کی پہلی رقم = ا نسبت مشترک = ب اور حاصل جمع ن ارقام = $ص_{ن}$ تو $ص_{۱}$ و $ص_{۳}$ و $ص_{۵}$ و .... $ص_{۲ن-۱}$ کا مجموعہ دریافت کرو۔

۳۱۔ اگر $ص_{۱}$ و $ص_{۲}$ و $ص_{۳}$ و ...... $ص_{پ}$ سے غیر متناہی ہندسی سلسلوں کے مجموعے تعبیر کئے جائیں اور اگر ان سلسلوں کی پہلی رقمیں ۱ و ۲ و ۳ و .... پ ہوں اور ان کی مشترک نسبتیں بالترتیب $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۴}$ و ...... $\frac{۱}{پ+۱}$ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ص_{۱} + ص_{۲} + ص_{۳} + \cdots\cdots + ص_{پ} = \frac{پ}{۲}(پ + ۳)$$

۳۲۔ اگر ب مثبت ہو اور ایک سے کم ہو اور م مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ $(۲م + ۱)\ ب^{م}(۱ - ب) < ۱ - ب^{۲م+۱}$

اس سے ثابت کرو کہ جب ن لاانتہا بڑا ہو تو ن $ب^{ن}$ لاانتہا چھوٹا ہوگا۔

باب ششم

سلسلۂ موسیقیہ

۷۱ ۔ تعریف ۔ تین مقادیر ا و ب و ج سلسلہ موسیقیہ میں کہلاتی ہیں اگر اُن کا باہمی ربط $\frac{ا}{ج} = \frac{ا - ب}{ب - ج}$ ہو یعنی پہلی مقدار کو تیسری مقدار سے وہی نسبت ہو جو پہلی اور دوسری کے حاصل تفریق کو دوسری اور تیسری کے حاصل تفریق سے ہے

ایک سلسلہ مقادیر سلسلہ موسیقیہ کہلاتا ہے جب اُس کی کوئی سی تین متصل ارقام میں مذکورہ بالا ربط موجود ہو ۔

۷۲ ۔ اگر مقادیر سلسلہ موسیقی میں ہوں تو ان کے متکافی یا مقلوب سلسلہ حسابیہ میں ہونگے ۔

بموجب تعریف اگر ا و ب و ج سلسلہ موسیقی میں ہوں تو

$$\frac{ا}{ج} = \frac{ا - ب}{ب - ج}$$

$$\therefore ا(ب - ج) = ج(ا - ب)$$

ہر ایک رقم کو ا ب ج پر تقسیم کرنے سے

$\frac{۱}{ج} - \frac{۱}{ب} = \frac{۱}{ب} - \frac{۱}{ا}$ جس سے مسئلہ ثابت ہوا ۔

ظاہر ہے کہ ا و $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۱}{۵}$ و ....

اور $\frac{۱}{۲}$ و $-\frac{۱}{۳}$ و $-\frac{۱}{۸}$ و $-\frac{۱}{۱۳}$ و $-\frac{۱}{۱۸}$ و ....

موسیقی سلسلے ہیں کیونکہ انکی رقموں کے متکافی ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و...

اور ۲ و -۳ و -۸ و -۱۳ و -۱۸ و ...... حسابیہ سلسلے ہیں۔

چونکہ سلسلۂ موسیقی سلسلہ حسابیہ کی ارقام کو الٹانے سے حاصل ہوتا ہے اسلئے سلسلۂ موسیقی کی صورت عامہ یہ ہے۔

$$\frac{۱}{ا+ف}،\ \frac{۱}{ا+۲ف}،\ \frac{۱}{ا+۳ف}،\ ....\ \frac{۱}{ا+(ن-۱)ف}$$

کیونکہ اس میں صرف دو بے تعلق مستقل مقادیر شامل ہیں اور انکے متکافی سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر سلسلہ حسابیہ کی رقم اول اور فرق مشترک (یعنی صرف دو مقادیر) معلوم ہوں تو تمام سلسلہ دریافت ہوسکتا ہے اس امر کو مدنظر رکھ کر ہم حسابی سلسلوں کو جن میں بالترتیب ۳، ۴، ۵، ۶، ارقام شامل ہوں بنہایت مختصر اور عام صورت میں رکھ سکتے ہیں۔ مثلاً

ا-ب، ا، ا+ب،

ا-۳ب، ا-ب، ا+ب، ا+۳ب،

ا-۲ب، ا-ب، ا، ا+ب، ا+۲ب،

وغیرہ

جہاں ا اور ب کوئی دو مقادیر ہیں۔ اسی طرح سے جن موسیقی سلسلوں میں بالترتیب ۳، ۴، ۵، رقوم شامل ہوں اُن کی بنہایت مختصر اور عام صورتیں حسب ذیل ہونگی۔

$$\frac{۱}{ا-ب}،\ \frac{۱}{ا}،\ \frac{۱}{ا+ب}،$$

$$\frac{۱}{ا-۳ب}،\ \frac{۱}{ا-ب}،\ \frac{۱}{ا+ب}،\ \frac{۱}{ا+۳ب}،$$

$$\frac{۱}{ا-۲ب}،\ \frac{۱}{ا-ب}،\ \frac{۱}{ا}،\ \frac{۱}{ا+ب}،\ \frac{۱}{ا+۲ب}،$$

وغیرہ

خواص موسیقیہ زیادہ تر علم ہندسہ اور علم صوت میں کار آمد ہیں جبر مقابلہ میں صرف مسئلہ دفعہ سابق کام کا ہے ۔ اگر مقادیر سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو اُن کا حاصل جمع دریافت کرنے کے لئے کوئی عام قاعدہ نہیں ہے سلسلہ موسیقی کے سوالات رقوم کو اُلٹا کر سلسلہ حسابیہ کی استعانت سے حل ہوتے ہیں ۔

۴۷ ـــــ اواسط موسیقیہ

تعریف ۱۔ اگر تین مقادیر ا دی و ب ایسی ہوں کہ اُن کے منکافی $\frac{۱}{ا}$ و $\frac{۱}{ی}$ و $\frac{۱}{ب}$ سلسلہ حسابیہ میں ہوں ۔ تو ی کو ا اور ب کا اوسط موسیقی کہتے ہیں ۔

تعریف ۲۔ اگر کوئی سی تعداد مقادیر $ی_۱$ و $ی_۲$ و $ی_۳$ ...... $ی_ن$ ایسی ہو کہ $\frac{۱}{ا}$ و $\frac{۱}{ی_۱}$ و $\frac{۱}{ی_۲}$ و $\frac{۱}{ی_۳}$ و ...... و $\frac{۱}{ی_ن}$ و $\frac{۱}{ب}$ ایک سلسلہ حسابیہ ہو تو مقادیر $ی_۱$ و $ی_۲$ و $ی_۳$ ...... و $ی_ن$ کو ا اور ب کے اواسط موسیقیہ کہتے ہیں ۔

۴۸ ـــ دو مقادیر کا اوسط موسیقی دریافت کرو ۔

فرض کرو کہ ا اور ب مقادیر معلومہ ہیں اور ی ان کا اوسط موسیقی ہے تب $\frac{۱}{\text{ا}}$ و $\frac{۱}{\text{ی}}$ و $\frac{۱}{\text{ب}}$ سلسلہ حسابیہ میں ہیں

اسلئے $\frac{۱}{\text{ی}} - \frac{۱}{\text{ا}} = \frac{۱}{\text{ب}} - \frac{۱}{\text{ی}}$

$$\frac{۲}{\text{ی}} = \frac{۱}{\text{ا}} + \frac{۱}{\text{ب}}$$

اسلئے $\text{ی} = \frac{۲\,\text{ا ب}}{\text{ا} + \text{ب}}$

مثال ۱ - ۵ اور $\frac{۵}{۶}$ کے درمیان ۲۰ اوسط موسیقی مندرج کرو

فرض کرو کہ اوسط مطلوبہ $\text{ی}_۱$ و $\text{ی}_۲$ و $\text{ی}_۳$ و ...... $\text{ی}_{۲۰}$ ہیں-

تب $\frac{۱}{۵}$ و $\frac{۱}{\text{ی}_۱}$ و $\frac{۱}{\text{ی}_۲}$ و $\frac{۱}{\text{ی}_۳}$ و ..... $\frac{۱}{\text{ی}_{۲۰}}$ و $\frac{۶}{۵}$ سلسلہ حسابیہ میں ہیں

اگر ہم سلسلہ مندرجہ بالا کا فرق مشترک ب سے تعبیر کریں تو

$\frac{۶}{۵}$ = ۲۲ ویں رقم = $\frac{۱}{۵} + ۲۱\,\text{ب}$ جس سے $\text{ب} = \frac{۱}{۲۱}\left(\frac{۶}{۵} - \frac{۱}{۵}\right) = \frac{۱}{۲۱}$

اسلئے $\frac{۱}{\text{ی}_۱} = \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۲۱} = \frac{۲۶}{۱۰۵}$

$$\frac{۱}{\text{ی}_۲} = \frac{۱}{۵} + \frac{۲}{۲۱} = \frac{۳۱}{۱۰۵}$$

$$\frac{۱}{\text{ی}_۳} = \frac{۱}{۵} + \frac{۳}{۲۱} = \frac{۳۶}{۱۰۵}$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\frac{۱}{\text{ی}_{۲۰}} = \frac{۶}{۵} - \frac{۱}{۲۱} = \frac{۱۲۱}{۱۰۵}$$

اسلئے اوسط مطلوبہ $\frac{۱۰۵}{۲۶}$ و $\frac{۱۰۵}{۳۱}$ و $\frac{۱۰۵}{۳۶}$ و .... و $\frac{۱۰۵}{۱۲۱}$ ہیں

مثال ۲ ـ ۱ اور $\frac{۱}{۲۰}$ کے درمیان ۱۸ اوساط موسیقیہ مندرج کرو۔

فرض کرو کہ $ی_۱$ و $ی_۲$ و $ی_۳$ و ...... $ی_{۱۸}$ اوساط مطلوبہ ہیں۔

تب ۱ و $\frac{۱}{ی_۱}$ و $\frac{۱}{ی_۲}$ و $\frac{۱}{ی_۳}$ و ...... $\frac{۱}{ی_{۱۸}}$ و ۲۰ سلسلہ حسابیہ میں ہیں

اگر بد = فرق مشترک تو ۲۰ = ۲۰ وین رقم = ۱ + ۱۹ بد جس سے

بد = ۱

اسلئے $\frac{۱}{ی_۱}$ = ۱ + بد = ۲ و $\frac{۱}{ی_۲}$ = ۱ + ۲ بد = ۳

$\frac{۱}{ی_۳}$ = ۱ + ۳ بد = ۴ و $\frac{۱}{ی_۴}$ = ۱ + ۴ بد = ۵ و ......

$\frac{۱}{ی_{۱۸}}$ = ۲۰ ـ بد = ۱۹

پس اوساط مطلوبہ $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۴}$ و ...... $\frac{۱}{۱۸}$ و $\frac{۱}{۱۹}$ ہیں

مثال ۳ ـ ۷ اور $\frac{۱}{۶}$ کے درمیان ۴۰ اوساط موسیقیہ مندرج کرو

چونکہ ۶ ایک ایسے سلسلہ حسابیہ کی ۴۲ وین رقم ہے جس کی رقم اول $\frac{۱}{۷}$ ہے اسلئے

۶ = $\frac{۱}{۷}$ + ۴۱ ف جہاں ف فرق مشترک ہے یعنی ف = $\frac{۱}{۷}$

پس اوساط حسابیہ $\frac{۲}{۷}$ و $\frac{۳}{۷}$ و ...... $\frac{۴۱}{۷}$ ہوئیں

اسلئے اوساط موسیقیہ $۳\frac{۱}{۲}$ و $۲\frac{۱}{۳}$ و ۲ و ...... $\frac{۷}{۴۱}$ ہیں

مثال ۴ ـ سلسلہ $\frac{۲}{۹}$ و $\frac{۴}{۱۷}$ و $\frac{۱}{۴}$ وغیرہ کی ساتویں رقم دریافت کرو

ارقام کے متکافی $\frac{۱۸}{۴}$ و $\frac{۱۷}{۴}$ و $\frac{۱۶}{۴}$ وغیرہ سلسلہ حسابیہ میں ہیں

جس سے ظاہر ہے کہ سلسلہ مجوزہ موسیقی ہے۔ اور اسلئے اس کی ساتویں رقم سلسلہ حسابیہ $\frac{۱۸}{۴}$ و $\frac{۱۷}{۴}$ و $\frac{۱۶}{۴}$ وغیرہ کی ساتویں رقم کے مقلوب کے برابر ہے

اب چونکہ اس سلسلہ کا فرق مشترک = − $\frac{۱}{۴}$ اور رقم اول = $\frac{۱۸}{۴}$

اسلئے ساتویں رقم = $\frac{۱۸}{۴}$ − $\frac{۱}{۴}$ × ۶ = $\frac{۱۲}{۴}$ = ۳ اسلئے سلسلہ مجوزہ کی ساتویں رقم = $\frac{۱}{۳}$

مثال ۵ ۔ ایک سلسلہ موسیقیہ کی پانچویں رقم $\frac{۲}{۵}$ ہے اور نویں رقم $\frac{۱}{۲}$ اُس کی پہلی تین رقمیں دریافت کرو۔

فرض کرو کہ مقابل کے سلسلہ حسابیہ کی پہلی رقم ا ہے اور فرق مشترک ف

تب $\frac{۵}{۲}$ = سلسلہ حسابیہ کی پانچویں رقم = ا + ۴ ف ....(۱)

اور ۲ = سلسلہ حسابیہ کی نویں رقم = ا + ۸ ف ....(۲)

(۲) سے (۱) کو تفریق کرنے سے ۴ ف = − $\frac{۱}{۲}$ اسلئے ف = − $\frac{۱}{۸}$

اسلئے (۲) سے ا = ۲ − ۸ ف = ۳

پس مقابل کے سلسلہ حسابیہ کی پہلی تین ارقام ۳ و ۳ − $\frac{۱}{۸}$ و ۳ − $\frac{۲}{۸}$

یعنی ۳ و $\frac{۲۳}{۸}$ و $\frac{۱۱}{۴}$ ہوئیں۔

اسلئے سلسلہ موسیقیہ کی پہلی تین رقمیں $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۸}{۲۳}$ و $\frac{۴}{۱۱}$ ہوئیں

مثال ۶ ۔ ایک سلسلہ موسیقیہ کی پہلی اور دوسری ارقام بالترتیب ا اور ب ہیں اُس کی ن ویں رقم دریافت کرو جواب $\frac{ا ب}{ب + (ن - ۱)(ا - ب)}$

مثال ۷ ۔ سلسلہ ۴ + ۴$\frac{۲}{۷}$ + ۴$\frac{۸}{۱۳}$ + ۵ + وغیرہ کی ن ویں رقم دریافت کرو

جواب $\frac{۶۰}{۱۶ - ن}$

۵۷ ۔ دو مثبت حقیقی مقادیر ا اور ب کے درمیان حسابی، ہندسی اور موسیقی اواسط بالترتیب ح و ھ و م ہیں اُن کا باہمی ربط دریافت کرو۔

ہمیں معلوم ہے کہ ح = $\frac{ا + ب}{۲}$ ....(۱)

$ه = \sqrt{اب}$ .... (۲)

اور $م = \frac{۲اب}{ا+ب}$ .... (۳)

اسلئے $ح م = \frac{ا+ب}{۲} \times \frac{۲اب}{ا+ب} = اب = ه^۲$

یعنی $ح م = ه^۲$ یا $\frac{ه}{ح} = \frac{م}{ه}$ جس سے ظاہر ہے کہ ه اوسط ہندسی ہے ح اور م کے درمیان۔

یعنی ح ، ه ، م سلسلہ ہندسیہ میں ہیں یا تناسب مسلسل میں۔

نیز $ح - ه = \frac{ا+ب}{۲} - \sqrt{اب} = \frac{ا+ب-۲\sqrt{اب}}{۲}$

$= \left(\frac{\sqrt{ا} - \sqrt{ب}}{\sqrt{۲}}\right)^۲$ جو کہ مثبت ہے اگر ا اور ب مثبت مقادیر ہوں۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ دو حقیقی مثبت مقادیر کا اوسط حسابی ان کے اوسط ہندسی سے بڑا ہوتا ہے۔

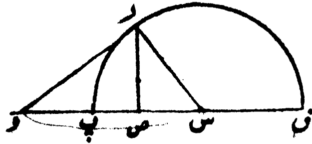
نیز مساوات $ه^۲ = ح م$ سے ہم دیکھتے ہیں کہ ه کی قیمت ح اور م کے درمیان واقع ہے اور یہ اوپر ثابت ہو چکا ہے کہ $ح > ه$ اسلئے معلوم ہوا کہ دو حقیقی مثبت مقادیر کے تین اواسط یعنی حسابیہ ہندسیہ اور موسیقیہ ترتیب متنازلہ میں ہوتے ہیں۔

یعنی $ح > ه > م$

۷۶ — اواسط ح ، ه ، م کی تعبیر ہندسیہ

ایک خط مستقیم وپ ق پر وپ اور وق اُن دو مقادیر کے برابر بناؤ جن کے اواسط مطلوب ہیں۔ پ ق کی تنصیف س پر کرو

پ ق پر ایک نصف دائرہ پ ر ق بناؤ مماس و ر کھینچو اور



پ ق پر عمود ر ص نکالو۔

اب و پ + و ق = (و س - س پ) + (و س + س ق)

= ۲ و س

∴ و پ اور و ق کے درمیان و س اوسط حسابی ہے

اب و پ × و ق = و ر^{2}

اسلئے معلوم ہوا کہ و پ اور و ق کے درمیان و ر اوسط ہندسی ہے

نیز $\frac{\text{۲ و پ × و ق}}{\text{و پ + و ق}} = \frac{\text{۲ و ر}^2}{\text{۲ و س}}$

$= \frac{\text{و ص × و س}}{\text{و س}} = \text{و ص}$

اسلئے معلوم ہوا کہ و پ اور و ق کے درمیان و ص اوسط موسیقی ہے

۷ ے — تین مقادیر ا و ب و ج سلسلۂ حسابیہ، ہندسیہ، موسیقیہ میں ہوں گی اگر بالترتیب

$\frac{\text{ا - ب}}{\text{ب - ج}} = \frac{\text{ا}}{\text{ا}}$ ، $\frac{\text{ا - ب}}{\text{ب - ج}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{ا - ب}}{\text{ب - ج}} = \frac{\text{ا}}{\text{ج}}$

صورت اول $\frac{ا - ب}{ب - ج} = \frac{ا}{ا} = ۱ \therefore ب = \frac{ا + ج}{۲}$

صورت دوم $\frac{ا - ب}{ب - ج} = \frac{ا}{ب}$ یعنی $ا(ب - ج) = ب(ا - ب)$

یعنی $ب^{۲} = ا ج$

صورت سوم $\frac{ا - ب}{ب - ج} = \frac{ا}{ج}$ تعریف سے ظاہر ہے

۸۷ـــ سلسلوں کے متفرق سوالات کے حل کرنے میں عام عقل اور فراست کے لئے کافی جگہ ہے ذیل کے چند اشارات طالب علم کو مفید ثابت ہونگے ۔

(۱) اگر سلسلہ حسابیہ کی تمام رقموں میں ایک ہی مقدار جمع یا منفی کردی جائے تو ایک نیا سلسلہ حسابیہ پیدا ہوگا جس کا فرق مشترک وہی ہوگا جو اصلی سلسلے کا تھا۔

(۲) اگر سلسلہ حسابیہ کی تمام رقموں کو ایک ہی مقدار میں ضرب دیدی جائے یا ایک ہی مقدار پر تقسیم کردیا جائے تو ایک نیا سلسلہ حسابیہ پیدا ہوگا۔ مگر اس کا فرق مشترک وہ نہ ہوگا جو اصلی سلسلہ حسابیہ کا تھا۔

(۳) اگر سلسلہ ہندسیہ کی تمام رقموں کو ایک ہی مقدار سے ضرب دیدی جائے یا ایک ہی مقدار پر تقسیم کردیا جائے تو ایک نیا سلسلہ ہندسیہ پیدا ہوگا۔ اور اس کی نسبت مشترک وہی ہو گی جو پہلے سلسلے کی تھی۔

(۴) اگر ا و ب و ج و د وغیرہ سلسلہ ہندسیہ میں ہوں تو وہ تناسب مسلسل میں ہونگے ۔

ہمیں تعریف سے معلوم ہے کہ

$\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{ج}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \dots\dots = \frac{\text{ا}}{\text{ر}}$ جہاں ر نسبت مشترک ہے

برعکس اس کے جو مقادیر تناسب مسلسل میں ہوں اُن کو ہم سلسلہ لا و لا ر و لا ر² و ..... سے تعبیر کر سکتے ہیں۔

مثال ۱ - اگر ا²، ب²، ج² سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ مقادیر ب + ج، ج + ا، ا + ب سلسلہ موسیقی میں ہوں گی۔

ہر ایک رقم پر اب + ب ج + ج ا زیادہ کرنے سے معلوم ہوگا کہ ا² + اب + ب ج + ج ا، ب² + اب + ب ج + ج ا و ج² + اب + ب ج + ج ا سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔

یعنی (ا + ب)(ا + ج)، (ب + ج)(ب + ا)، (ج + ا)(ج + ب) سلسلہ حسابیہ میں ہیں ہر ایک رقم کو (ا + ب)(ب + ج)(ج + ا) پر تقسیم کرو

پس $\frac{1}{\text{ب + ج}}$، $\frac{1}{\text{ج + ا}}$، $\frac{1}{\text{ا + ب}}$ سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔

یعنی ب + ج، ج + ا، ا + ب سلسلہ موسیقی میں ہیں

مثال ۲ - اگر کسی سلسلہ حسابیہ میں خ = آخری رقم، ف = فرق مشترک، ص = حاصل جمع ن ارقام اور ۸ ف ص = (ف + ۲خ)² تو ثابت کرو کہ ف = ۲ا جہاں ا رقم اول ہے۔

چونکہ مساوات مذکورہ بالا ہر ایک تعداد ارقام کے لئے درست ہے

اسلئے فرض کرو کہ ن = ۱ تب ا = خ = ص

ان قیمتوں کو مساوات میں رکھنے سے

صورت اول $\frac{ا - ب}{ب - ج} = \frac{ا}{ا} = ۱ \therefore ب = \frac{ا + ج}{۲}$

صورت دوم $\frac{ا - ب}{ب - ج} = \frac{ا}{ب}$ یعنی $ا(ب - ج) = ب(ا - ب)$

یعنی $ب^{۲} = ا ج$

صورت سوم $\frac{ا - ب}{ب - ج} = \frac{ا}{ج}$ تعریف سے ظاہر ہے

۸۷ — سلسلوں کے متفرق سوالات کے حل کرنے میں عام عقل اور فراست کے لئے کافی جگہ ہے ذیل کے چند اشارات طالب علم کو مفید ثابت ہونگے۔

(۱) اگر سلسلہ حسابیہ کی تمام رقموں میں ایک ہی مقدار جمع یا منفی کردی جائے تو ایک نیا سلسلہ حسابیہ پیدا ہوگا جس کا فرق مشترک وہی ہوگا جو اصلی سلسلے کا تھا۔

(۲) اگر سلسلہ حسابیہ کی تمام رقموں کو ایک ہی مقدار میں ضرب دیدی جائے یا ایک ہی مقدار پر تقسیم کردیا جائے تو ایک نیا سلسلہ حسابیہ پیدا ہوگا۔ مگر اس کا فرق مشترک وہ نہ ہوگا جو اصلی سلسلہ حسابیہ کا تھا۔

(۳) اگر سلسلہ ہندسیہ کی تمام رقموں کو ایک ہی مقدار سے ضرب دیدی جائے یا ایک ہی مقدار پر تقسیم کردیا جائے تو ایک نیا سلسلہ ہندسیہ پیدا ہوگا۔ اور اس کی نسبت مشترک وہی ہوگی جو پہلے سلسلے کی تھی۔

(۴) اگر ا و ب و ج و د وغیرہ سلسلہ ہندسیہ میں ہوں تو وہ تناسب مسلسل میں ہونگے۔

ہمیں تعریف سے معلوم ہے کہ

$$\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{ج}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \cdots\cdots = \frac{\text{ل}}{\text{ر}}$$ جہاں $\frac{\text{ل}}{\text{ر}}$ نسبت مشترک ہے

برعکس اس کے جو مقادیر تناسب مسلسل میں ہوں اُن کو ہم سلسلہ لا و لار و لار^{2} و..... سے تعبیر کر سکتے ہیں۔

مثال ۱ ۔ اگر ا^{2} و ب^{2} و ج^{2} سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ مقادیر ب + ج و ج + ا و ا + ب سلسلہ موسیقی میں ہوں گی۔

ہر ایک رقم پر اب + ب ج + ج ا زیادہ کرنے سے معلوم ہوگا کہ ا^{2} + اب + ب ج + ج ا و ب^{2} + اب + ب ج + ج ا و ج^{2} + اب + ب ج + ج ا سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔

یعنی (ا + ب)(ا + ج) و (ب + ج)(ب + ا) و (ج + ا)(ج + ب) سلسلہ حسابیہ میں ہیں ہر ایک رقم کو (ا + ب)(ب + ج)(ج + ا) پر تقسیم کرو

پس $\frac{1}{\text{ب + ج}}$ و $\frac{1}{\text{ج + ا}}$ و $\frac{1}{\text{ا + ب}}$ سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔

یعنی ب + ج و ج + ا و ا + ب سلسلہ موسیقی میں ہیں

مثال ۲ ۔ اگر کسی سلسلہ حسابیہ میں خ = آخری رقم، ف = فرق مشترک، ص = حاصل جمع ن ارقام اور ۸ ف ص = (ف + ۲خ)^{2} تو ثابت کرو کہ ف = ۲ا جہاں ا رقم اول ہے۔

چونکہ مساوات مذکورہ بالا ہر ایک تعداد ارقام کے لئے درست ہے

اسلئے فرض کرو کہ ن = ۱ تب ا = خ = ص

ان قیمتوں کو مساوات میں رکھنے سے

$۸ \text{اف} = (\text{ف} + ۲\text{ا})^۲$ یعنی $(\text{ف} - ۲\text{ا})^۲ = ۰$ یعنی $\text{ف} = ۲\text{ا}$

مثال ۳ ـ اگر کسی سلسلہ حسابیہ کی پ ویں، ق ویں، ر ویں، س ویں رقمیں سلسلہ ہندسیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ پ - ق و ق - ر و ر - س سلسلہ ہندسیہ میں ہیں -

شرائط سوال سے ظاہر ہے کہ $\frac{\text{ا} + (\text{پ} - ۱)\text{ف}}{\text{ا} + (\text{ق} - ۱)\text{ف}} = \frac{\text{ا} + (\text{ق} - ۱)\text{ف}}{\text{ا} + (\text{ر} - ۱)\text{ف}}$

$$= \frac{\text{ا} + (\text{ر} - ۱)\text{ف}}{\text{ا} + (\text{س} - ۱)\text{ف}}$$

اسلئے ہر ایک نسبت $= \frac{\{\text{ا} + (\text{پ} - ۱)\text{ف}\} - \{\text{ا} + (\text{ق} - ۱)\text{ف}\}}{\{\text{ا} + (\text{ق} - ۱)\text{ف}\} - \{\text{ا} + (\text{ر} - ۱)\text{ف}\}}$

$$= \frac{\{\text{ا} + (\text{ق} - ۱)\text{ف}\} - \{\text{ا} + (\text{ر} - ۱)\text{ف}\}}{\{\text{ا} + (\text{ر} - ۱)\text{ف}\} - \{\text{ا} + (\text{س} - ۱)\text{ف}\}} = \frac{\text{پ} - \text{ق}}{\text{ق} - \text{ر}} = \frac{\text{ق} - \text{ر}}{\text{ر} - \text{س}}$$

اسلئے ثابت ہوا کہ پ - ق و ق - ر و ر - س سلسلہ ہندسیہ میں ہیں -

مثال ۴ ـ اگر ا و ب و ج و د و ر سلسلہ موسیقی کی پانچ متصل ارقام ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(\text{ا} + \text{ر})(\text{ب} + \text{ج})(\text{ج} + \text{د}) = ۲\text{ج}(\text{ا} + \text{د})(\text{ب} + \text{ر})$$

فرض کرو کہ $\text{ا} = \frac{۱}{\text{ع} - ۲\text{ط}}$ و $\text{ب} = \frac{۱}{\text{ع} - \text{ط}}$ و $\text{ج} = \frac{۱}{\text{ع}}$ و $\text{د} = \frac{۱}{\text{ع} + \text{ط}}$ و

$$\text{ر} = \frac{۱}{\text{ع} + ۲\text{ط}}$$

اگر ا و ب و ج و د و ر کی یہ قیمتیں مساوات مذکورہ بالا میں رکھ دی جائیں تو $\left(\frac{۱}{\text{ع} - ۲\text{ط}} + \frac{۱}{\text{ع} + ۲\text{ط}}\right)\left(\frac{۱}{\text{ع} - \text{ط}} + \frac{۱}{\text{ع}}\right)\left(\frac{۱}{\text{ع}} + \frac{۱}{\text{ع} + \text{ط}}\right)$

$$= \frac{۲}{ع}\left(\frac{۱}{ع - ۲ط} + \frac{۱}{ع + ط}\right)\left(\frac{۱}{ع - ط} + \frac{۱}{ع + ۲ط}\right)$$

ظاہر ہے کہ مساوات کی ہر ایک طرف $= \frac{۲(۴ع^۲ - ط^۲)}{ع(ع^۲ - ط^۲)(ع^۲ - ۴ط^۲)}$

اسلئے ثابت ہوا کہ مساوات مذکورہ متماثلہ ہے۔

۷۹ ـ سلسلہ موسیقیہ کی متفرق مثالیں

مثال ۱ ـ اگر ا و ب و ج سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ

$ا^۲ + ج^۲ > ۲ب^۲$

چونکہ دو مقداروں کا اوسط ہندسی انکے اوسط موسیقی سے بڑا ہوتا ہے

اسلئے $\sqrt{اج} > ب$ یعنی $اج > ب^۲$

اب چونکہ $(ا - ج)^۲$ ایک مثبت مقدار ہے اسلئے $ا^۲ + ج^۲ > ۲اج$

اسلئے بوجوہات متحکم $ا^۲ + ج^۲ > ۲ب^۲$

مثال ۲ ـ اگر چار مثبت مقادیر ا و ب و ج و د سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ $ا + د > ب + ج$

اوسط موسیقی ا اور ج کے درمیان = ب

" " ب " د " " = ج

اب چونکہ دو مقادیر مثبت کا اوسط حسابی ان کے اوسط موسیقی سے بڑا ہوتا ہے اسلئے

$\frac{ا + ج}{۲} > ب$ اور $\frac{ب + د}{۲} > ج$

اسلئے $\frac{۱}{۲}(ا + د) + \frac{۱}{۲}(ب + ج) > ب + ج$

∴ ۱/۲ (ا + د) > ۱/۲ (ب + ج)

یعنی ا + د > ب + ج

مثال ۳ - اگر کسی سلسلۂ موسیقیہ کی پ ویں، ق ویں، ر ویں رقمیں بالترتیب ا و ب و ج ہوں تو ثابت کرو کہ (پ - ق) ا ب + (ق - ر) ب ج + (ر - پ) ج ا = ۰

چونکہ ا و ب و ج سلسلہ موسیقی کی پ ویں، ق ویں، ر ویں رقمیں ہیں اسلئے ۱/ا و ۱/ب و ۱/ج مقابل کے سلسلہ حسابیہ کی پ ویں، ق ویں، ر ویں رقمیں ہیں -

اگر اس سلسلہ حسابیہ کی رقم اول = عہ اور فرق مشترک = بہ تو

۱/ا = عہ + (پ - ۱) بہ = (عہ - بہ) + پ بہ ...... (۱)

۱/ب = عہ + (ق - ۱) بہ = (عہ - بہ) + ق بہ ...... (۲)

۱/ج = عہ + (ر - ۱) بہ = (عہ - بہ) + ر بہ ...... (۳)

اب (۱) کو (ق - ر) سے (۲) کو (ر - پ) سے اور (۳) کو (پ - ق) سے ضرب دو اور جمع کرو -

ایسا کرنے سے ۱/ا (ق - ر) + ۱/ب (ر - پ) + ۱/ج (پ - ق)

= (عہ - بہ) {(ق - ر) + (ر - پ) + (پ - ق)}

+ بہ {پ (ق - ر) + ق (ر - پ) + ر (پ - ق)} = ۰

اسلئے (ق - ر) ب ج + (ر - پ) ج ا + (پ - ق) ا ب = ۰

مثال ۴ - اگر مہ اور نہ ایک سلسلہ موسیقی کی م ویں اور ن ویں رقمیں ہوں تو اس کی (م + ن) ویں رقم دریافت کرو -

چونکہ مہ اور نہ سلسلہ موسیقی کی م اور ن ویں رقمیں ہیں اسلئے

$\frac{۱}{مہ}$ اور $\frac{۱}{نہ}$ مقابل کے سلسلہ حسابیہ کی م ویں اور ن ویں رقمیں ہوئیں
پس اگر مقابل کے سلسلہ حسابیہ کی رقم اول = ا اور فرق مشترک = ف تو

$$\frac{۱}{مہ} = ا + (م - ۱) ف \quad \ldots\ldots (۱)$$

$$\frac{۱}{نہ} = ا + (ن - ۱) ف \quad \ldots\ldots (۲)$$

(۱) کو م میں اور (۲) کو ن میں ضرب دینے اور تفریق کرنے سے

$$\frac{م}{مہ} - \frac{ن}{نہ} = (م - ن) ا + \{(م^۲ - ن^۲) - (م - ن)\} ف$$

$$= (م - ن) ا + (م - ن)(م + ن - ۱) ف$$

یا $\frac{م نہ - ن مہ}{مہ نہ} = (م - ن)\{ا + (م + ن - ۱) ف\}$

= (م - ن) × سلسلہ حسابیہ کی $\overline{م + ن}$ ویں رقم

∴ سلسلہ حسابیہ کی $\overline{م + ن}$ ویں رقم = $\frac{م نہ - ن مہ}{(م - ن) مہ نہ}$

اور اسلئے سلسلہ موسیقیہ کی $\overline{م + ن}$ ویں رقم = $\frac{(م - ن) مہ نہ}{م نہ - ن مہ}$

مثال ۵ — اگر ا، ب، ج سلسلۂ موسیقی میں ہوں تو ثابت کرو کہ

$\frac{ا}{ب + ج}$ ، $\frac{ب}{ج + ا}$ ، $\frac{ج}{ا + ب}$ بھی سلسلۂ موسیقی میں ہیں۔

$\frac{ا}{ب + ج}$ ، $\frac{ب}{ج + ا}$ ، $\frac{ج}{ا + ب}$ سلسلہ موسیقی میں ہیں

اگر $\frac{ب + ج}{ا}$ ، $\frac{ج + ا}{ب}$ ، $\frac{ا + ب}{ج}$ سلسلہ حسابیہ میں ہوں۔

یعنی اگر $\frac{ب + ج}{ا} + ۱$ ، $\frac{ج + ا}{ب} + ۱$ ، $\frac{ا + ب}{ج} + ۱$ سلسلہ حسابیہ میں ہوں

یعنی اگر $\frac{ا+ب+ج}{ا}$ و $\frac{ا+ب+ج}{ب}$ و $\frac{ا+ب+ج}{ج}$ سلسلہ حسابیہ میں ہوں

یعنی اگر $(ا+ب+ج)(\frac{1}{ب}-\frac{1}{ا})=(ا+ب+ج)(\frac{1}{ج}-\frac{1}{ب})$

" " $\frac{1}{ب}-\frac{1}{ا}=\frac{1}{ج}-\frac{1}{ب}$

" " $\frac{1}{ا}$ و $\frac{1}{ب}$ و $\frac{1}{ج}$ سلسلہ حسابیہ میں ہوں

" " ا و ب و ج سلسلہ موسیقی میں ہوں

جس سے نتیجہ مطلوب ثابت ہوتا ہے۔

امثلہ نمبری ۸

۱- ذیل کے ہر ایک سلسلہ کی چوتھی رقم دریافت کرو

(۱) ۲ و $۲\frac{۱}{۲}$ و $۳\frac{۱}{۳}$ و ....

(۲) ۲ و $۲\frac{۱}{۲}$ و ۳ و ....

(۳) ۲ و $۲\frac{۱}{۲}$ و $۳\frac{۱}{۸}$ و ....

۲- دو اوساط موسیقیہ ۵ اور ۱۱ کے درمیان مندرج کرو

۳- چار " " " $\frac{۲}{۳}$ اور $\frac{۲}{۱۳}$ " " "

۴- اگر دو اعداد کے درمیان ۱۲ اور $۹\frac{۳}{۵}$ بالترتیب ہندسی اور موسیقی اوسط ہوں تو اُن اعداد کو دریافت کرو۔

۵- اگر دو مقادیر کے اوسط موسیقی کی نسبت اُن کے اوسط ہندسی سے ۱۲ : ۱۳ ہو تو ثابت کرو کہ ان مقادیر کی باہمی نسبت ۴ : ۹ ہے۔

۶- اگر ا و ب و ج سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ

ا : ا - ب = ا + ج : ا - ج

۷ - اگر ایک سلسلہ موسیقی کی م ویں رقم ن ہو اور ن ویں رقم م ہو تو ثابت کرو کہ اُس کی (م + ن) ویں رقم $\frac{\text{م ن}}{\text{م + ن}}$ ہوگی۔

۸ - اگر ا اور ج کا اوسط موسیقی ب ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\text{ب - ا}} + \frac{1}{\text{ب - ج}} = \frac{1}{\text{ا}} + \frac{1}{\text{ج}}$$

۹ - سلسلہ موسیقیہ میں تین اعداد کا مجموعہ ۳۷ ہے اور اُن کے مربعوں کا مجموعہ ۴۶۹ اُنہیں دریافت کرو۔

۱۰ - دو اعداد کا اوسط حسابی اُن کے اوسط ہندسی سے بقدر $\frac{3}{2}$ کے زیادہ ہے اور اوسط ہندسی اُن کے اوسط موسیقی سے بقدر $\frac{6}{5}$ کے زیادہ ہے اعداد دریافت کرو

۱۱ - دو اعداد کے حسابی اور ہندسی اواسط کے مربعوں کا فرق ۴۰۰ ہے اور اُن کے ہندسی اور موسیقی اواسط کے مربعوں کا فرق ۱۴۴ ہے اعداد دریافت کرو۔

۱۲ - دو اعداد کے حسابی اور ہندسی اواسط کا فرق ۱۳ ہے اُن کے ہندسی اور موسیقی اواسط کا فرق ۱۲۰ ہے اعداد معلوم کرو۔

۱۳ - اگر ا اور ب کا اوسط حسابی انکے اوسط موسیقی کا م گنا ہو تو ثابت کرو کہ ا : ب = $\sqrt{\text{م}} + \sqrt{\text{م} - 1} : \sqrt{\text{م}} - \sqrt{\text{م} - 1}$

۱۴ - اگر ا و ب و ج سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{ا}^3 + \text{ج}^3 > 2\,\text{ب}^3$$

۱۵ - اگر ج ا و ا ب اور ا ب و ب ج اور ب ج و ج ا کے

درمیان عہ و بہ و جہ بالترتیب اواسط ہندسیہ ہوں اور ا و ب و ج سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ عہ^۲ و بہ^۲ و جہ^۲ سلسلہ حسابیہ میں ہیں، اور بہ + جہ و جہ + عہ و عہ + بہ سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔

۱۶۔ چار اعداد میں سے پہلے تین سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور آخری تین سلسلہ موسیقیہ میں ہیں ثابت کرو کہ اول : دوم = سوم : چہارم۔

۱۷۔ اگر ص$_1$ و ص$_2$ و ص$_3$ سے تین حسابی سلسلوں کے مجموعات ن ارقام تعبیر ہوں جن کی رقم اول ایک ہے اور جن کے فرق مشترک سلسلہ موسیقیہ میں ہیں تو ثابت کرو کہ

$$ن = \frac{۲ ص_۱ ص_۳ - ص_۱ ص_۲ - ص_۲ ص_۳}{ص_۱ - ۲ ص_۲ + ص_۳}$$

۱۸۔ اگر کسی سلسلہ حسابیہ کی (م + ۱) ویں، (ن + ۱) ویں اور (د + ۱) ویں رقوم سلسلہ ہندسیہ میں ہوں اور م و ن و د سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ سلسلہ حسابیہ کے فرق مشترک اور رقم اول کی نسبت $-\frac{۲}{ن}$ ہے

۱۹۔ اگر تین اعداد ل و م و ن سلسلہ ہندسیہ میں ہوں اور ایک سلسلہ حسابیہ کی ل و م و ن ویں ارقام سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ اس سلسلہ حسابیہ کی رقم اول اور فرق مشترک کی نسبت م + ۱ : ۱ ہوگی

۲۰۔ اگر کسی دو مقادیر کے درمیان دو اواسط حسابیہ لا$_1$ و لا$_2$، دو اواسط ہندسیہ ما$_1$ و ما$_2$ اور دو اواسط موسیقیہ ی$_1$ و ی$_2$ مندرج کی جائیں تو ثابت کرو کہ

$ا_1 ا_2 : ی_1 ی_2 = ا_1 + ا_2 : ی_1 + ی_2$

۲۱ - اگر دو اعداد کے ن اواسط حسابیہ میں سے پہلا اوسط پ ہو اور انہیں اعداد کے ن اواسط موسیقیہ میں سے پہلا اوسط موسیقی ق ہو تو ثابت کرو کہ ق کی قیمت پ اور $\left(\frac{ن+۱}{ن-۱}\right)^{۲}$ پ کے درمیان نہیں واقع ہو سکتی۔

اعداد طبعیہ

۸۰ - اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و .... کو طبعی اعداد کہتے ہیں یہ ایک سلسلہ حسابیہ ہے جس کی ن ویں رقم ن ہے اور جس کا حاصل جمع $\frac{ن(ن+۱)}{۲}$ ہے

ہم آیندہ طبعی اعداد کی پہلی، دوسری، تیسری، چوتھی، قوتوں کے مجموعات ن ارقام کو $_{ن}ص_1$ و $_{ن}ص_2$ و $_{ن}ص_3$ ...... سے تعبیر کریں گے یعنی

$_{ن}ص_1 = ۱ + ۲ + ۳ + ... + ن$

$_{ن}ص_2 = ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ... + ن^۲$

$_{ن}ص_3 = ۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + ... + ن^۳$ اور علیٰ ہذا القیاس

اپنی آیندہ سہولت کے لئے ہم اس جگہ ایک اور طریق کتابت اختیار کرتے ہیں جو اعلیٰ ریاضی میں طالب علم کے اکثر کام آئے گا۔ ہم ذیل کے سلسلوں کو اس طرح تعبیر کریں گے۔

$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ... + ن = \text{مج}(ن)$

$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ + ... + ن^۲ = \text{مج}(ن^۲)$

$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + ۴^۳ + ... + ن^۳ = \text{مج}(ن^۳)$

اور علیٰ ہذا القیاس۔

اس میں علامت ($\sum$) کو اگر کسی رقم کے ماقبل رکھدیا جائے تو اس سے اُن تمام رقموں کا حاصل جمع تعبیر ہوتا ہے جن کا عام نمونہ رقم مذکورہ ہے۔

۸۱ - پہلے ن طبعی اعداد کا حاصل جمع دریافت کرو۔

$${}_{ن}ص_{۱} = ۱ + ۲ + ۳ + \cdots\cdots + ن$$

$(لا + ۱)^{۲} - لا^{۲} = ۲\,لا + ۱$ ایک مساوات متماثلہ ہے۔

اب اگر لا کی جگہ قیمتیں ن و ن - ۱ و ن - ۲ و ن - ۳ و ..... ۲ و ۱ کے بعد دیگرے مساوات مندرجہ بالا میں رکھی جائیں تو ہمیں معادلات ذیل حاصل ہوں گی۔

$$(ن + ۱)^{۲} - ن^{۲} = ۲ن + ۱$$

$$ن^{۲} - (ن - ۱)^{۲} = ۲(ن - ۱) + ۱$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$۳^{۲} - ۲^{۲} = ۲ \times ۲ + ۱$$

$$۲^{۲} - ۱^{۲} = ۲ \times ۱ + ۱$$

اگر سب مساواتوں کو جمع کیا جائے تو دائیں طرف کی رقوم سوائے دو کے ایک دوسرے کو نابود کردیں گی۔

$$\therefore (ن + ۱)^{۲} - ۱ = ۲\,{}_{ن}ص_{۱} + ن$$

$$\therefore ۲\,{}_{ن}ص_{۱} = (ن + ۱)^{۲} - (ن + ۱) = ن(ن + ۱)$$

$$یا\ {}_{ن}ص_{۱} = \frac{ن(ن + ۱)}{۲}$$

نوٹ ۱ و ۲ و ۳ و ..... ایک سلسلہ حسابیہ ہے جس کا مجموعۂ ن ارقام

$$= \frac{ن}{۲}\left\{۲ + (ن - ۱) \times ۱\right\} = \frac{ن(ن + ۱)}{۲}$$

۸۲ — ن طبعی اعداد اولیہ کے مربعوں کا حاصل جمع دریافت کرو

مساوات متماثلہ $(\text{لا} + ۱)^{۳} - \text{لا}^{۳} = ۳\,\text{لا}^{۲} + ۳\,\text{لا} + ۱$ میں یکے بعد دیگرے لا = ن و لا = ن − ۱ و ..... لا = ۲ و لا = ۱ رکھنے سے

$$(\text{ن} + ۱)^{۳} - \text{ن}^{۳} = ۳\,\text{ن}^{۲} + ۳\,\text{ن} + ۱$$

$$\text{ن}^{۳} - (\text{ن} - ۱)^{۳} = ۳\,(\text{ن} - ۱)^{۲} + ۳\,(\text{ن} - ۱) + ۱$$

$$۳^{۳} - ۲^{۳} = ۳ \times ۲^{۲} + ۳ \times ۲ + ۱$$

$$۲^{۳} - ۱^{۳} = ۳ \times ۱^{۲} + ۳ \times ۱ + ۱$$

ان مساواتوں کو جمع کرنے سے

$$(\text{ن} + ۱)^{۳} - ۱ = ۳\,\text{ص}_{\text{ن}۲} + ۳\,\text{ص}_{\text{ن}۱} + \text{ن}$$

چونکہ $\text{ص}_{\text{ن}۱}$ کی قیمت ہم پہلے دریافت کرچکے ہیں۔ اسلئے

$$۳\,\text{ص}_{\text{ن}۲} = (\text{ن} + ۱)^{۳} - \frac{۳}{۲}\,\text{ن}\,(\text{ن} + ۱) - (\text{ن} + ۱)$$

$$= \frac{(\text{ن} + ۱)}{۲} \left\{ ۲\,(\text{ن} + ۱)^{۲} - ۳\,\text{ن} - ۲ \right\}$$

$$= \frac{(\text{ن} + ۱)}{۲} (۲\,\text{ن}^{۲} + \text{ن})$$

$$\text{اسلئے}\quad \text{ص}_{\text{ن}۲} = \frac{\text{ن}\,(\text{ن} + ۱)\,(۲\,\text{ن} + ۱)}{۶}$$

۸۳ — پہلے ن طبعی اعداد کے مکعبوں کا حاصل جمع دریافت کرو

مساوات متماثلہ $(\text{لا} + ۱)^{۴} - \text{لا}^{۴} = ۴\,\text{لا}^{۳} + ۶\,\text{لا}^{۲} + ۴\,\text{لا} + ۱$ میں بالترتیب لا = ن و لا = ن − ۱ و ..... لا = ۲ و لا = ۱ رکھنے سے

$$(\text{ن} + ۱)^{۴} - \text{ن}^{۴} = ۴\,\text{ن}^{۳} + ۶\,\text{ن}^{۲} + ۴\,\text{ن} + ۱$$

$ن^4 - (ن-1)^4 = 4(ن-1)^3 + 6(ن-1)^2 + 4(ن-1) + 1$

....

$2^4 - 1^4 = 4 \times 1^3 + 6 \times 1^2 + 4 \times 1 + 1$

جمع کرنے سے معلوم ہوا کہ

$(ن+1)^4 - 1 = 4\,ص_{ن_3} + 6\,ص_{ن_2} + 4\,ص_{ن_1} + ن$

اب چونکہ $ص_{ن_2}$ و $ص_{ن_1}$ کی قیمتیں ہمیں معلوم ہیں اسلئے

$4\,ص_{ن_3} = ن(ن+1)(ن^2+3ن+3) - ن(ن+1)(2ن+1) - 2ن(ن+1)$

$= ن(ن+1)(ن^2+3ن+3-2ن-1-2)$

$= ن^2(ن+1)^2 = \{ن(ن+1)\}^2$

$\therefore ص_{ن_3} = \left\{\frac{ن(ن+1)}{2}\right\}^2$

نتیجہ صریح — پہلے ن قدرتی اعداد کی تیسری قوتوں کا حاصل جمع اُن کے حاصل جمع کے مربع کے برابر ہوتا ہے۔

۸۴ — بعینہٖ ایسے عمل سے جو دفعہ گذشتہ میں ہوا ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ $(ن+1)^5 - (ن+1) = 5\,ص_{ن_4} + 10\,ص_{ن_3} + 10\,ص_{ن_2} + 5\,ص_{ن_1}$

جس سے $ص_{ن_4} = \frac{ن(ن+1)(6ن^3+9ن^2+ن-1)}{30}$

نوٹ — اسی طریقے سے $ص_{ن_1}$، $ص_{ن_2}$ ..... $ص_{ن_{ر}}$ سب کے سب یکے بعد دیگرے دریافت ہوسکتے ہیں۔

۸۵ — کسی سلسلہ کی ن ویں رقم

$$پ_۰ ن^{ر} + پ_۱ ن^{ر-۱} + پ_۲ ن^{ر-۲} + \cdots + پ_ر \quad (۱)$$

ہے جہاں $پ_۰$ و $پ_۱$ و $پ_۲$ ..... میں ن شامل نہیں ہے ۔ اس کی ن رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو ۔

فرض کرو کہ سلسلہ کا حاصل جمع ص ہے

$$ص = پ_۰ ۱^{ر} + پ_۱ ۱^{ر-۱} + پ_۲ ۱^{ر-۲} + \cdots + پ_ر$$

$$+ پ_۰ ۲^{ر} + پ_۱ ۲^{ر-۱} + پ_۲ ۲^{ر-۲} + \cdots + پ_ر$$

$$+ پ_۰ ۳^{ر} + پ_۱ ۳^{ر-۱} + پ_۲ ۳^{ر-۲} + \cdots + پ_ر$$

- -

$$+ پ_۰ ن^{ر} + پ_۱ ن^{ر-۱} + پ_۲ ن^{ر-۲} + \cdots + پ_ر$$

جمع کرنے سے

$$ص = پ_۰ ص_{ن ر} + پ_۱ ص_{ن ر-۱} + پ_۲ ص_{ن ر-۲} + \cdots + ن پ_ر$$

اس سے معلوم ہوا کہ اگر ہم کو پہلے ن طبعی اعداد کی پہلی دوسری، تیسری، ..... ر ویں قوتوں کے حاصل جمع معلوم ہوں تو ہم اُس سلسلے کا مجموعہ ن ارقام دریافت کر سکتے ہیں جس کی رقم عام (۱) ہے ۔ اور ہمیں معلوم ہے کہ طبعی اعداد کی تمام قوتوں کے حاصل جمع دریافت ہو سکتے ہیں اس لئے سلسلہ مجوزہ کا حاصل جمع بھی معلوم ہو سکتا ہے ۔

مثال ۱ ۔ سلسلہ کی ن ویں رقم $۲^{ن-۱} + ۸ ن^{۳} - ۶ ن^{۲}$ ہے اس کا حاصل جمع دریافت کرو

فرض کرو کہ حاصل جمع ص ہے

$$ص = ۲^۰ + ۸ \times ۱^۳ - ۶ \times ۱^۲$$
$$+ ۲^۱ + ۸ \times ۲^۳ - ۶ \times ۲^۲$$
$$+ ۲^۲ + ۸ \times ۳^۳ - ۶ \times ۳^۲$$

....

$$+ ۲^{ن-۱} + ۸ \times ن^۳ - ۶ \times ن^۲$$

جمع کرنے سے $ص = ۱ + ۲ + ۲^۲ + \ldots\ldots ۲^{ن-۱} + ۸\, ص_{ن۳} - ۶\, ص_{ن۲}$

$$= \frac{۲^ن - ۱}{۲ - ۱} + \frac{۸\, ن^۲ (ن+۱)^۲}{۴} - \frac{۶\, ن(ن+۱)(۲ن+۱)}{۶}$$

$$= ۲^ن - ۱ + ن(ن+۱)\left\{۲ن(ن+۱) - (۲ن+۱)\right\}$$

$$= ۲^ن - ۱ + ن(ن+۱)(۲ن^۲ - ۱)$$

مثال ۲ — سلسلہ $۱ \times ۲ + ۲ \times ۳ + ۳ \times ۴ + \ldots\ldots$ کو ن رقموں تک جمع کرو۔

ن ویں رقم $= ن(ن+۱) = ن^۲ + ن$

پہلی رقم $= ۱^۲ + ۱$ و دوسری رقم $= ۲^۲ + ۲$ و تیسری رقم $= ۳^۲ + ۳$

و ..... ن ویں رقم $= ن^۲ + ن$

یعنی $ص = ص_{ن۲} + ص_{ن۱}$

$$= \frac{ن(ن+۱)(۲ن+۱)}{۶} + \frac{ن(ن+۱)}{۲}$$

$$= \frac{ن(ن+۱)}{۲}\left\{\frac{۲ن+۱}{۳} + ۱\right\} = \frac{ن(ن+۱)(ن+۲)}{۳}$$

مثال ۳ — ثابت کرو کہ متصل صحیح اعداد کے کعبوں کی کسی تعداد کا

مجموعہ اُن اعداد کے مجموعہ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے اس میں ضروری نہیں کہ اعداد ایک سے شروع ہوں۔

فرض کرو کہ ب + ۱ و ب + ۲ و ب + ۳ و ..... و ب + ن
ن متصل صحیح اعداد ہیں۔ ہمیں ثابت کرنا ہے کہ

$$(\text{ب}+۱)^۳+(\text{ب}+۲)^۳+(\text{ب}+۳)^۳+\cdots+(\text{ب}+\text{ن})^۳$$

جملہ $(\text{ب}+۱)+(\text{ب}+۲)+(\text{ب}+۳)+\cdots+(\text{ب}+\text{ن})$ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔

فرض کرو کہ ص اور صَ بالترتیب دو مندرجہ بالا سلسلوں کے مجموعوں کو تعبیر کرتے ہیں تب

$$\text{ص}=\left\{۱^۳+۲^۳+۳^۳+\cdots+(\text{ب}+\text{ن})^۳\right\}$$

$$-\left\{۱^۳+۲^۳+۳^۳+\cdots+\text{ب}^۳\right\}$$

$$=\left\{\frac{(\text{ب}+\text{ن})(\text{ب}+\text{ن}+۱)}{۲}\right\}^۲-\left\{\frac{\text{ب}(\text{ب}+۱)}{۲}\right\}^۲$$

$$=\left\{\frac{(\text{ب}+\text{ن})(\text{ب}+\text{ن}+۱)}{۲}+\frac{\text{ب}(\text{ب}+۱)}{۲}\right\}\times\left\{\frac{(\text{ب}+\text{ن})(\text{ب}+\text{ن}+۱)}{۲}-\frac{\text{ب}(\text{ب}+۱)}{۲}\right\}$$

$$\text{اور صَ}=\left\{۱+۲+۳+\cdots+(\text{ب}+\text{ن})\right\}-\left\{۱+۲+۳+\cdots+\text{ب}\right\}$$

$$=\frac{(\text{ب}+\text{ن})(\text{ب}+\text{ن}+۱)}{۲}-\frac{\text{ب}(\text{ب}+۱)}{۲}$$

اس سے ظاہر ہے کہ صَ جز ضربی ہے ص کا جس سے دعویٰ ہمارا

ثابت ہوتا ہے۔

مثال ۴ ۔ سلسلہ $۱^۲ + ۳^۲ + ۵^۲ + ۷^۲ + \dots$ کا حاصل جمع ن ارقام تک دریافت کرو۔

سلسلہ مجوزہ کی ن ویں رقم $= \{۱ + (ن - ۱) \times ۲\}^۲ = (۲ن - ۱)^۲$

$$= ۴ن^۲ - ۴ن + ۱$$

اسلئے اگر ص سے مجموعہ مطلوبہ کو تعبیر کریں تو

$$ص = ۴(۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \dots + ن^۲) - ۴(۱ + ۲ + ۳ + \dots + ن) + ن$$

$$= ۴\frac{ن(ن+۱)(۲ن+۱)}{۶} - ۴\frac{ن(ن+۱)}{۲} + ن$$

$$= ۲ن(ن+۱)\left\{\frac{(۲ن+۱)}{۳} - ۱\right\} + ن$$

$$= \frac{ن}{۳}\{۴(ن^۲ - ۱) + ۳\} = \frac{ن}{۳}(۴ن^۲ - ۱)$$

یا بطرز دیگر

$$ص = \{(۱^۲ + ۲^۲) + (۳^۲ + ۴^۲) + (۵^۲ + ۶^۲) + \dots \text{ن ارقام تک}\}$$

$$- \{۲^۲ + ۴^۲ + ۶^۲ + \dots \text{ن ارقام تک}\}$$

$$= (۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \dots \text{۲ن ارقام تک})$$

$$- ۲^۲\{۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \dots \text{ن ارقام تک}\}$$

$$= \frac{۲ن(۲ن+۱)(۴ن+۱)}{۶} - ۴ \times \frac{ن(ن+۱)(۲ن+۱)}{۶}$$

$$= \frac{ن(۲ن+۱)}{۳}\{(۴ن+۱) - ۲(ن+۱)\}$$

$$= \frac{ن(۲ن+۱)(۲ن-۱)}{۳} = \frac{ن}{۳}(۴ن^۲-۱)$$

مثال ۵ ـ سلسلہ $۲ \times ۱^۲ + ۳ \times ۲^۲ + ۴ \times ۳^۲ + \dots$ کا مجموعہ ن رقموں تک دریافت کرو۔

سلسلہ مجوزہ کی ن ویں رقم $= (ن + ۱)ن^۲ = ن^۳ + ن^۲$

اسلئے پہلی رقم $= ۱^۳ + ۱^۲$ ، دوسری رقم $= ۲^۳ + ۲^۲$ و تیسری رقم $= ۳^۳ + ۳^۲$ اور علیٰ ہذا القیاس

اسلئے حاصل جمع ن ارقام $= ص = (۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \dots + ن^۳)$

$$+ (۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \dots + ن^۲)$$

$$= \frac{ن^۲(ن+۱)^۲}{۴} + \frac{ن(ن+۱)(۲ن+۱)}{۶}$$

$$= \frac{ن(ن+۱)}{۲}\left\{\frac{ن(ن+۱)}{۲} + \frac{۲ن+۱}{۳}\right\}$$

$$= \frac{ن(ن+۱)}{۲} \times \frac{۳ن^۲ + ۷ن + ۲}{۶}$$

$$= \frac{ن(ن+۱)(ن+۲)(۳ن+۱)}{۱۲}$$

مثال ۶ ـ سلسلہ $۳ \times ۸ + ۶ \times ۱۱ + ۹ \times ۱۴ + \dots$ کا مجموعہ ن رقموں تک دریافت کرو۔

صریحاً سلسلہ کی ن ویں رقم = (ن ویں رقم سلسلہ ۳ ، ۶ ، ۹ ، .... کی)

× (ن ویں رقم سلسلہ ۸ ، ۱۱ ، ۱۴ ، .... کی)

$$= ۳ن \times (۳ن + ۵) = ۹ن^۲ + ۱۵ن$$

اسلئے پہلی رقم $= ۹ \times ۱^{۲} + ۱۵ \times ۱$ و دوسری رقم $= ۹ \times ۲^{۲} + ۱۵ \times ۲$ و

تیسری رقم $= ۹ \times ۳^{۲} + ۱۵ \times ۳$ و ......

اگر سلسلے کا حاصل جمع ص ہو تو

$$ص = ۹ (۱^{۲} + ۲^{۲} + ... + ن^{۲}) + ۱۵ (۱ + ۲ + ۳ + ... + ن)$$

$$= ۹ \times \frac{ن(ن+۱)(۲ن+۱)}{۶} + ۱۵ \times \frac{ن(ن+۱)}{۲}$$

$$= \frac{۳ن(ن+۱)}{۲} \left\{ (۲ن+۱) + ۵ \right\} = ۳ن(ن+۱)(ن+۳)$$

مثال ۷ :- سلسلہ $۱^{۲} + (۱^{۲} + ۲^{۲}) + (۱^{۲} + ۲^{۲} + ۳^{۲}) + ...$ کو ن رقموں تک جمع کرو۔

سلسلہ مجوزہ کی ن ویں رقم $= ۱^{۲} + ۲^{۲} + ۳^{۲} + ... + ن^{۲}$

$$= \frac{ن(ن+۱)(۲ن+۱)}{۶} = \frac{ن(۲ن^{۲} + ۳ن + ۱)}{۶}$$

$$= \frac{۱}{۳} \times ن^{۳} + \frac{۱}{۲} \times ن^{۲} + \frac{۱}{۶} \times ن$$

اسلئے پہلی رقم $= \frac{۱}{۳} \times ۱^{۳} + \frac{۱}{۲} \times ۱^{۲} + \frac{۱}{۶} \times ۱$

دوسری رقم $= \frac{۱}{۳} \times ۲^{۳} + \frac{۱}{۲} \times ۲^{۲} + \frac{۱}{۶} \times ۲$

تیسری رقم $= \frac{۱}{۳} \times ۳^{۳} + \frac{۱}{۲} \times ۳^{۲} + \frac{۱}{۶} \times ۳$ اور علیٰ ہذا القیاس

اگر حاصل جمع مطلوب کو ص سے تعبیر کریں تو

$$ص = \frac{۱}{۳} (۱^{۳} + ۲^{۳} + ۳^{۳} + ... + ن^{۳})$$

$$+ \frac{۱}{۲} (۱^{۲} + ۲^{۲} + ۳^{۲} + ... + ن^{۲}) + \frac{۱}{۶} (۱ + ۲ + ۳ + ... + ن)$$

$$= \frac{۱}{۳} \times \frac{ن^{۲}(ن+۱)^{۲}}{۴} + \frac{۱}{۲} \times \frac{ن(ن+۱)(۲ن+۱)}{۶} + \frac{۱}{۶} \times \frac{ن(ن+۱)}{۲}$$

$$= \frac{ن(ن+۱)}{۱۲} \left\{ ن(ن+۱) + (۲ن+۱) + ۱ \right\}$$

$$= \frac{ن(ن+۱)}{۱۲} \left\{ ن^{۲} + ۳ن + ۲ \right\} = \frac{ن(ن+۱)^{۲}(ن+۲)}{۱۲}$$

۸۶ - سلسلوں کے جمع کرنے کی چند خاص صورتیں

امثلہ ذیل چند کارآمد عملی حکمتوں اور ترکیبوں کی توضیح کے لئے منتخب کی گئی ہیں ان کی استعانت سے خاص خاص قسم کے سلسلوں کا مجموعہ بآسانی معلوم ہو سکتا ہے ذیل کے سلسلے دفعات گزشتہ کے سلسلوں سے کئی لحاظ سے مختلف ہیں۔ ان میں بالعموم ن ویں رقم کا دریافت کرنا مشکل ہوگا اسلئے طالب علم کو چاہیئے کہ طرز عمل کے اس حصہ کو خاص توجہ سے پڑھے

مثال ۱ - سلسلہ $۱ + ۵ + ۲۲ + ۳۵ + \dots$ کو ن رقموں تک جمع کرو

[خصوصیت اس سلسلے کی یہ ہے کہ ارقام متصلہ کے متواتر فرق سلسلہ حسابیہ میں ہیں]

فرض کرو کہ ص = حاصل جمع مطلوب اور $ق_{ن}$ = ن ویں رقم

تب $ص = ۱ + ۵ + ۱۲ + ۲۲ + \dots + ق_{ن}$

نیز $ص = ۰ + ۱ + ۵ + ۱۲ + \dots + ق_{ن-۱} + ق_{ن}$

اسلئے تفریق سے

$$۰ = ۱ + ۴ + ۷ + ۱۰ + \dots + (ق_{ن} - ق_{ن-۱}) - ق_{ن}$$

$$= \left\{ ۱ + ۴ + ۷ + ۱۰ + \dots \text{ن ارقام تک} \right\} - ق_{ن}$$

اسلئے $ق_ن = \frac{ن}{۲}\{۲ + (ن - ۱)۳\} = \frac{ن(۳ن - ۱)}{۲}$

یعنی سلسلہ معلومہ کی ن ویں رقم $= \frac{۳}{۲} \times ن^{۲} - \frac{۱}{۲} \times ن$

اسلئے $ص = \frac{۳}{۲}(۱^{۲} + ۲^{۲} + ۳^{۲} + \dots + ن^{۲})$

$- \frac{۱}{۲}(۱ + ۲ + ۳ + \dots + ن)$

$= \frac{۳}{۲} \times \frac{ن(ن+۱)(۲ن+۱)}{۶} - \frac{۱}{۲} \times \frac{ن(ن+۱)}{۲}$

$= \frac{ن(ن+۱)}{۴} \times ۲ن = \frac{ن^{۲}(ن+۱)}{۲}$

مثال ۲ — سلسلہ $۲ + ۷ + ۱۶ + ۲۹ + ۴۶ + \dots$ کو ن ارقام تک جمع کرو۔

فرض کرو کہ ص = حاصل جمع مطلوب اور $ق_ن$ = ن ویں رقم

تب $ص = ۲ + ۷ + ۱۶ + ۲۹ + ۴۶ + \dots + ق_ن$

نیز $ص = ۰ + ۲ + ۷ + ۱۶ + ۲۹ + \dots + ق_{ن-۱} + ق_ن$

اسلئے تفریق سے $۰ = (۲ + ۵ + ۹ + ۱۳ + ۱۷ + \dots$ ن ارقام تک$) - ق_ن$

اسلئے $ق_ن = ۲ + \{۵ + ۹ + ۱۳ + ۱۷ + \dots (ن-۱)$ ارقام تک$\}$

$= ۲ + \frac{ن-۱}{۲}\{۱۰ + (ن - ۲)۴\} = ۲ن^{۲} - ن + ۱$

اسلئے $ص = ۲(۱^{۲} + ۲^{۲} + ۳^{۲} + \dots + ن^{۲})$

$- (۱ + ۲ + ۳ + \dots + ن) + ن$

$= ۲\frac{ن(ن+۱)(۲ن+۱)}{۶} - \frac{ن(ن+۱)}{۲} + ن$

$= \frac{ن}{۶}(ن+۱)(۴ن-۱) + ن = \frac{ن}{۶}(۴ن^{۲} + ۳ن + ۵)$

۸۷ ۔ مندرجہ ذیل کا احتیاط سے مطالعہ کرنا چاہیئے اس قسم کی تقلیب و ترتیب سے ہم کئی قسم کے سلسلے جمع کر سکتے ہیں جنکی رقوم کسری ہوں اور جن کے نسب نما کسی خاص قانون کے مطابق مرتب کیئے گئے ہوں ۔

$$\frac{۱}{ن\,(ن+۱)} = \frac{۱}{ن} - \frac{۱}{ن+۱} \quad \text{اور} \quad \frac{۱}{لا\,(لا+د)} = \frac{۱}{د}\left\{\frac{۱}{لا} - \frac{۱}{لا+د}\right\}$$

$$\frac{۱}{ن\,(ن+۱)\,(ن+۲)\,(ن+۳)} = \frac{۱}{(ن+۱)(ن+۲)}\left\{\frac{۱}{ن\,(ن+۳)}\right\}$$

$$= \frac{۱}{۳\,(ن+۱)(ن+۲)}\left\{\frac{۱}{ن} - \frac{۱}{ن+۳}\right\}$$

$$\frac{۱}{لا\,(لا+۳د)\,(لا+۵د)\,(لا+۷د)} = \frac{۱}{(لا+۳د)(لا+۵د)}\left\{\frac{۱}{لا\,(لا+۷د)}\right\}$$

$$= \frac{۱}{۷د\,(لا+۳د)(لا+۵د)}\left\{\frac{۱}{لا} - \frac{۱}{لا+۷د}\right\}$$

ہر ایک صورت میں ہر ایک رقم کو بطور دو جملوں کے فرق کے بیان کیا گیا ہے ۔

مثال ۱ ۔ سلسلہ $\frac{۱}{۱\times۲} + \frac{۱}{۲\times۳} + \frac{۱}{۳\times۴} + \dots$ کو ن ارقام تک جمع کرو ۔

فرض کرو کہ ص = حاصل جمع ن ارقام اور $ق_ن$ = ن ویں رقم

اب $ق_۱ = \frac{۱}{۱\times۲} = ۱ - \frac{۱}{۲}$

$$ق_۲ = \frac{۱}{۲\times۳} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳}$$

$$ق_۳ = \frac{۱}{۳\times۴} = \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴}$$

- - - - - - - - - - - - - - - -

$$\text{ق}_{\text{ن}} = \frac{۱}{\text{ن}(\text{ن}+۱)} = \frac{۱}{\text{ن}} - \frac{۱}{\text{ن}+۱}$$

اسلئے $\text{ص} = ۱ - \frac{۱}{\text{ن}+۱} = \frac{\text{ن}}{\text{ن}+۱}$

مثال ۲ — سلسلہ $\frac{۱}{۱\times۴} + \frac{۱}{۴\times۷} + \frac{۱}{۷\times۱۰} + \ldots$ کو ن ارقام تک جمع کرو۔

ظاہر ہے کہ ن ویں رقم کا نسب نما

= (ن ویں رقم سلسلہ ۱ و ۴ و ۷ و .... کی)

× (ن ویں رقم سلسلہ ۴ و ۷ و ۱۰ و .... کی)

$$= \{۱ + (\text{ن}-۱)۳\} \times \{۴ + (\text{ن}-۱)۳\}$$

$$= (۳\text{ن}-۲)(۳\text{ن}+۱)$$

اسلئے $\text{ق}_{\text{ن}} = \frac{۱}{(۳\text{ن}-۲)(۳\text{ن}+۱)}$

اب $\text{ق}_{۱} = \frac{۱}{۱\times۴} = \frac{۱}{۳}\left(۱ - \frac{۱}{۴}\right)$

$$\text{ق}_{۲} = \frac{۱}{۴\times۷} = \frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۷}\right)$$

$$\text{ق}_{۳} = \frac{۱}{۷\times۱۰} = \frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۷} - \frac{۱}{۱۰}\right)$$

....

$$\text{ق}_{\text{ن}} = \frac{۱}{(۳\text{ن}-۲)(۳\text{ن}+۱)} = \frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۳\text{ن}-۲} - \frac{۱}{۳\text{ن}+۱}\right)$$

اسلئے $\text{ص} = \frac{۱}{۳}\left(۱ - \frac{۱}{۳\text{ن}+۱}\right) = \frac{\text{ن}}{۳\text{ن}+۱}$

مثال ۳۔ سلسلہ $\frac{۱}{۱\times۴\times۷}+\frac{۱}{۴\times۷\times۱۰}+\frac{۱}{۷\times۱۰\times۱۳}+\cdots$

کا مجموعہ ن رقموں تک دریافت کرو۔

ن ویں رقم کا نسب نما = (ن ویں رقم سلسلہ ۱ و ۴ و ۷ و .... کی)

× (ن ویں رقم سلسلہ ۴ و ۷ و ۱۰ و .... کی)

× (ن ویں رقم سلسلہ ۷ و ۱۰ و ۱۳ و .... کی)

$= \{۱+(\text{ن}-۱)۳\}\times\{۴+(\text{ن}-۱)۳\}\times\{۷+(\text{ن}-۱)۳\}$

$= (۳\text{ن}-۲)(۳\text{ن}+۱)(۳\text{ن}+۴)$

اسلئے $\text{ق}_{\text{ن}} = \frac{۱}{(۳\text{ن}-۲)(۳\text{ن}+۱)(۳\text{ن}+۴)}$

اب $\text{ق}_۱ = \frac{۱}{۱\times۴\times۷} = \frac{۱}{۶}\left(\frac{۱}{۱\times۴}-\frac{۱}{۴\times۷}\right)$

$\text{ق}_۲ = \frac{۱}{۴\times۷\times۱۰} = \frac{۱}{۶}\left(\frac{۱}{۴\times۷}-\frac{۱}{۷\times۱۰}\right)$

$\text{ق}_۳ = \frac{۱}{۷\times۱۰\times۱۳} = \frac{۱}{۶}\left(\frac{۱}{۷\times۱۰}-\frac{۱}{۱۰\times۱۳}\right)$

....

$\text{ق}_{\text{ن}} = \frac{۱}{۶}\left\{\frac{۱}{(۳\text{ن}-۲)(۳\text{ن}+۱)}-\frac{۱}{(۳\text{ن}+۱)(۳\text{ن}+۴)}\right\}$

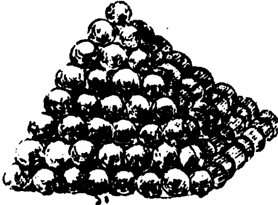
اسلئے $\text{ص} = \frac{۱}{۶}\left\{\frac{۱}{۱\times۴}-\frac{۱}{(۳\text{ن}+۱)(۳\text{ن}+۴)}\right\}$

$= \frac{۱}{۶}\times\frac{۹\text{ن}^۲+۱۵\text{ن}}{۴(۳\text{ن}+۱)(۳\text{ن}+۴)}$

$= \frac{\text{ن}(۳\text{ن}+۵)}{۸(۳\text{ن}+۱)(۳\text{ن}+۴)}$

گولیوں کے انبار

۸۸ — ایک مکمل مینار (مخروط مضلع) کی شکل میں جو مربع قاعدے پر قائم ہے چند گولیاں ترتیب دی گئی ہیں اُن کی تعداد دریافت کرو۔

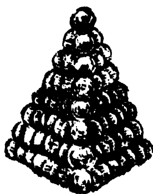


فرض کرو کہ قاعدے کے ہر ایک ضلع میں ن گولیاں ہیں سب سے نچلی تہ میں گولیوں کی تعداد ن^{2} ہوگی۔ اس سے اوپر کی تہ میں $(\text{ن} - ۱)^{2}$ اور اُس سے اوپر کی تہ میں $(\text{ن} - ۲)^{2}$ اور علیٰ ہذا القیاس یہاں تک کہ چوٹی پر صرف ایک گولی ہوگی

اسلئے تعداد مطلوبہ $\text{ص} = \text{ن}^{2} + (\text{ن} - ۱)^{2} + (\text{ن} - ۲)^{2} + \cdots + ۱$

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)(۲\text{ن}+۱)}{۶} \quad [\text{دفعہ } ۸۲]$$

۸۹ — ایک ایسے مکمل مینار کی شکل میں جس کا قاعدہ مثلث متساوی الاضلاع ہے چند گولیاں ترتیب دی گئی ہیں اُن کی تعداد دریافت کرو۔



فرض کرو کہ قاعدے کے ہر ایک ضلع میں ن گولیاں ہیں سب سے نچلی تہ میں گولیوں کی تعداد

$$= \text{ن} + (\text{ن} - ۱) + (\text{ن} - ۲) + \cdots + ۱$$

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)}{۲} \text{ یا } \frac{۱}{۲}(\text{ن}^{2} + \text{ن})$$

اگر ہم اس نتیجے میں ن کی بجائے ن - ۱ و ن - ۲ و ن - ۳ وغیرہ رکھیں تو ہمیں بالترتیب دوسری، تیسری، چوتھی تہ میں گولیوں کی تعداد معلوم ہو جائے گی

اسلئے ص = $\frac{1}{2}$ (مج ن^{۲} + مج ن)

جہاں مج ن^{۲} = ۱^{۲} + ۲^{۲} + ۳^{۲} + ... + ن^{۲}

اور مج ن = ۱ + ۲ + ۳ + ... + ن } دفعہ ۸۰

اسلئے ص = $\frac{\text{ن(ن + ۱)(ن + ۲)}}{6}$

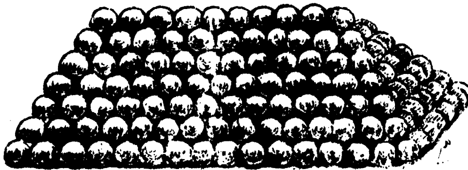
۹۰ - گولیوں کا ایک مکمل انبار مستطیل قاعدے پر کھڑا ہے اس میں کل گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

فرض کرو کہ قاعدے کے بڑے اور چھوٹے ضلع میں بالترتیب م اور ن گولیاں ہیں سب سے اوپر کی تہ میں گولیوں کی صرف ایک قطار ہے جس میں م - (ن - ۱) یعنی (م - ن + ۱) گولیاں ہیں۔

اس سے نچلی تہ میں گولیوں کی تعداد = ۲(م - ن + ۲)

اس سے نچلی تہ میں گولیوں کی تعداد = ۳(م - ن + ۳) اور علیٰ ہذا القیاس

سب سے نچلی تہ میں گولیوں کی تعداد = ن(م - ن + ن)



اسلئے ص = (م - ن + ۱) + ۲(م - ن + ۲) + ۳(م - ن + ۳)

+ .... + ن(م - ن + ن)

= (م - ن)(۱ + ۲ + ۳ + ... + ن) + (۱² + ۲² + ۳² + ... + ن²)

= (م - ن) ن (ن + ۱) / ۲ + ن (ن + ۱)(۲ن + ۱) / ۶

= ن(ن + ۱)/۶ {۳(م - ن) + ۲ن + ۱} = ن(ن + ۱)(۳م - ن + ۱)/۶

۹۱ — گولیوں کا ایک نامکمل انبار ایک مستطیل قاعدے پر کھڑا ہے اُس میں گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

فرض کرو کہ سب سے اوپر کی تہ کے دونوں اضلاع میں گولیوں کی تعداد بالترتیب ا اور ب ہے اور انبار میں کل تہوں کی تعداد ن ہے

سب سے اوپر کی تہ میں گولیوں کی تعداد = ا ب

اس سے نچلی تہ میں گولیوں کی تعداد = (ا + ۱)(ب + ۱)

اس سے نچلی تہ میں گولیوں کی تعداد = (ا + ۲)(ب + ۲)

اور علی ہذا القیاس

سب سے نچلی تہ میں گولیوں کی تعداد = (ا + ن-۱)(ب + ن-۱)

= ا ب + (ا + ب)(ن - ۱) + (ن - ۱)²

اسلئے ص = ا ب ن + (ا + ب) مج (ن - ۱) + مج (ن - ۱)²

= ا ب ن + ن(ن - ۱)(ا + ب)/۲ + (ن - ۱) ن (۲ × ن-۱ + ۱)/۶

= ن/۶ {۶ ا ب + ۳(ا + ب)(ن - ۱) + (ن - ۱)(۲ن - ۱)}

۹۲ — عددی مثالوں میں ذیل کی ترکیب کا استعمال زیادہ آسان ہوگا۔

مثال — ایک گولیوں کا نامکمل انبار مربع قاعدے پر کھڑا ہے اسمیں

۱۶ تہیں ایک دوسرے کے اوپر رکھی ہوئی ہیں سب سے اوپر کی تہ کے ہر ایک ضلع میں ۱۲ گولیاں ہیں انبار میں کل گولیوں کی تعداد دریافت کرو

اگر ہم اس انبار پر ایک اور مربع انبار جس کے قاعدے کے ہر ایک ضلع میں ۱۱ گولیاں ہوں رکھدیں تو ہمیں ۲۷ تہوں کا ایک مربع انبار حاصل ہوگا۔

اس مکمل انبار میں گولیوں کی تعداد $= \frac{۵۵ \times ۲۸ \times ۲۷}{۶}$

$= ۶۹۳۰$ [وضعہ ۸۸]

اُن گولیوں کی تعداد جو نامکمل ڈھیر کے اوپر رکھی گئی ہیں

$= \frac{۲۳ \times ۱۲ \times ۱۱}{۶} = ۵۰۶$

اسلئے نامکمل انبار میں گولیوں کی تعداد $= ۶۴۲۴$

امثلہ نمبری ۹

ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو

۱ - $۵^۲ + ۷^۲ + ۹^۲ + \cdots + ۲۵^۲$

۲ - $۲^۲ + ۵^۲ + ۸^۲ + \cdots$ ن رقموں تک

۳ - $۱ \times ۲^۲ + ۲ \times ۳^۲ + ۳ \times ۴^۲ + \cdots$ ن رقموں تک

۴ - $۲ \times ۵ + ۵ \times ۸ + ۸ \times ۱۱ + ۱۱ \times ۱۴ + \cdots$ ن رقموں تک

۵ - $۱ \times ۳ + ۳ \times ۵ + ۵ \times ۷ + ۷ \times ۹ + \cdots$ ن رقموں تک

۶ - $۱ \times ۲ \times ۳ + ۲ \times ۳ \times ۴ + ۳ \times ۴ \times ۵ + \cdots$ ن رقموں تک

۷ - $۱^۳ + ۳^۳ + ۵^۳ + \cdots$ ن رقموں تک

۸ - $۱ + (۱+۲) + (۱+۲+۳) + \cdots$ ن رقموں تک

۹- ایک سلسلے کی ن ویں رقم (۲ ن-۱) (۳ ن + ۱) ہے اُس کا مجموعہ ۱۵ رقموں تک دریافت کرو۔

۱۰- کسی سلسلے کی ر ویں رقم ۳ ر (ر+۳) ہے اُس کی ۲۵ رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو۔

ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو

۱۱- ۱ + ۳ + ۶ + ۱۰ + ۱۵ + ... کو ن رقموں تک

۱۲- ۱ + ۶ + ۱۵ + ۲۸ + ۴۵ + ... کو ن 〃 〃

۱۳- ۱ + ۸ + ۲۱ + ۴۰ + ۶۵ + ... کو ن 〃 〃

۱۴- ۱ + ۹ + ۲۴ + ۴۶ + ۷۵ + ... کو ن 〃 〃

۱۵- ۱ + ۱۰ + ۲۷ + ۵۲ + ۸۵ + ... کو ن 〃 〃

۱۶- ۶ + ۱۷ + ۳۴ + ۵۷ + ۸۶ + ... کو ن 〃 〃

۱۷- ۲ + ۳ + ۶ + ۱۱ + ۱۸ + ... کو ن 〃 〃

۱۸- ۲ + ۵ + ۱۰ + ۱۷ + ... کو ن 〃 〃

۱۹- ۲ + ۷ + ۱۴ + ۲۳ + ۳۴ + ... کو ن 〃 〃

۲۰- ۵ + ۱۹ + ۴۵ + ۸۳ + ۱۳۳ + ... کو ۴۰ 〃 〃

۲۱- ۵ + ۱۲ + ۲۵ + ۴۴ + ۶۹ + ... کو ۱۰۰ 〃 〃

۲۲- ۱×۵ + ۲×۱۵ + ۳×۳۱ + ۴×۵۳ + ۵×۸۱ + ... کو ن ارقام تک

۲۳- ۱/(۳×۵) + ۱/(۵×۷) + ۱/(۷×۹) + ... کو ن 〃

۲۴- ۱/(۳×۸) + ۱/(۸×۱۳) + ۱/(۱۳×۱۸) + ... کو ۷۰ 〃

۲۵- ۱/(۱×۳) + ۱/(۲×۴) + ۱/(۳×۵) + ۱/(۴×۶) + ... کو ۲۹ 〃

۲۶- $\frac{1}{3\times7}+\frac{1}{7\times11}+\frac{1}{11\times15}+\ldots\ldots$ کو ن ارقام تک

۲۷- $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\ldots$ کو ۴۹ 〃 〃

۲۸- $\frac{1}{1\times3\times5}+\frac{1}{3\times5\times7}+\frac{1}{5\times7\times9}+\ldots$ کو ن 〃 〃

گولیوں کی تعداد دریافت کرو -

۲۹- ایک مربع انبار میں جس کے قاعدے کے ہر ایک ضلع میں ۱۵ گولیاں ہیں

۳۰- ایک مثلثی انبار میں جس کے قاعدے کے ہر ایک ضلع میں ۱۸ گولیاں ہیں

۳۱- ایک مستطیلی انبار میں جس کے قاعدے کے طول اور عرض میں بالترتیب ۵۰ اور ۲۸ گولیاں ہیں -

۳۲- ایک ایسے نامکمل مثلثی انبار میں گولیوں کی تعداد دریافت کرو جسکے قاعدے کے ایک ضلع میں ۲۵ گولیاں ہیں اور سب سے اوپر کی تہ کے ایک ضلع میں ۱۴ گولیاں ہیں -

۳۳- ایک نامکمل مربع انبار میں ۲۷ تہیں ہیں اور قاعدے کے ہر ایک ضلع میں ۴۰ گولیاں ہیں - گولیوں کی کل تعداد دریافت کرو -

۳۴- ایک مکمل مستطیلی انبار میں گولیوں کی تعداد ۲۴۳۹۵ ہے اگر قاعدے کے عرض میں ۳۴ گولیاں ہوں تو طول میں کتنی گولیاں ہونگی ؟

۳۵- کسی نامکمل مربع انبار کی سب سے اونچی تہ میں گولیوں کی تعداد ۱۶۹ ہے اور سب سے نچلی تہ میں ۱۰۸۹ معلوم کرو کہ کل انبار میں کتنی گولیاں ہیں ؟

۳۶- ایک مکمل مستطیلی انبار میں گولیوں کی ۱۵ تہیں ہیں اور قاعدے

کے بڑے ضلع میں ۲۰ گولیاں ہیں معلوم کرو کہ انبار میں کل گولیاں کتنی ہیں؟

۳۷۔ ایک نامکمل مستطیلی انبار کی سب سے اونچی تہ کے دو اضلاع میں ۱۱ اور ۱۸ گولیاں ہیں اور سب سے نچلی تہ کے چھوٹے ضلع میں ۳۰ گولیاں ہیں انبار میں گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

۳۸۔ ایک نامکمل مستطیلی انبار کی اوپر کی تہ کے دونوں اضلاع میں ۱۵ اور ۶ گولیاں ہیں معلوم کرو کہ کتنی اور گولیاں انبار کی تکمیل کے لئے کافی ہوں گی؟

۳۹۔ ایک مثلثی انبار میں گولیوں کی تعداد ایک مربع انبار کی گولیوں کی نصف تعداد سے بقدر ۱۵۰ کے زیادہ ہے اور ہر ایک انبار میں تہوں کی تعداد یکساں ہے۔ مثلثی انبار کی سب سے نچلی تہ میں گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

۴۰۔ ایک نامکمل مربع انبار میں ۱۶ تہیں ہیں اوپر کی تہ میں گولیونکی تعداد نچلی تہ کی تعداد سے بقدر ۱۰۰۵ کے کم ہے انبار میں گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

۴۱۔ ثابت کرو کہ ایک مربع انبار میں گولیوں کی تعداد اُس تعداد کی ایک چوتھائی ہے جو ایک ایسے مثلثی ڈھیر میں موجود ہو جس میں گولیوں کی تہیں یا طبقے پہلے انبار سے دو چند ہوں۔

۴۲۔ اگر ایک مثلثی انبار میں گولیوں کی تعداد کو نسبت اُن گولیوں کی تعداد سے جو ایک مربع انبار میں شامل ہیں ۱۳ : ۱۷۵ ہو اور مثلثی انبار کی نسبت مربع انبار میں تہوں کی تعداد دو چند ہو تو ہر ایک انبار میں گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

۴۳۔ گولیوں کے ۱۶ پونڈ وزنی مثلثی انبار کی قیمت ۱۵ پونڈ ہے اگر

ایک ہنڈرویٹ لوہے کی قیمت ۱۰ شلنگ ۶ پنس ہو تو سب سے
نچلی تہ میں گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

۴۴۔ اگر ایک مکمل مربع انبار سے جس میں ن مختلف تہیں یا طبقے
ہیں کچھ گولیاں لیکر ایک ایسا مثلثی انبار بنایا جائے جس میں تہوں کی
تعداد وہی ہو جو مربع انبار میں ہے تو ثابت کرو کہ باقی ماندہ گولیوں کی
تعداد سے ایک اور مثلثی انبار بن سکتا ہے۔ اس انبار کے ایک ضلع میں
گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

باب ہفتم

مقادیر اصم

۹۳ - تعریفات۔ اگر کسی عدد حسابی کا جذر یا نزول ٹھیک ٹھیک دریافت نہ ہو سکے تو اسے **مقدار اصم** یا **غیر ناطق** کہتے ہیں۔ مثلاً $\sqrt{2}$ و $\sqrt{6}$ و $\sqrt[3]{4}$ و $\sqrt[4]{5}$ مقادیر اصم ہیں۔

نوٹ - جس عدد حسابی کا جذر پورا پورا نکل سکے اس کو مقدار ناطق یا منطق کہتے ہیں پس معلوم ہوا کہ ہر ایک عدد حسابی کا جذر یا تو ناطق ہوگا یا غیر ناطق مثلاً $\sqrt[3]{8}$ و $\sqrt{25}$ و $\sqrt[4]{16}$ ناطق ہیں اور مقادیر $\sqrt{2}$ و $\sqrt[3]{5}$ و $\sqrt[3]{9}$ غیر ناطق ہیں۔

$\sqrt{\text{لا}}$ کی صورت کے جبریہ جملے کو ہمیشہ مقدار اصم کہتے ہیں خواہ لا کی قیمت ایسی ہو کر فی الحقیقت $\sqrt{\text{لا}}$ مقدار اصم نہ ہو مثلاً اگر لا $= 4$ تو $\sqrt{\text{لا}} = \sqrt{4} = 2$ جو مقدار اصم نہیں ہے۔

دو یا زیادہ مقادیر اصم کو **متشابہ** کہتے ہیں اگر اُن کی تحویل ایک ہی جزِ ضربی اصم کی طرف ہو سکے مثلاً $\sqrt{45}$ اور $\sqrt{80}$ متشابہ مقادیر اصم ہیں کیونکہ وہ جداگانہ $3\sqrt{5}$ اور $4\sqrt{5}$ کے برابر ہیں۔

جب مقادیر اصم کی علامتِ جذر کا قوت نما ایک ہی ہو تو انہیں ایک ہی درجہ کی مقادیر اصم کہتے ہیں مثلاً $\sqrt{5}$ و $\sqrt{\text{ا}^3}$ و $(\text{ا}+\text{لا})^{\frac{1}{2}}$ سب دوسرے درجے کی مقادیر اصم ہیں۔

ایک ایسے جملے کو جس میں دو یا زیادہ مفرد مقادیر اصم علامات + اور - سے مربوط ہوں مرکب اصم کہتے ہیں مثلاً $5\sqrt{2}$ اور $4\sqrt{3}$ مفرد مقادیر اصم ہیں لیکن $5\sqrt{2}+4\sqrt{3}$ اور $5\sqrt{2}-4\sqrt{3}$ مرکب مقادیر اصم ہیں۔

۹۴ - اگر دو مقادیر اصم ایسی ہوں کہ اُن کا حاصل ضرب ناطق ہو تو اِسے حسابی اصطلاح میں اس طرح بیان کرتے ہیں کہ ہر ایک مقدار مذکورہ دوسری مقدار میں ضرب کھانے سے ناطق یا منطق بنجاتی ہے مثلاً $2\sqrt{5}$ اور $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ بالترتیب $\sqrt{5}$ اور $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ میں ضرب کھانے سے ناطق بن جاتی ہیں کیونکہ

$$2\sqrt{5}\times\sqrt{5}=10$$

اور $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=3-2=1$

اگر درجہ دوم کے دو ثنائی اصم جملوں میں ارقام ایک ہی ہوں مگر وہ علامات جس کے ذریعے اُن کی دونوں رقمیں مربوط ہیں مختلف ہوں تو انہیں ایک دوسرے کا زوج یا متمم کہتے ہیں مثلاً $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ اور $2\sqrt{5}-\sqrt{7}$ کے زوج یا متمم بالترتیب $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ اور $2\sqrt{5}+\sqrt{7}$ ہیں

اس سے ظاہر ہے کہ ہر ایک ثنائی مقدار اصم درجہ دوم ناطق بنجاتی ہے اگر وہ متمم مقدار اصم میں ضرب دیدی جائے اسلئے ایک ایسی کسر اصم کی تحویل جس کا نسب نما ثنائی اصم درجہ دوم ہو ایک ایسی کسر مساوی کی طرف ہو سکتی ہے جس کا نسب نما ناطق ہو

نیز ایک ایسی کسر کا نسب نما جس میں تین مقادیر اصم درجہ دوم شامل ہوں

ناطق بن سکتا ہے۔

فرض کرو کہ کسر مجوزہ $\frac{ا}{\sqrt{ب}+\sqrt{ج}+\sqrt{د}}$ ہے اگر اس کے شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو $\sqrt{ب}+\sqrt{ج}+\sqrt{د}$ کے زوج یعنی $\sqrt{ب}+\sqrt{ج}-\sqrt{د}$ میں ضرب دی جائے تو اس عمل کے بعد نئی کسر کا نیا نسب نما $(\sqrt{ب}+\sqrt{ج})^{۲}-(\sqrt{د})^{۲}$ یعنی $ب+ج-د+۲\sqrt{ب ج}$ ہوگا۔ اب اگر ایک دفعہ اور شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو نئے نسب نما کے زوج $(ب+ج-د)-۲\sqrt{ب ج}$ میں ضرب دیجائے تو اس سے نسب نما ناطق بن جائیگا یعنی آخری نسب نما $=(ب+ج-د)^{۲}-۴ ب ج$ جو ایک مقدار ناطق ہے

مثال ۱۔ معلوم ہے $\sqrt{۲}=۱٫۴۱۴$ تین مرتبہ کے اعشاریہ تک $\frac{۱+\sqrt{۲}}{۳-۲\sqrt{۲}}$ کی قیمت دریافت کرو

$$\frac{۱+\sqrt{۲}}{۳-۲\sqrt{۲}}=\frac{(۱+\sqrt{۲})(۳+۲\sqrt{۲})}{(۳-۲\sqrt{۲})(۳+۲\sqrt{۲})}$$

$$=\frac{۳+۳\sqrt{۲}+۲\sqrt{۲}+۴}{۹-۸}=۷+۵\sqrt{۲}$$

$$=۷+۵\times۱٫۴۱۴=۷+۷٫۰۷۰=۱۴٫۰۷۰$$

مثال ۲۔ $\frac{\sqrt{۱+لا^{۲}}-\sqrt{۱-لا^{۲}}}{\sqrt{۱+لا^{۲}}+\sqrt{۱-لا^{۲}}}$ کے نسب نما کو ناطق بناؤ

جملہ مجوزہ $=\frac{(\sqrt{۱+لا^{۲}}-\sqrt{۱-لا^{۲}})^{۲}}{(\sqrt{۱+لا^{۲}}+\sqrt{۱-لا^{۲}})(\sqrt{۱+لا^{۲}}-\sqrt{۱-لا^{۲}})}$

$$= \frac{(لا^۲+۱)+(لا^۲-۱)-۲\sqrt{لا^۴-۱}}{(لا^۲+۱)-(لا^۲-۱)} = \frac{۲-۲\sqrt{لا^۴-۱}}{۲لا^۲} = \frac{۱-\sqrt{لا^۴-۱}}{لا^۲}$$

مثال ۳ ـ جملہ $\frac{۳+\sqrt{۶}}{۵\sqrt{۳}-۲\sqrt{۱۲}-\sqrt{۳۲}+\sqrt{۵۰}}$ کو مختصر صورت میں لاؤ

نسب نما $= ۵\sqrt{۳}-۲\times۲\sqrt{۳}-۴\sqrt{۲}+۵\sqrt{۲} = \sqrt{۳}+\sqrt{۲}$

اسلئے کسر مجوزہ $= \frac{۳+\sqrt{۶}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}} = \frac{(۳+\sqrt{۶})(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})}{(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})}$

$$= \frac{۳\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}+۳\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳}}{۳-۲} = \sqrt{۳}$$

مثال ۴ ـ $\frac{۷}{۱+۲^{\frac{۱}{۴}}+۲^{\frac{۱}{۲}}}$ کو ایسی صورت میں تحویل کرو جس کا نسب نما ناطق ہو۔

جملہ $= \frac{۷}{۱+۲^{\frac{۱}{۴}}+۲^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{۷\{۲^{\frac{۱}{۴}}-(۱+۲^{\frac{۱}{۲}})\}}{\{۲^{\frac{۱}{۴}}-(۱+۲^{\frac{۱}{۲}})\}\{۲^{\frac{۱}{۴}}+(۱+۲^{\frac{۱}{۲}})\}}$

نسب نما $= ۲^{\frac{۱}{۲}}-(۱+۲^{\frac{۱}{۲}})^۲ = ۲^{\frac{۱}{۲}}-(۲+۲\times۲^{\frac{۱}{۲}}+۱) = ۳+۲^{\frac{۱}{۲}}$

اسلئے جملہ مجوزہ $= \frac{۷\{۲^{\frac{۱}{۴}}-(۱+۲^{\frac{۱}{۲}})\}}{۳+۲^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{۷\{۱-۲^{\frac{۱}{۴}}+۲^{\frac{۱}{۲}}\}(۳-۲^{\frac{۱}{۲}})}{(۳+۲^{\frac{۱}{۲}})(۳-۲^{\frac{۱}{۲}})}$

$$= \frac{۷(۳-۳\times۲^{\frac{۱}{۴}}+۳\times۲^{\frac{۱}{۲}}-۲^{\frac{۱}{۲}}+۲^{\frac{۳}{۴}}-۲)}{۹-۲}$$

$$= ۱-۳\times۲^{\frac{۱}{۴}}+۲\times۲^{\frac{۱}{۲}}+۲^{\frac{۳}{۴}}$$

مثال ۵ - مختصر کرو $\frac{12}{3+\sqrt{5}-2\sqrt{2}}$

جملہ $= \frac{12(3+\sqrt{5}+2\sqrt{2})}{(3+\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2} = \frac{12(3+\sqrt{5}+2\sqrt{2})}{6+6\sqrt{5}}$

$= \frac{2(3+\sqrt{5}+2\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$

$= \frac{2+2\sqrt{5}+2\sqrt{10}-2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{2}$

۹۵ - فرض کرو کہ ف ایک جملۂ صحیح چند معین مقادیر اصم کا ہے اور ق ایک اور جملہ صحیح اُنہی مقادیر اصم کا ہے اور دونوں جملے ایسے ہیں کہ ف اور ق کا حاصل ضرب ناطق ہے اس میں ق کو ف کا **منطق جز ضربی** بلحاظ ان معین مقادیر اصم کے کہتے ہیں ظاہر ہے کہ اگر کسی مقدار اصم کا ایک منطق جز ضربی معلوم ہو جائے تو اس کو کسی اور ناطق جز ضربی میں ضرب دینے سے بیشمار منطق اجزاء ضربی حاصل ہو سکتے ہیں

۹۶ - کسی مفرد جملہ اصم کا منطق جز ضربی دریافت کرو۔

(۱) فرض کرو کہ زیر بحث صرف مقادیر اصم درجہ دوم ہیں اور ان کی تعداد دو ہے یعنی $\sqrt{ف}$ اور $\sqrt{ق}$ اِن دو مقادیر اصم کے مفرد جملہ صحیح کی صورت عام $ل = ا\{(ف)^{\frac{1}{2}}\}^{2م+1} \times \{(ق)^{\frac{1}{2}}\}^{2ن+1}$ ہے جس میں ا ناطق ہے جفت قوت نما لینے کی ضرورت نہیں کیونکہ $(ف^{\frac{1}{2}})^{2م} = ف^{م}$ جو کہ ایک مقدار ناطق ہے۔

اب $ل = ا(ف^{م}\, ق^{ن})\, ف^{\frac{1}{2}}\, ق^{\frac{1}{2}}$

خطوط وحدانی کے اندر جو جملے کا حصہ ہے وہ ناطق ہے۔

اسلئے معلوم ہوا کہ منطق جزضربی $ف^{\frac{۱}{۲}} ق^{\frac{۱}{۲}}$ ہے کیونکہ

$ل \times ف^{\frac{۱}{۲}} ق^{\frac{۱}{۲}} = (ا ف^{۲} ق^{۲}) ف ق$

مثال $۱۶ \times ۲^{\frac{۳}{۲}} \times ۳^{\frac{۵}{۲}} \times ۵^{\frac{۱}{۲}}$ کا منطق جزضربی $۲^{\frac{۱}{۲}} \times ۳^{\frac{۱}{۲}} \times ۵^{\frac{۱}{۲}}$

یعنی $(۳۰)^{\frac{۱}{۲}}$ ہے۔

(۲) فرض کرو کہ مجوزہ مقادیر اصم $ف^{\frac{۱}{س}}$، $ق^{\frac{۱}{ع}}$، $ر^{\frac{۱}{ط}}$ ہیں

ان مقادیر کے مفرد جملہ صحیح کی صورت عامہ

$م = ا ف^{\frac{ل}{س}} ق^{\frac{ن}{ع}} ر^{\frac{ج}{ط}}$ ہے ..... (۱)

ظاہر ہے کہ (۱) کا منطق جزضربی $ف^{۱-\frac{ل}{س}} ق^{۱-\frac{ن}{ع}} ر^{۱-\frac{ج}{ط}}$

یعنی $ف^{\frac{س-ل}{س}} ق^{\frac{ع-ن}{ع}} ر^{\frac{ط-ج}{ط}}$ ہے

مثال $م = ۳۱ \times ۳^{\frac{۷}{۶}} \times ۵^{\frac{۳}{۵}} \times ۷^{\frac{۹}{۲}} = ۳۱ \times ۳^{۱+\frac{۱}{۶}} \times ۵^{\frac{۳}{۵}} \times ۷^{۴+\frac{۱}{۲}}$

$= (۳۱ \times ۳ \times ۷^{۴}) ۳^{\frac{۱}{۶}} \times ۵^{\frac{۳}{۵}} \times ۷^{\frac{۱}{۲}}$

اسلئے منطق جزضربی $۳^{\frac{۵}{۶}} \times ۵^{\frac{۲}{۵}} \times ۷^{\frac{۱}{۲}}$ ہے

۹۷ — جملہ ثنائی اصم کا منطق جزضربی دریافت کرو۔

(۱) جملہ ثنائی کی صورت عامہ جس میں صرف دو مقادیر اصم درجہ دوم شامل ہوں $ا\sqrt{ف} + ب\sqrt{ق}$ ہے کیونکہ اگر ف مربع کامل ہو تو اس خاص صورت میں اس کی شکل $ع + ب\sqrt{ق}$ ہوگی جہاں ع اور ب دونوں مقادیر ناطق ہیں

ظاہر ہے کہ جملہ $ا\sqrt{ف} + ب\sqrt{ق}$ کا منطق جزضربی $ا\sqrt{ف} - ب\sqrt{ق}$ ہے کیونکہ اگر $م = ا\sqrt{ف} + ب\sqrt{ق}$.

تو م $(ا\sqrt{ف} - ب\sqrt{ق}) = (ا\sqrt{ف})^{۲} - (ب\sqrt{ق})^{۲}$

$= ا^{۲}ف - ب^{۲}ق$ جو ایک مقدار ناطق ہے۔

(۲) جملہ ثنائی اصم کی صورت عامہ $\sqrt[ف]{ا} + \sqrt[ق]{ب}$ ہے یا $\sqrt[ف]{ا} - \sqrt[ق]{ب}$

مثلاً $۳^{\frac{۱}{۵}} + ۲^{\frac{۴}{۱۵}} = \sqrt[۱۵]{۳^{۳}} + \sqrt[۱۵]{۲^{۴}} = \sqrt[۱۵]{۲۷} + \sqrt[۱۵]{۱۶}$

اور $۴^{\frac{۲}{۱۵}} - ۳^{\frac{۴}{۱۵}} = \sqrt[۱۵]{۴^{۲}} - \sqrt[۱۵]{۳^{۴}} = \sqrt[۱۵]{۱۶} - \sqrt[۱۵]{۸۱}$

اس سے معلوم ہوا کہ جملہ ثنائی اصم $د\,ل^{\frac{ج}{ع}} \pm ر\,م^{\frac{ق}{ط}}$ کی تحویل ہمیشہ صورت عامہ $\sqrt[ف]{ا} \pm \sqrt[ق]{ب}$ کی طرف ہوسکتی ہے اس لئے ہم اس کا منطق جزضربی دریافت کرتے ہیں۔

صورت اول ۔ فرض کرو کہ مقدار اصم $\sqrt[ف]{ا} - \sqrt[ق]{ب}$ دی ہوئی ہے اور اس کا منطق جزضربی مطلوب ہے۔

فرض کرو کہ $\sqrt[ف]{ا} = لا$ اور $\sqrt[ق]{ب} = ما$ اور فرض کرو کہ ف اور ق کا ذو اضعاف اقل ن ہے تب ظاہر ہے کہ $لا^{ن}$ اور $ما^{ن}$ دونوں ناطق ہیں اب ن کی تمام قیمتوں کے لئے $لا^{ن} - ما^{ن}$ جملہ $لا - ما$ پر پورا تقسیم ہوسکتا ہے اور

$لا^{ن} - ما^{ن} = (لا - ما)(لا^{ن-۱} + لا^{ن-۲}ما + لا^{ن-۳}ما^{۲} + \dots\dots\dots + ما^{ن-۱})$

پس ظاہر ہے کہ منطق جزضربی مطلوب $لا^{ن-۱} + لا^{ن-۲}ما + لا^{ن-۳}ما^{۲} + \dots + ما^{ن-۱}$ ہے اور منطق حاصل ضرب $لا^{ن} - ما^{ن}$ ہے

صورت دوم ۔ فرض کرو کہ جملہ اصم معلوم $\sqrt[ف]{ا} + \sqrt[ق]{ب}$ ہے نیز لا و ما و ن کے معنی وہی ہیں جو اوپر بیان ہوئے تب

(ا) اگر ن **جفت** ہو تو $لا + ما$ پر $لا^{ن} - ما^{ن}$ پورا تقسیم ہوسکتا ہے

یعنی $لا^{ن} - ما^{ن} = (لا + ما)(لا^{ن-۱} - لا^{ن-۲}ما + \dots + لا\,ما^{ن-۲} - ما^{ن-۱})$

پس اس صورت میں منطق جز ضربی $لا^{ن-۱} - لا^{ن-۲} ما + \dots\dots$

$+ لا ما^{ن-۲} - ما^{ن-۱}$ ہے اور ناطق حاصل ضرب $لا^{ن} - ما^{ن}$

(ب) اگر ن **طاق** ہو تو $لا^{ن} + ما^{ن}$ پورا تقسیم $لا + ما$ پر ہو سکتا ہے

اور $لا^{ن} + ما^{ن} = (لا + ما)(لا^{ن-۱} - لا^{ن-۲} ما + \dots - لا ما^{ن-۲} + ما^{ن-۱})$

پس منطق جز ضربی $لا^{ن-۱} - لا^{ن-۲} ما + \dots - لا ما^{ن-۲} + ما^{ن-۱}$ ہے

اور ناطق حاصل ضرب $لا^{ن} + ما^{ن}$

مثال ۱ — $\sqrt[۲]{۳} + \sqrt[۳]{۵}$ کا منطق جز ضربی دریافت کرو

فرض کرو کہ $لا = ۳^{\frac{۱}{۲}}$ و $ما = ۵^{\frac{۱}{۳}}$ تو $لا^{۶}$ اور $ما^{۶}$ دونوں ناطق ہیں

$لا^{۶} - ما^{۶} = (لا + ما)(لا^{۵} - لا^{۴} ما + لا^{۳} ما^{۲} - لا^{۲} ما^{۳} + لا ما^{۴} - ما^{۵})$

پس منطق جز ضربی مطلوب ہے $لا^{۵} - لا^{۴} ما + لا^{۳} ما^{۲} - لا^{۲} ما^{۳} + لا ما^{۴} - ما^{۵}$

$= ۳^{\frac{۵}{۲}} - ۳^{\frac{۴}{۲}} \times ۵^{\frac{۱}{۳}} + ۳^{\frac{۳}{۲}} \times ۵^{\frac{۲}{۳}} - ۳^{\frac{۲}{۲}} \times ۵^{\frac{۳}{۳}} + ۳^{\frac{۱}{۲}} \times ۵^{\frac{۴}{۳}} - ۵^{\frac{۵}{۳}}$ چونکہ

$لا = ۳^{\frac{۱}{۲}}$ اور $ما = ۵^{\frac{۱}{۳}}$

$= ۳^{\frac{۵}{۲}} - ۹ \times ۵^{\frac{۱}{۳}} + ۳^{\frac{۳}{۲}} \times ۵^{\frac{۲}{۳}} - ۱۵ + ۳^{\frac{۱}{۲}} \times ۵^{\frac{۴}{۳}} - ۵^{\frac{۵}{۳}}$

اور ناطق حاصل ضرب $= ۳^{\frac{۶}{۲}} - ۵^{\frac{۶}{۳}} = ۳^{۳} - ۵^{۲} = ۲$

مثال ۲ — $۳ \times ۲^{\frac{۱}{۳}} - ۴ \times ۳^{\frac{۱}{۶}}$ کا منطق جز ضربی دریافت کرو

فرض کرو کہ $لا = ۳ \times ۲^{\frac{۱}{۳}}$ اور $ما = ۴ \times ۳^{\frac{۱}{۶}}$ تب $لا^{۶}$ اور $ما^{۶}$ مقادیر ناطق ہیں

اور $لا^{۶} - ما^{۶} = (لا - ما)(لا^{۵} + لا^{۴} ما + \dots\dots + لا ما^{۴} + ما^{۵})$

پس منطق جز ضربی مطلوب ہے $لا^{۵} + لا^{۴} ما + لا^{۳} ما^{۲} + لا^{۲} ما^{۳} + لا ما^{۴} + ما^{۵}$

$= ۳^{۵} \times ۲^{\frac{۵}{۳}} + ۳^{۴} \times ۴ \times ۲^{\frac{۴}{۳}} \times ۳^{\frac{۱}{۶}} + ۳^{۳} \times ۴^{۲} \times ۲ \times ۳^{\frac{۱}{۳}}$

$+ ۳^{۲} \times ۴^{۳} \times ۲^{\frac{۲}{۳}} \times ۳^{\frac{۱}{۲}} + ۳ \times ۴^{۴} \times ۲^{\frac{۱}{۳}} \times ۳^{\frac{۲}{۳}} + ۴^{۵} \times ۳^{\frac{۵}{۶}}$

$= ۳^{۵} \times ۲ \times ۲^{\frac{۲}{۳}} + ۳^{۴} \times ۸ \times ۲^{\frac{۱}{۳}} \times ۳^{\frac{۱}{۶}} + ۳^{۳} \times ۳۲ \times ۳^{\frac{۱}{۳}}$

$$+\ ۳^{۲} \times ۴^{۳} \times ۲^{\frac{۲}{۳}} \times ۳^{\frac{۱}{۲}} + ۳ \times ۴^{۴} \times ۲^{\frac{۱}{۳}} \times ۳^{\frac{۱}{۲}} + ۴^{۵} \times ۳^{\frac{۵}{۲}}$$

مثال ۳ـــ کسر $\dfrac{۵^{\frac{۱}{۲}} + ۹^{\frac{۱}{۸}}}{۵^{\frac{۱}{۲}} - ۹^{\frac{۱}{۸}}}$ کے نسب نما کو ناطق بناؤ

نسب نما $= ۵^{\frac{۱}{۲}} - ۹^{\frac{۱}{۸}} = ۵^{\frac{۱}{۲}} - ۳^{\frac{۱}{۴}}$

فرض کرو کہ $۵^{\frac{۱}{۲}} =$ لا اور $۳^{\frac{۱}{۴}} =$ ما تب نسب نما = لا − ما

چونکہ لا^{۴} − ما^{۴} = (لا − ما)(لا^{۳} + لا^{۲} ما + لا ما^{۲} + ما^{۳})

نسب نما کا منطق جزضربی $= ۵^{\frac{۳}{۲}} + ۵^{\frac{۲}{۲}} \times ۳^{\frac{۱}{۴}} + ۵^{\frac{۱}{۲}} \times ۳^{\frac{۲}{۴}} + ۳^{\frac{۳}{۴}}$

اور ناطق نسب نما $= ۵^{\frac{۴}{۲}} - ۳^{\frac{۴}{۴}} = ۵^{۲} - ۳ = ۲۲$

$$\therefore \text{جملہ} = \frac{\left(۵^{\frac{۱}{۲}} + ۳^{\frac{۱}{۴}}\right)\left(۵^{\frac{۳}{۲}} + ۵^{\frac{۲}{۲}} \times ۳^{\frac{۱}{۴}} + ۵^{\frac{۱}{۲}} \times ۳^{\frac{۲}{۴}} + ۳^{\frac{۳}{۴}}\right)}{۲۲}$$

$$= \frac{۵^{\frac{۴}{۲}} + ۵^{\frac{۳}{۲}} \times ۳^{\frac{۱}{۴}} \times ۲ + ۵^{\frac{۲}{۲}} \times ۳^{\frac{۲}{۴}} \times ۲ + ۵^{\frac{۱}{۲}} \times ۳^{\frac{۳}{۴}} \times ۲ + ۳^{\frac{۴}{۴}}}{۲۲}$$

$$= \frac{۱۴ + ۵^{\frac{۳}{۲}} \times ۳^{\frac{۱}{۴}} + ۵ \times ۳^{\frac{۱}{۲}} + ۵^{\frac{۱}{۲}} \times ۳^{\frac{۳}{۴}}}{۱۱}$$

۹۸ـــ ایک جملہ ثلاثی میں صرف مقادیر اصم درجہ دوم شامل ہیں اُس کا منطق جزضربی دریافت کرو۔

فرض کرو کہ جملہ ثلاثی م $= \sqrt{\text{ف}} + \sqrt{\text{ق}} + \sqrt{\text{ر}}$ دیا ہوا ہے اور اس کا منطق جزضربی مطلوب ہے۔

سب سے پہلے $\sqrt{\text{ر}}$ کو دور کرو یعنی جملہ معلومہ کو اس کے زوج $\sqrt{\text{ف}} + \sqrt{\text{ق}} - \sqrt{\text{ر}}$ سے ضرب دو۔

$$\therefore \text{م}\left(\sqrt{\text{ف}} + \sqrt{\text{ق}} - \sqrt{\text{ر}}\right) = \left(\sqrt{\text{ف}} + \sqrt{\text{ق}}\right)^{۲} - \left(\sqrt{\text{ر}}\right)^{۲}$$

$$= \text{ف} + \text{ق} - \text{ر} + ۲\sqrt{\text{ف ق}} \quad \text{.........} \quad (۱)$$

اب (۱) سے $\sqrt{\text{ف ق}}$ کو دور کرنے کے لئے ہمیں اس کو $\text{ف} + \text{ق} - \text{ر} + ۲\sqrt{\text{ف ق}}$ کے زوج سے ضرب دینی چاہیئے۔

$$\therefore \left(\text{ف} + \text{ق} - \text{ر} - ۲\sqrt{\text{ف ق}}\right)\left(\sqrt{\text{ف}} + \sqrt{\text{ق}} - \sqrt{\text{ر}}\right) \text{م}$$

$$= (\text{ف} + \text{ق} - \text{ر})^{۲} - \left\{۲\sqrt{\text{ف ق}}\right\}^{۲}$$

$$= \text{ف}^{۲} + \text{ق}^{۲} + \text{ر}^{۲} - ۲\,\text{ف ق} - ۲\,\text{ف ر} - ۲\,\text{ق ر}$$

اسلئے منطق جز ضربی مطلوب ہوا

$$\left(\text{ف} + \text{ق} - \text{ر} - ۲\sqrt{\text{ف ق}}\right)\left(\sqrt{\text{ف}} + \sqrt{\text{ق}} - \sqrt{\text{ر}}\right)$$

$$= \left(\sqrt{\text{ف}} - \sqrt{\text{ق}} + \sqrt{\text{ر}}\right)\left(\sqrt{\text{ف}} - \sqrt{\text{ق}} - \sqrt{\text{ر}}\right)\left(\sqrt{\text{ف}} + \sqrt{\text{ق}} - \sqrt{\text{ر}}\right. \quad \ldots\ldots (۲)$$

اگر ہم جملہ (۲) کو بغور دیکھیں تو معلوم ہوگا کہ اس کے تینوں اجزائے ضربی جملہ $+\sqrt{\text{ف}} \pm \sqrt{\text{ق}} \pm \sqrt{\text{ر}}$ کی علامات + اور − کو ہر ایک ترتیب میں لینے سے حاصل ہوتے ہیں سوائے ترتیب + + + کے جو کہ دیئے ہوئے جملہ ثلاثی میں پہلے سے موجود ہے۔

مثال ۱ — جملہ $\sqrt{۲} - \sqrt{۳} + \sqrt{۵}$ کا منطق جز ضربی

$$= \left(\sqrt{۲} - \sqrt{۳} - \sqrt{۵}\right)\left(\sqrt{۲} + \sqrt{۳} + \sqrt{۵}\right)\left(\sqrt{۲} + \sqrt{۳} - \sqrt{۵}\right)$$

مثال ۲ — $۱ + ۲\sqrt{۳} - ۳\sqrt{۲}$ کا منطق جز ضربی

$$= \left(۱ + ۲\sqrt{۳} + ۳\sqrt{۲}\right)\left(۱ - ۲\sqrt{۳} + ۳\sqrt{۲}\right)\left(۱ - ۲\sqrt{۳} - ۳\sqrt{۲}\right)$$

مثال ۳ — $۱ + \sqrt{۲} - \sqrt{۳} + \sqrt{۴}$ کا منطق جز ضربی

$$= \left(۱ + \sqrt{۲} - \sqrt{۳} - \sqrt{۴}\right)\left(۱ + \sqrt{۲} + \sqrt{۳} + \sqrt{۴}\right)\left(۱ + \sqrt{۲} + \sqrt{۳} - \sqrt{۴}\right)$$

$$\times \left(۱ - \sqrt{۲} - \sqrt{۳} + \sqrt{۴}\right)\left(۱ - \sqrt{۲} - \sqrt{۳} - \sqrt{۴}\right)\left(۱ - \sqrt{۲} + \sqrt{۳} + \sqrt{۴}\right)$$

$\times (1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4})$

۹۹ - کسی مقدار ناطق کے جذر المربع کا کچھ حصہ ناطق اور کچھ حصہ اصم درجہ دوم نہیں ہو سکتا۔

بشرط امکان فرض کرو کہ $\sqrt{\text{ن}} = \text{ا} + \sqrt{\text{م}}$

طرفین کا مربع لینے سے $\text{ن} = \text{ا}^2 + \text{م} + 2\,\text{ا}\sqrt{\text{م}}$

جس سے $\sqrt{\text{م}} = \dfrac{\text{ن} - \text{ا}^2 - \text{م}}{2\,\text{ا}}$

یعنی ایک مقدار اصم مقدار ناطق کے برابر ہوئی اور یہ باطل ہے

۱۰۰ — اگر $\text{ا} + \sqrt{\text{ب}} = \text{لا} + \sqrt{\text{ما}}$ جہاں مقادیر ا اور لا ناطق ہیں اور $\sqrt{\text{ب}}$ اور $\sqrt{\text{ما}}$ غیر ناطق تو ثابت کرو کہ $\text{ا} = \text{لا}$ اور $\text{ب} = \text{ما}$

اگر ا اور لا برابر نہ ہوں تو فرض کرو کہ $\text{ا} = \text{لا} + \text{م}$

تب $\text{لا} + \text{م} + \sqrt{\text{ب}} = \text{لا} + \sqrt{\text{ما}}$

اسلئے $\text{م} + \sqrt{\text{ب}} = \sqrt{\text{ما}}$

یعنی ما کا کچھ حصہ ناطق ہے اور کچھ حصہ غیر ناطق جو بموجب دفعہ سابق ناممکن ہے۔

اسلئے $\text{ا} = \text{لا}$ اور $\sqrt{\text{ب}} = \sqrt{\text{ما}}$ یعنی $\text{ب} = \text{ما}$

نوٹ - یاد رہے کہ نتیجہ مندرجہ بالا صرف اُس صورت میں صحیح ہو سکتا ہے جبکہ مقادیر $\sqrt{\text{ب}}$ اور $\sqrt{\text{ما}}$ فی الحقیقت غیر ناطق ہوں مثلاً ربط $5 + \sqrt{9} = 3 + \sqrt{25}$ سے ہم یہ نتیجہ نہیں نکال سکتے کہ $5 = 3$ اور $9 = 25$

۱۰۱ — $\text{ا} + \sqrt{\text{ب}}$ کا جذر دریافت کرو جہاں $\sqrt{\text{ب}}$ مقدار اصم ہے،

فرض کرو کہ $\sqrt{\text{ا} + \sqrt{\text{ب}}} = \sqrt{\text{لا}} + \sqrt{\text{ما}}$

طرفین کا مربع لینے سے $\text{ا} + \sqrt{\text{ب}} = \text{لا} + \text{ما} + 2\sqrt{\text{لا}\,\text{ما}}$

اسلئے دفعہ گزشتہ کی مدد سے

$$\left.\begin{array}{l}\text{ا} = \text{لا} + \text{ما} \\ \sqrt{\text{ب}} = 2\sqrt{\text{لا}\,\text{ما}}\end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

اسلئے $\text{ا}^2 - \text{ب} = (\text{لا} + \text{ما})^2 - 4\,\text{لا}\,\text{ما} = (\text{لا} - \text{ما})^2$

$$\therefore \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}} = \text{لا} - \text{ما}$$

پس ہمیں حاصل ہوا $\text{لا} + \text{ما} = \text{ا}$

اور $\text{لا} - \text{ما} = \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}}$

جمع اور تفریق سے

$$2\,\text{لا} = \text{ا} + \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}} \quad \text{اور} \quad 2\,\text{ما} = \text{ا} - \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}}$$

$$\therefore \sqrt{\text{ا} + \sqrt{\text{ب}}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\text{ا} + \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}}\right)} + \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\text{ا} - \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}}\right)}$$

نوٹ لا اور ما کی قیمتیں جو ہم نے اوپر معلوم کیں وہ اصلی جملہ سے بھی زیادہ پیچیدہ ہیں اس لئے اگر $\text{ا}^2 - \text{ب}$ مربع کامل نہ ہو تو وہ عملیات میں اتنی کارآمد نہیں ہوتیں

نتیجہ صریح (۱) سے $\text{ا} - \sqrt{\text{ب}} = \text{لا} + \text{ما} - 2\sqrt{\text{لا}\,\text{ما}} = \left(\sqrt{\text{لا}} - \sqrt{\text{ما}}\right)^2$

$$\therefore \sqrt{\text{ا} - \sqrt{\text{ب}}} = \sqrt{\text{لا}} - \sqrt{\text{ما}}$$

پس معلوم ہوا کہ اگر $\sqrt{\text{ا} + \sqrt{\text{ب}}} = \sqrt{\text{لا}} + \sqrt{\text{ما}}$

تو $\sqrt{\text{ا} - \sqrt{\text{ب}}} = \sqrt{\text{لا}} - \sqrt{\text{ما}}$

مثال ۱ — $\sqrt{7 + 2\sqrt{10}} = \sqrt{\text{لا}} + \sqrt{\text{ما}}$

طرفین کا مربع لینے سے $7 + 2\sqrt{10} = \text{لا} + \text{ما} + 2\sqrt{\text{لا}\,\text{ما}}$

اسلئے $\text{لا} + \text{ما} = 7$ اور $\text{لا}\,\text{ما} = 10$

اعداد ۵ اور ۲ سے شرائط معادلات بالا پوری ہوتی ہیں اس لئے

جذر مطلوب $= \sqrt{5} + \sqrt{2}$

مثال ۲ — $\sqrt{16 - 5\sqrt{7}}$ کا جذر نکالو

فرض کرو کہ $\sqrt{16 - 5\sqrt{7}} = \sqrt{\text{لا}} - \sqrt{\text{ما}}$

تب $16 - 5\sqrt{7} = \text{لا} + \text{ما} - 2\sqrt{\text{لا}\,\text{ما}}$

اسلئے $\text{لا} + \text{ما} = 16$ اور $2\sqrt{\text{لا}\,\text{ما}} = 5\sqrt{7}$

$\therefore (\text{لا} - \text{ما})^2 = (\text{لا} + \text{ما})^2 - 4\,\text{لا}\,\text{ما} = 16^2 - (5\sqrt{7})^2 = 256 - 175 = 81$

اسلئے $\text{لا} - \text{ما} = 9$ اور $\text{لا} + \text{ما} = 16$

ان مساواتوں کو حل کرنے سے $\text{لا} = \frac{25}{2}$ اور $\text{ما} = \frac{7}{2}$

پس جذر مطلوب $= \sqrt{\frac{25}{2}} - \sqrt{\frac{7}{2}}$

مثال ۳ — $\sqrt{\sqrt{27} + \sqrt{15}}$ کا جذر نکالو

$\sqrt{27} + \sqrt{15} = 3\sqrt{3} + \sqrt{3}\sqrt{5} = \sqrt{3}\,(3 + \sqrt{5})$

اسلئے $\sqrt{\sqrt{27} + \sqrt{15}} = \sqrt[4]{3}\,\sqrt{3 + \sqrt{5}}$

مثال بالا کے موافق عمل کرنے سے ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ

$$\sqrt{3 + \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}$$

اسلئے $\sqrt{\sqrt{27} + \sqrt{15}} = \sqrt[4]{3}\left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

۱۰۲ — بعض اوقات ہم ایسے جملہ اصم درجہ دوم کا جذر بھی نکال سکتے ہیں جس میں دو سے زیادہ مقادیر اصم درجہ دوم شامل ہوں اس کی توضیح عمل ذیل سے ہوگی۔

فرض کرو کہ جملہ $ا + \sqrt{ب} + \sqrt{ج} + \sqrt{د}$ کا جذر نکالنا مطلوب ہے

فرض کرو کہ $\sqrt{ا + \sqrt{ب} + \sqrt{ج} + \sqrt{د}} = \sqrt{لا} + \sqrt{ما} + \sqrt{ی}$

$\therefore ا + \sqrt{ب} + \sqrt{ج} + \sqrt{د} = لا + ما + ی + ۲\sqrt{لاما} + ۲\sqrt{لای} + ۲\sqrt{مای}$

اب اگر $۲\sqrt{لاما} = \sqrt{ب}$ و $۲\sqrt{لای} = \sqrt{ج}$ و $۲\sqrt{مای} = \sqrt{د}$ ...(۱)

اور ساتھ ہی اگر لا و ما و ی کی قیمتیں جو ہم (۱) سے دریافت کریں مساوات $لا + ما + ی = ا$ کو پورا کریں تو ہمیں جذر مطلوب حاصل ہو جائے گا۔

مثال — $۲۱ - ۴\sqrt{۵} + ۸\sqrt{۳} - ۴\sqrt{۱۵}$ کا جذر نکالو

$$\sqrt{۲۱ - ۴\sqrt{۵} + ۸\sqrt{۳} - ۴\sqrt{۱۵}} = \sqrt{لا} + \sqrt{ما} - \sqrt{ی}$$

اسلئے $۲۱ - ۴\sqrt{۵} + ۸\sqrt{۳} - ۴\sqrt{۱۵} = لا + ما + ی + ۲\sqrt{لاما} - ۲\sqrt{لای} - ۲\sqrt{مای}$

فرض کرو کہ $۲\sqrt{لاما} = ۸\sqrt{۳}$ و $۲\sqrt{لای} = ۴\sqrt{۱۵}$ و $۲\sqrt{مای} = ۴\sqrt{۵}$

سبکو اکٹھا ضرب دینے سے $لا ما ی = ۲۴۰$ یعنی $\sqrt{لامای} = ۴\sqrt{۱۵}$

جس سے معلوم ہوا کہ $\sqrt{لا} = ۲\sqrt{۳}$ و $\sqrt{ما} = ۲$ اور $\sqrt{ی} = \sqrt{۵}$

چونکہ یہ قیمتیں مساوات $لا + ما + ی = ۲۱$ کو پورا کرتی ہیں

اسلئے جذر مطلوب $۲\sqrt{۳} + ۲ - \sqrt{۵}$ ہے

۱۰۳ — اگر $\sqrt[۳]{ا + \sqrt{ب}} = لا + \sqrt{ما}$ تو $\sqrt[۳]{ا - \sqrt{ب}} = لا - \sqrt{ما}$

طرفین کو تیسری قوت پر اٹھانے سے

$$ا + \sqrt{ب} = لا^{۳} + ۳\,لا^{۲}\,ما^{\frac{۱}{۲}} + ۳\,لا\,ما + ما^{\frac{۳}{۲}}$$

ناطق اور غیر ناطق حصوں کو آپس میں برابر رکھنے سے

$\text{ا} = \text{لا}^{۳} + ۳\,\text{لا ما}$ ، $\sqrt{\text{ب}} = ۳\,\text{لا}^{۲}\sqrt{\text{ما}} + \text{ما}\sqrt{\text{ما}}$

$\therefore \text{ا} - \sqrt{\text{ب}} = \text{لا}^{۳} - ۳\,\text{لا}^{۲}\sqrt{\text{ما}} + ۳\,\text{لا ما} - \text{ما}\sqrt{\text{ما}}$

یعنی $\sqrt[۳]{\text{ا} - \sqrt{\text{ب}}} = \text{لا} - \sqrt{\text{ما}}$

اسی طرح مسئلہ ثنائی کی استعانت سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر $\sqrt[\text{ن}]{\text{ا} + \sqrt{\text{ب}}} = \text{لا} + \sqrt{\text{ما}}$ تو $\sqrt[\text{ن}]{\text{ا} - \sqrt{\text{ب}}} = \text{لا} - \sqrt{\text{ما}}$ جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے

۱۰۴ — ترکیب ذیل سے $\text{ا} \pm \sqrt{\text{ب}}$ کی صورت کے جملوں کے جذرالکعب بعض اوقات دریافت ہو سکتے ہیں ۔

فرض کرو کہ $\sqrt[۳]{\text{ا} + \sqrt{\text{ب}}} = \text{لا} + \sqrt{\text{ما}}$

تب $\sqrt[۳]{\text{ا} - \sqrt{\text{ب}}} = \text{لا} - \sqrt{\text{ما}}$

اسلئے $\sqrt[۳]{\text{ا}^{۲} - \text{ب}} = \text{لا}^{۲} - \text{ما}$ ....(۱)

نیز بموجب دفعہ گذشتہ $\text{ا} = \text{لا}^{۳} + ۳\,\text{لا ما}$ ....(۲)

اب لا اور ما کی قیمتیں (۱) اور (۲) سے اس طرح دریافت کرتے ہیں

(۱) میں فرض کرو کہ $\sqrt[۳]{\text{ا}^{۲} - \text{ب}} = \text{ج}$ تب ما کی قیمت (۲) میں رکھنے سے ہمیں حاصل ہوگا

$\text{ا} = \text{لا}^{۳} + ۳\,\text{لا}\,(\text{لا}^{۲} - \text{ج})$

یعنی $۴\,\text{لا}^{۳} - ۳\,\text{ج لا} = \text{ا}$

اگر مساوات میں بطور آزمایش مختلف قیمتیں رکھنے سے لا کی ایک قیمت ملجائے تو ما کی قیمت مساوات $\text{ما} = \text{لا}^{۲} - \text{ج}$ سے معلوم ہوسکیگی

نوٹ ہم یہاں جزرالکعب مطلوب کو $\sqrt{\text{لا}} + \sqrt{\text{ما}}$ کی شکل میں نہیں رکھتے

کیونکہ اگر اس کو تیسری قوت پر اُٹھایا جائے تو

$$\text{ا} + \sqrt{\text{ب}} = \text{لا}\sqrt{\text{لا}} + ۳\,\text{لا}\sqrt{\text{ما}} + ۳\,\text{ما}\sqrt{\text{لا}} + \text{ما}\sqrt{\text{ما}}$$

اب چونکہ بائیں طرف کی ہر ایک رقم اصم ہے اس لئے ہم طرفین کے ناطق اور اصم حصوں کو آپس میں برابر نہیں رکھ سکتے۔

مثال ۱ — $۷۲ - ۳۲\sqrt{۵}$ کا جذر الکعب دریافت کرو

فرض کرو کہ $\sqrt[۳]{۷۲ - ۳۲\sqrt{۵}} = \text{لا} - \sqrt{\text{ما}}$

تب $\sqrt[۳]{۷۲ + ۳۲\sqrt{۵}} = \text{لا} + \sqrt{\text{ما}}$

دونوں کو ضرب دینے سے $\sqrt[۳]{۵۱۸۴ - ۱۰۲۴ \times ۵} = \text{لا}^۲ - \text{ما}$

یعنی $۴ = \text{لا}^۲ - \text{ما}$ ....(۱)

نیز $۷۲ - ۳۲\sqrt{۵} = \text{لا}^۳ - ۳\,\text{لا}^۲\sqrt{\text{ما}} + ۳\,\text{لا}\,\text{ما} - \text{ما}\sqrt{\text{ما}}$

جس سے معلوم ہوا کہ $۷۲ = \text{لا}^۳ + ۳\,\text{لا}\,\text{ما}$ .....(۲)

(۱) اور (۲) سے $۷۲ = \text{لا}^۳ + ۳\,\text{لا}(\text{لا}^۲ - ۴)$

یعنی $\text{لا}^۳ - ۳\,\text{لا} = ۱۸$

جس سے $\text{لا} = ۳$ اسلئے $\text{ما} = ۵$

اور جذر الکعب $= ۳ - \sqrt{۵}$

۱۰۵ — جب کسی جملہ ثنائی میں جس کا جذر الکعب مطلوب ہو دو مقادیر اصم درجہ دوم شامل ہوں تو ہمیں اس طرح عمل کرنا چاہیئے

مثال ۱ — $۹\sqrt{۳} + ۱۱\sqrt{۲}$ کا جذر الکعب دریافت کرو۔

$$\sqrt[۳]{۹\sqrt{۳} + ۱۱\sqrt{۲}} = \sqrt[۳]{۳\sqrt{۳}\left(۳ + \frac{۱۱}{۳}\sqrt{\frac{۲}{۳}}\right)} = \sqrt{۳}\,\sqrt[۳]{۳ + \frac{۱۱}{۳}\sqrt{\frac{۲}{۳}}}$$

موافق مثال سابق عمل کرنے سے حاصل ہوگا

$$\sqrt[3]{3+\frac{11}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}} = 1+\sqrt{\frac{2}{3}}$$

∴ جذرالکعب مطلوب $= \sqrt{3}\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \sqrt{3}+\sqrt{2}$

۱۰۶ — اب ہم مقادیر اصم کی چند مشکل مثالیں حل کرتے ہیں

مثال ۱ — $\frac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$ کے نسب نما کو ناطق بناؤ۔

حل $= \frac{4}{3^{\frac{2}{3}}-3^{\frac{1}{3}}+1} = \frac{4\left(3^{\frac{1}{3}}+1\right)}{\left(3^{\frac{1}{3}}+1\right)\left(3^{\frac{2}{3}}-3^{\frac{1}{3}}+1\right)}$

$= \frac{4\left(3^{\frac{1}{3}}+1\right)}{3+1} = 3^{\frac{1}{3}}+1$

مثال ۲ — $\frac{3}{2}(\text{لا}-1)+\sqrt{2\text{لا}^2-7\text{لا}-4}$ کا جذر نکالو

حل $= \frac{1}{2}\left\{3\text{لا}-3+2\sqrt{(2\text{لا}+1)(\text{لا}-4)}\right\}$

$= \frac{1}{2}\left\{(2\text{لا}+1)+(\text{لا}-4)+2\sqrt{(2\text{لا}+1)(\text{لا}-4)}\right\}$

ظاہر ہے کہ جذر مطلوب $= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2\text{لا}+1}+\sqrt{\text{لا}-4}\right)$

مثال ۳ — معلوم ہے $\sqrt{5} = 2.23607$

$\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}+\sqrt{7-3\sqrt{5}}}$ کی قیمت دریافت کرو

شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو $\sqrt{2}$ سے ضرب دو تو

حل $= \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2+\sqrt{14-6\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2+3-\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = .44721$

مثال ۴ — مساوات $\sqrt{\text{لا}+۲}+\sqrt{\text{لا}-۱۴}=۸$ کو حل کرو

عمل نقل سے $\sqrt{\text{لا}+۲}=۸-\sqrt{\text{لا}-۱۴}$

طرفین کا مربع لینے سے $\text{لا}+۲=۶۴-۱۶\sqrt{\text{لا}-۱۴}+\text{لا}-۱۴$

جس سے معلوم ہوا کہ $۱۶\sqrt{\text{لا}-۱۴}=۴۸$ یعنی $\sqrt{\text{لا}-۱۴}=۳$

اسلئے $\text{لا}-۱۴=۹ \quad \therefore \text{لا}=۲۳$

مثال ۵ — اگر $\text{لا}=\sqrt[3]{\text{ر}+\sqrt{\text{ر}^2+\text{ق}^3}}+\sqrt[3]{\text{ر}-\sqrt{\text{ر}^2+\text{ق}^3}}$

تو $\text{لا}^3+۳\,\text{ق}\,\text{لا}-۲\,\text{ر}$ کی قیمت دریافت کرو

فرض کرو کہ $\text{ا}=\sqrt[3]{\text{ر}+\sqrt{\text{ر}^2+\text{ق}^3}}$ اور $\text{ب}=\sqrt[3]{\text{ر}-\sqrt{\text{ر}^2+\text{ق}^3}}$

تب $\text{لا}=\text{ا}+\text{ب}$

اور $\text{لا}^3=\text{ا}^3+\text{ب}^3+۳\,\text{ا}\,\text{ب}(\text{ا}+\text{ب})=\text{ا}^3+\text{ب}^3+۳\,\text{ا}\,\text{ب}\,\text{لا}$

$=\left(\text{ر}+\sqrt{\text{ر}^2+\text{ق}^3}\right)+\left(\text{ر}-\sqrt{\text{ر}^2+\text{ق}^3}\right)+۳\sqrt[3]{\text{ر}^2-(\text{ر}^2+\text{ق}^3)}\times\text{لا}$

$=۲\,\text{ر}+۳\sqrt[3]{-\text{ق}^3}\times\text{لا}=۲\,\text{ر}-۳\,\text{ق}\,\text{لا}$

اسلئے $\text{لا}^3+۳\,\text{ق}\,\text{لا}-۲\,\text{ر}=۰$

مثال ۶ — اگر $\left(\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^2-\text{ب}\,\text{ج}}\right)\left(\text{ما}+\sqrt{\text{ما}^2-\text{ج}\,\text{ا}}\right)\left(\text{ی}+\sqrt{\text{ی}^2-\text{ا}\,\text{ب}}\right)$

$=\left(\text{لا}-\sqrt{\text{لا}^2-\text{ب}\,\text{ج}}\right)\left(\text{ما}-\sqrt{\text{ما}^2-\text{ج}\,\text{ا}}\right)\left(\text{ی}-\sqrt{\text{ی}^2-\text{ا}\,\text{ب}}\right)$ تو

ثابت کرو کہ ان میں سے ہر ایک جملہ $=\pm\,\text{ا}\,\text{ب}\,\text{ج}$

فرض کرو کہ ہر ایک جملہ = ک

تب $\text{ک}=\left(\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^2-\text{ب}\,\text{ج}}\right)\left(\text{ما}+\sqrt{\text{ما}^2-\text{ج}\,\text{ا}}\right)\left(\text{ی}+\sqrt{\text{ی}^2-\text{ا}\,\text{ب}}\right)$

اور نیز $\text{ک}=\left(\text{لا}-\sqrt{\text{لا}^2-\text{ب}\,\text{ج}}\right)\left(\text{ما}-\sqrt{\text{ما}^2-\text{ج}\,\text{ا}}\right)\left(\text{ی}-\sqrt{\text{ی}^2-\text{ا}\,\text{ب}}\right)$

اسلئے $\text{ک}^2 = \{\text{لا}^2 - (\text{لا}^2 - \text{ب ج})\}\{\text{ما}^2 - (\text{ما}^2 - \text{ج ا})\}\{\text{ی}^2 - (\text{ی}^2 - \text{ا ب})\}$

$= \text{ب ج} \times \text{ج ا} \times \text{ا ب} = \text{ا}^2\text{ب}^2\text{ج}^2$

اسلئے $\text{ک} = \pm \text{ا ب ج}$ یعنی ہر ایک جملہ معلومہ $= \pm \text{ا ب ج}$

مثال ۷ — اگر $\sqrt{\left(\text{لا} - \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}\right)^2 + \text{ما}^2} + \sqrt{\left(\text{لا} + \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}\right)^2 + \text{ما}^2} = ۲\text{ا}$

تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$

عمل نقل سے

$\sqrt{\left(\text{لا} - \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}\right)^2 + \text{ما}^2} = ۲\text{ا} - \sqrt{\left(\text{لا} + \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}\right)^2 + \text{ما}^2}$

طرفین کا مربع لینے سے

$\left(\text{لا} - \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}\right)^2 + \text{ما}^2 = ۴\text{ا}^2 + \left(\text{لا} + \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}\right)^2 + \text{ما}^2$

$- ۴\text{ا}\sqrt{\left(\text{لا} + \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}\right)^2 + \text{ما}^2}$

یا $-۲\text{لا}\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2} = ۴\text{ا}^2 + ۲\text{لا}\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2} - ۴\text{ا}\sqrt{\left(\text{لا} + \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}\right)^2 + \text{ما}^2}$

اسلئے عمل نقل سے

$۴\text{ا}\sqrt{\left(\text{لا} + \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}\right)^2 + \text{ما}^2} = ۴\text{ا}^2 + ۴\text{لا}\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}$

مشترک جزو ضربی ۴ کو طرفین سے خارج کرو اور طرفین کا مربع لو تو حاصل ہوگا

$\text{ا}^2\left(\text{لا} + \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}\right)^2 + \text{ا}^2\text{ما}^2 = \text{ا}^4 + \text{لا}^2(\text{ا}^2 - \text{ب}^2) + ۲\text{ا}^2\text{لا}\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}$

یا $\text{ا}^2(\text{ا}^2 - \text{ب}^2) + \text{ا}^2\text{ما}^2 = \text{ا}^4 - \text{ب}^2\text{لا}^2$

یا $\text{ب}^2\text{لا}^2 + \text{ا}^2\text{ما}^2 = \text{ا}^2\text{ب}^2$

طرفین کو $\text{ا}^2\text{ب}^2$ پر تقسیم کرنے سے $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$

امثلہ نمبری ۱۰

ذیل کی مثالوں میں نسب نماؤں کو ناطق بناؤ۔

۱- $\frac{1}{\sqrt{ا + \sqrt{ب} + \sqrt{ا} + ب}}$

۲- $\frac{۲\sqrt{ا+۱}}{\sqrt{ا-۱} - \sqrt{۲ا} + \sqrt{ا+۱}}$

۳- $\frac{(\sqrt{۳} + \sqrt{۵})(\sqrt{۵} + \sqrt{۲})}{\sqrt{۲} + \sqrt{۳} + \sqrt{۵}}$

ذیل کے جملوں کا منطق جزضربی دریافت کرو۔

۴- $\sqrt[۳]{۳} - \sqrt{۲}$ ۵- $\sqrt[۶]{۵} + \sqrt[۳]{۲}$

۶- $ا^{\frac{1}{۶}} + ب^{\frac{1}{۴}}$ ۷- $\sqrt[۳]{۳} - ۱$

۸- $۲ + \sqrt[۴]{۷}$ ۹- $\sqrt[۳]{۵} - \sqrt[۴]{۳}$

۱۰- $\frac{۹^{\frac{1}{۶}} - ۸^{\frac{1}{۶}}}{۹^{\frac{1}{۶}} + ۸^{\frac{1}{۶}}}$ کے نسب نما کو ناطق بناؤ

۱۱- $\frac{\sqrt[۴]{۲۷}}{۳ - \sqrt[۴]{۹}}$ کے نسب نما کو ناطق بناؤ

ذیل کے جملوں کا جذر نکالو

۱۲- $۱۶ - ۲\sqrt{۲۰} - ۲\sqrt{۲۸} + ۲\sqrt{۳۵}$

۱۳ — $۴ + ۲\sqrt{۳}$ ۱۴ — $۱۶ + ۵\sqrt{۷}$

۱۵ — $\sqrt{۲۷} + \sqrt{۱۵}$ ۱۶ — $۹ + ۶\sqrt{۳}$

۱۷ — $ا + ۳ب + ۴ + ۴\sqrt{ا} - ۴\sqrt{۳ب} - ۲\sqrt{۳اب}$

جملات ذیل کے جذرالکعب دریافت کرو۔

۱۸ — $۷ + ۵\sqrt{۲}$ ۱۹ — $۱۶ + ۸\sqrt{۵}$

۲۰ — $۹\sqrt{۳} - ۱۱\sqrt{۲}$ ۲۱ — $۹۹ - ۷۰\sqrt{۲}$

۲۲ — $۱۳۵\sqrt{۳} - ۸۷\sqrt{۶}$ ۲۳ — $ا + (ا - ا^{۲})^{-\frac{۱}{۲}}$ کا جذر نکالو

۲۴ — $۱ + ا^{۲} + (۱ + ا^{۲} + ا^{۴})^{\frac{۱}{۲}}$ کا جذر نکالو

۲۵ — اگر $ا = \frac{۱}{\sqrt{۳} - ۲}$ اور $ب = \frac{۱}{\sqrt{۳} + ۲}$

تو $۷ا^{۲} + ۱۱ اب - ۷ب^{۲}$ کی قیمت دریافت کرو

۲۶ — اگر $لا = \frac{\sqrt{۲} - \sqrt{۳}}{\sqrt{۲} + \sqrt{۳}}$ اور $ما = \frac{\sqrt{۲} + \sqrt{۳}}{\sqrt{۲} - \sqrt{۳}}$

تو $۳لا^{۲} - ۵ لا ما + ۳ ما^{۲}$ کی قیمت دریافت کرو۔

ذیل کے جملوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

۲۷ — $\sqrt{\frac{۶ + ۲\sqrt{۳}}{۳۳ - ۱۹\sqrt{۳}}}$

۲۸ — $(۲۸ - ۱۰\sqrt{۳})^{\frac{۱}{۲}} - (۷ + ۴\sqrt{۳})^{-\frac{۱}{۲}}$

۲۹ — اگر $\sqrt{۳} = ۱٫۷۳۲۰۵۰۸$ تو $\frac{۱}{\sqrt{۳} + ۲}$ کی قیمت دریافت کرو

۳۰ — اگر $\sqrt{۵} = ۲٫۲۳۶۰۷$ تو ۔

$\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{18}-\sqrt{3}+\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{10}+\sqrt{18}}{\sqrt{8}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ کی قیمت دریافت کرو

۳۱ — اگر $2\text{لا} = \sqrt{\text{و}} + \frac{1}{\sqrt{\text{و}}}$ تو $\frac{\sqrt{\text{لا}^2-1}}{\text{لا}-\sqrt{\text{لا}^2-1}}$ کی قیمت دریافت کرو

معادلات ذیل کو حل کرو۔

۳۲ — $\sqrt{(\text{لا}+11)} - \sqrt{\text{لا}} = 1$

۳۳ — $\sqrt{(3\text{لا}+4)} + \sqrt{(3\text{لا}-5)} = 9$

۳۴ — $\text{ا}\sqrt{(\text{ب}-\text{لا})} = \text{ب}\sqrt{(\text{ا}-\text{لا})}$

۳۵ — $\sqrt{(\text{لا}+\text{ا})} + \sqrt{(\text{لا}+\text{ب})} = \sqrt{\text{ج}}$

۳۶ — ثابت کرو کہ $\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)} - \sqrt[3]{(\sqrt{5}-2)} = 1$



باب ہشتم

مقادیر خیالی

۱۰۷ – فرض کرو کہ کسی مقدار منفی -۱ کا جذر نکالنا مطلوب ہے اس میں ایک نئی مشکل ہے، -∞ سے +∞ تک تمام مقادیر جبریہ کے مربعے مثبت ہوتے ہیں۔ اس لئے ایسی کوئی مقدار فی الحال ہمکو معلوم نہیں جس کا مربع -۱ کے برابر ہو۔ اب اگر ہم اپنے اعمال جبریہ کی تعمیم کو بدستور قائم رکھنا چاہتے ہیں۔ تو مقادیر جبریہ کے میدان کو وسیع کئے بغیر چارہ نہیں۔ ہم اس جگہ ایک نئی خیالی اکائی یا خیالی مقدار کو اپنی تحقیقات جبریہ میں شامل کرتے ہیں۔ اس خیالی مقدار کو ہم ہمیشہ حرف خ یا $\sqrt{-1}$ سے تعبیر کرینگے اور اس کی تعریف ہوگی۔

$$خ^{2} = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$$

ظاہر ہے کہ خ کسی مقدار حقیقی کے برابر نہیں ہو سکتی کیونکہ تمام حقیقی مقادیر کے مربعے مثبت ہوتے ہیں خ کے تمام خواص ہم اس کی تعریف سے اخذ کرینگے

چونکہ خ مقدار جبریہ ہے اور قوانین جبریہ اس پر چل سکتے ہیں ہم اس کے اضعاف حقیقی ی خ وی خ لے سکتے ہیں جہاں

ی اور یَ مثبت یا منفی مقداریں ہیں۔

اب ضروری ہے کہ ی خ = خ ی

اور ی خ + یَ خ = (ی + یَ) خ = خ (ی + یَ) وغیرہ

اگر ہم خ کے تمام اضعاف حقیقی − ∞ خ سے + ∞ خ تک لیں تو ہمیں خالص مقادیر خیالی کا سلسلہ ذیل حاصل ہوگا۔

− ∞ خ ...... − خ ...... ۰ × خ ...... + خ .... + ∞ خ (۱)

اس سلسلے کے مقابل مقادیر حقیقی کا سلسلہ یہ ہے۔

− ∞ .... − ۱ .... ۰ .... + ۱ .... + ∞ (۲)

سلسلہ (۱) کی کوئی مقدار سوائے (۰ × خ) کے سلسلہ (۲) کی کسی مقدار کے برابر نہیں ہوسکتی کیونکہ خ کے کسی ضعف حقیقی مثلاً ی خ کا مربع = ی² خ² = ی² (√−۱)² = ی² (−۱) = − ی² جو ایک منفی مقدار ہے۔

اسلئے معلوم ہوا کہ کوئی خالص مقدار خیالی سوائے ۰ × خ کے کسی مقدار حقیقی کے برابر نہیں ہوسکتی۔

چونکہ ۰ × خ = (+ ا − ا) خ = ا خ − ا خ = ۰ اس لئے ۰ × خ = ۰

معلوم ہوا کہ صفر ہی ہر دو سلسلوں کی درمیانی اور مشترک رقم ہے۔

۱۰۸ — بموجب تعریف √−۱ × √−۱ = − ۱

طرفین کو ا میں ضرب دینے سے √ا × √−۱ × √ا × √−۱ = ا (−۱)

یعنی (√ا × √−۱)² = − ا

یا √ا × √−۱ = √−ا

معلوم ہوا کہ حاصل ضرب $\sqrt{ا} \times \sqrt{-۱}$ کو مقدار خیالی $\sqrt{-ا}$ کے برابر خیال کرنا چاہیئے۔

۱۰۹ — عام طور پر کسی جملہ کی خیالی خصلت کو ظاہر کرنے کے لئے بہتر ہوگا کہ ہم علامت خیالی $\sqrt{-۱}$ کو واضح طور پر علیحدہ کرکے لکھیں

مثلاً $\sqrt{-۴} = \sqrt{۴ \times -۱} = ۲\sqrt{-۱}$

$$\sqrt{-۷ا^{۲}} = \sqrt{۷ا^{۲} \times (-۱)} = \sqrt{۷}\,ا \times \sqrt{-۱}$$

ہم آیندہ ہر ایک علامت جذر کے پہلے علامت مثبت کو متصرف خیال کریں گے مگر مقادیر خیالی کی بحث میں ایک بات قابل غور ہے۔

چونکہ $(-ا) \times (-ب) = اب$

جذر لینے سے $\sqrt{(-ا)} \times \sqrt{(-ب)} = \pm \sqrt{اب}$

بظاہر اس سے معلوم ہوتا ہے کہ $\sqrt{-ا}$ اور $\sqrt{-ب}$ کا حاصل ضرب دریافت کرنے میں ہم $\sqrt{اب}$ کے ماقبل کوئی سی علامت مثبت یا منفی لے سکتے ہیں مگر یہ درست نہیں کیونکہ

$$\sqrt{-ا} \times \sqrt{-ب} = \sqrt{ا} \times \sqrt{-۱} \times \sqrt{ب} \times \sqrt{-۱}$$

$$= \sqrt{اب}\,(\sqrt{-۱})^{۲} = -\sqrt{اب}$$

$$\therefore \sqrt{-ا} \times \sqrt{-ب} = -\sqrt{اب}$$

۱۱۰ — اگر کسی حقیقی مقدار ا میں کسی خالص مقدار خیالی $ب\sqrt{-۱}$ کو جمع کر دیا جائے تو جملہ $ا + ب\sqrt{-۱}$ حاصل ہوگا اسے ہم عدد خیالی یا جملہ خیالی کے نام سے موسوم کریں گے۔ یاد رہے کہ تمام خیالی جملے $ا + ب\sqrt{-۱}$ کی صورت میں لائے جا سکتے ہیں اس جملے میں

ا اور ب دونوں حقیقی مقداریں ہیں - مگر یہ ضروری نہیں کہ ناطق بھی ہوں -

۱۱۱ - اگر ا + ب √-۱ = ۰ تو ا = ۰ اور ب = ۰

کیونکہ اگر ا + ب √-۱ = ۰

تو ب √-۱ = - ا

طرفین کا مربع لینے سے - ب² = ا²

اسلئے ا² + ب² = ۰

اب ا² اور ب² دونوں مثبت ہیں انکا حاصل جمع صفر نہیں ہو سکتا جب تک اُن میں سے ہر ایک صفر نہ ہو -

پس معلوم ہوا کہ ا = ۰ اور ب = ۰

۱۱۲ - اگر ا + ب √-۱ = ج + د √-۱

تو ا = ج اور ب = د

عمل نقل سے ا - ج + (ب - د) √-۱ = ۰

بموجب دفعہ آخر ا - ج = ۰ یعنی ا = ج

اور ب - د = ۰ یعنی ب = د

پس معلوم ہوا کہ دو خیالی جملوں کے باہم مساوی ہونے کے لئے یہ ضروری اور کافی ہے کہ اُن کے حقیقی حصے آپس میں برابر ہوں اور ان کے خیالی حصے آپس میں -

۱۱۳ - ہمیں ابتدائی جبر و مقابلہ سے معلوم ہے کہ اگر مقادیر حقیقی پر اعمال جبریہ سے کام لیں بشرطیکہ وہ اعمال ناطق ہوں یعنی جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، تو مقادیر حقیقی اور صرف مقادیر حقیقی پیدا ہوتی

ہیں - برعکس اس کے اگر ہم عمل اصم یعنی استخراج جذر کو کام میں لائیں تو اپنی تعمیم جبریہ کو قائم رکھنے کی خاطر ضروری ہے کہ ہم ایک خیالی مقدار خ کو احاطۂ ریاضی میں داخل کریں۔ اب ایک قدرتی سوال پیدا ہوتا ہے کہ" اگر ہم مقادیر حقیقی یا خیالی کی صورت میں ناطق یا غیر ناطق اعمال جبریہ کو استعمال میں لائیں تو کیا ہم ہمیشہ اسی قسم کی مقادیر حقیقی یا خیالی جن کی ہم اوپر تعریف کر چکے ہیں پیدا کریں گے یا کسی نہ کسی مقام پر ہمیں ایک نئی قسم کی خیالی اور موہومی مقدار شامل کرنی پڑیگی؟" اس سوال کا جواب یہ ہے کہ جہاں تک اعمال جبریہ جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، اور نزول پر موقوف ہے ہمیں مقادیر جبریہ کے تصور کی توسیع کی ضرورت نہیں در اصل اس باب کے خاص مقاصد میں سے ایک یہ بھی ہے کہ واضح طور پر یہ ثابت ہو جائے کہ مقادیر خیالی پر اعمال جبریہ کے اثر سے صرف مقادیر خیالی پیدا ہوتی ہیں -

۱۱۴— متعدد اعداد خیالی کا حاصل جمع اور حاصل ضرب اور دو اعداد خیالی کا خارج قسمت عدد خیالی کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے

فرض کرو کہ کوئی سی تعداد مقادیر مثلاً تین اعداد خیالی $ا_1 + ب_1\sqrt{-1}$ و $ا_2 + ب_2\sqrt{-1}$ و $ا_3 + ب_3\sqrt{-1}$ معلوم ہیں-

تب بموجب قوانین جبریہ $(ا_1 + ب_1\sqrt{-1}) + (ا_2 + ب_2\sqrt{-1}) - (ا_3 + ب_3\sqrt{-1})$

$$= (ا_1 + ا_2 - ا_3) + (ب_1 + ب_2 - ب_3)\sqrt{-1}$$

لیکن $ا_1 + ا_2 - ا_3$ اور $ب_1 + ب_2 - ب_3$ مقادیر حقیقی ہیں - کیونکہ $ا_1$، $ا_2$، $ب_1$، $ب_2$، $ب_3$، حقیقی ہیں -

اسلئے $(ا_1 + ا_2 - ا_3) + (ب_1 + ب_2 - ب_3)\sqrt{-1}$ عدد خیالی کی

صورت عامہ ہے۔

اب دو اعداد خیالی $ا_۱ + ب_۱\sqrt{-1}$ و $ا_۲ + ب_۲\sqrt{-1}$ کے حاصل ضرب پر غور کرو۔

$$(ا_۱+ب_۱\sqrt{-1})(ا_۲+ب_۲\sqrt{-1}) = ا_۱ا_۲ + ب_۱ب_۲(\sqrt{-1})^۲ + ا_۱ب_۲\sqrt{-1} + ا_۲ب_۱\sqrt{-1}$$

بموجب تعریف $(\sqrt{-1})^۲ = -۱$ اسلئے

$$(ا_۱+ب_۱\sqrt{-1})(ا_۲+ب_۲\sqrt{-1}) = (ا_۱ا_۲ - ب_۱ب_۲) + (ا_۱ب_۲ + ا_۲ب_۱)\sqrt{-1}$$

جس سے معلوم ہوا کہ دو خیالی عددوں کا حاصل ضرب عدد خیالی کی صورت عامہ میں لکھا جا سکتا ہے اگر اسی مسئلہ کو تین خیالی عددوں کے حاصل ضرب کے لئے ثابت کرنا منظور ہو تو فرض کرو کہ

ض = حاصل ضرب مطلوب

$$= (ا_۱+ب_۱\sqrt{-1})(ا_۲+ب_۲\sqrt{-1})(ا_۳+ب_۳\sqrt{-1})$$

$$= \{(ا_۱+ب_۱\sqrt{-1})(ا_۲+ب_۲\sqrt{-1})\}(ا_۳+ب_۳\sqrt{-1})$$

ہم ثابت کر چکے ہیں کہ وہ جملہ جو خطوط وحدانی { } کے اندر ہے ایک عدد خیالی ہے اسلئے ض دو اعداد خیالی کا حاصل ضرب ہوا اور جیسا ہم اوپر ثابت کر چکے ہیں یہ خود ایک خیالی عدد ہے اسلئے ض عدد خیالی کی صورت عامہ میں رکھا جا سکتا ہے۔

اب رہا دو اعداد خیالی کا خارج قسمت۔

$$\frac{ا_۱+ب_۱\sqrt{-1}}{ا_۲+ب_۲\sqrt{-1}} = \frac{(ا_۱+ب_۱\sqrt{-1})(ا_۲-ب_۲\sqrt{-1})}{ا_۲^۲+ب_۲^۲}$$

$$= \frac{(ا_۱ا_۲+ب_۱ب_۲) - (ا_۱ب_۲-ا_۲ب_۱)\sqrt{-1}}{ا_۲^۲+ب_۲^۲}$$

$$= \left(\frac{ا_1 ا_2 + ب_1 ب_2}{ا_2^2 + ب_2^2}\right) - \left(\frac{ا_2 ب_1 - ا_1 ب_2}{ا_2^2 + ب_2^2}\right)\sqrt{-1}$$

ثابت ہوا کہ دو اعداد خیالی کا خارج قسمت ایک خیالی عدد کی صورت میں تحویل ہو سکتا ہے۔

نتیجہ صریح ۱ ۔ چونکہ ہر ایک ناطق جملے کی ترکیب میں صرف اعمال جبریہ جمع، تفریق، ضرب، تقسیم ہی شامل ہوتے ہیں اسلئے اس دفعہ کے نتائج سے ثابت ہوتا ہے کہ ایک یا ایک سے زیادہ اعداد خیالی کا ناطق جملہ عدد خیالی کی عام صورت میں تحویل ہو سکتا ہے

نتیجہ صریح ۲ ۔ اگر ج (لا + خ ما) کوئی جملہ ناطقہ لا + خ ما کا ہو جس کے سب مکرر حقیقی ہوں اور جس میں خ $= \sqrt{-1}$ اور

اگر ج (لا + خ ما) = ک + خ ق

تو ج (لا - خ ما) = ک - خ ق

ظاہر ہے کہ ک میں ما کی جفت قوار اور ق میں صرف طاق قوار شامل ہونگی۔ اسلئے اگر ہم ما کی علامت بدل دیں تو اس کا اثر صرف ق تک محدود ہوگا۔

نتیجہ صریح ۳ ۔ اور بالعموم اگر ج ($لا_1$ + خ $ما_1$ و $لا_2$ + خ $ما_2$ و $لا_3$ + خ $ما_3$ و ..... $لا_ن$ + خ $ما_ن$) ایک ایسا ناطق جملہ ن اعداد خیالی کا ہو جس میں سب مقادیر حقیقی ہوں

اور اگر ج ($لا_1$ + خ $ما_1$ و $لا_2$ + خ $ما_2$ و ..... $لا_ن$ + خ $ما_ن$) = ک + خ ق

تو ج ($لا_1$ - خ $ما_1$ و $لا_2$ - خ $ما_2$ و .... $لا_ن$ - خ $ما_ن$) = ک - خ ق

نتیجہ صریح ۴ ۔ اگر جملہ صحیح ج (ی) کے سب مکرر حقیقی ہوں ۔

اور ج (ی) صفر ہو جب ی = لا + خ ما تو ج (ی) صفر ہوگا جب
ی = لا - خ ما

کیونکہ بموجب نتیجہ صریح ۱ ج (لا + خ ما) = ک + خ ق جہاں
ک اور ق حقیقی ہیں پس اگر ج (لا + خ ما) = ۰
تو ک + ق خ = ۰ یعنی ک = ۰ اور ق = ۰
∴ ج (لا - خ ما) = ک - خ ق = ۰ - خ × ۰ = ۰

مثال ۱ - ۳ (۳ + ۲ √-۱) - ۲ (۲ - ۳ √-۱) + (۶ + ۸ √-۱)
= ۹ + ۶ √-۱ - ۴ + ۶ √-۱ + ۶ + ۸ √-۱ = ۱۱ + ۲۰ √-۱

مثال ۲ - (۲ + ۳ √-۱) (۲ - ۵ √-۱) (۳ + ۲ √-۱)
= (۲ - ۵ √-۱) (۶ - ۶ + ۹ √-۱ + ۴ √-۱)
= (۲ - ۵ √-۱) ۱۳ √-۱ = ۲۶ √-۱ + ۶۵ = ۶۵ + ۲۶ √-۱

مثال ۳ - (ب + س - خ ا) (س + ا - خ ب) (ا + ب - خ س)
= {π (ب + س) - Σ ب س (ب + س)}
+ خ {ا ب س - Σ ا (ا + ب) (ا + س)}

جہاں π (ب + س) = (ب + س) (س + ا) (ا + ب)
اور Σ ب س (ب + س) = ب س (ب + س) + س ا (س + ا) + ا ب (ا + ب)
جملہ = ۲ ا ب س + خ {ا ب س - Σ ا³ - Σ ا² (ب + س) - ۳ ا ب س}
= ۲ ا ب س - خ {ا³ + ب³ + س³ + (ب + س) (س + ا) (ا + ب)}

مثال ۴ - (۳ + ۵ √-۱) / (۲ - ۳ √-۱) = (۳ + ۵ √-۱) (۲ + ۳ √-۱) / (۴ + ۹) = (۶ - ۱۵ + ۱۹ √-۱) / ۱۳

$= -\frac{۹}{۱۳} + \frac{۱۹}{۱۳}\sqrt{-۱}$

مثال ۵ — اگر $ج(ی) = \frac{ی^۲ - ی + ۱}{ی^۲ + ی + ۱}$

تو $ج(۲+۳\sqrt{-۱}) = \frac{(۲+۳\sqrt{-۱})^۲ - (۲+۳\sqrt{-۱}) + ۱}{(۲+۳\sqrt{-۱})^۲ + (۲+۳\sqrt{-۱}) + ۱}$

$= \frac{-۵ + ۱۲\sqrt{-۱} - ۲ - ۳\sqrt{-۱} + ۱}{-۵ + ۱۲\sqrt{-۱} + ۲ + ۳\sqrt{-۱} + ۱}$

$= \frac{-۶ + ۹\sqrt{-۱}}{-۲ + ۱۵\sqrt{-۱}} = \frac{(-۶ + ۹\sqrt{-۱})(-۲ - ۱۵\sqrt{-۱})}{۲۲۹}$

$= \frac{۳}{۲۲۹}\left\{۴ + ۴۵ - ۶\sqrt{-۱} + ۳۰\sqrt{-۱}\right\}$

$= \frac{۱۴۷}{۲۲۹} + \frac{۷۲}{۲۲۹}\sqrt{-۱}$

اس سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ

$ج(۲ - ۳خ) = \frac{۱۴۷}{۲۲۹} - \frac{۷۲}{۲۲۹}\sqrt{-۱}$

طالب علم کو چاہیئے کہ موافق عمل بالا اسکی تصدیق کرے ۔

۱۱۵ — تعریف دو خیالی اعداد جو صرف اپنے خیالی حصوں میں مختلف العلامت ہوں ایک دوسرے کے **مزدوج** کہلاتے ہیں اور ان میں سے ہر ایک کو دوسرے کا زوج کہتے ہیں۔

مثلاً $-۳ - ۲\sqrt{-۱}$ اور $-۳ + ۲\sqrt{-۱}$ ایک دوسرے کے مزدوج ہیں ایسے ہی $-۴\sqrt{-۱}$ اور $+۴\sqrt{-۱}$ اور بالعموم $ا + ب\sqrt{-۱}$ اور $ا - ب\sqrt{-۱}$ ایک دوسرے کے مزدوج ہیں۔

اگر جملہ ناطقہ ج کے سب مکرر حقیقی ہوں تو

ج (لا + خ ما ، لا + خ ما ...... لان + خ مان)

اور ج (لا − خ ما ، لا − خ ما ...... لان − خ مان)

جن میں مقادیر مجہول ایک دوسری کی مزدوج ہیں دو مزدوج اعداد خیالی کہلائینگے۔

۱۱۶— دو مزدوج خیالی عددون کے حاصل جمع اور حاصل ضرب مقادیر حقیقی ہوتے ہیں۔

∵ $ا + ب \sqrt{-1} + ا - ب \sqrt{-1} = 2ا$

اور $(ا + ب\sqrt{-1})(ا - ب\sqrt{-1}) = ا^2 - (-ب^2) = ا^2 + ب^2$

برعکس اس کے اگر دو اعداد خیالی کا حاصل جمع اور حاصل ضرب دونوں حقیقی ہوں تو وہ اعداد حقیقی ہونگے یا ایک دوسرے کے مزدوج۔

فرض کرو کہ $(ا_1 + ب_1\sqrt{-1}) + (ا_2 + ب_2\sqrt{-1}) = ج$ ...... (۱)

$(ا_1 + ب_1\sqrt{-1})(ا_2 + ب_2\sqrt{-1}) = ض$ ...... (۲)

جہان ج اور ض دونوں مقادیر حقیقی ہیں۔

ہم (۱) اور (۲) کو بصورت ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$(ا_1 + ا_2) + (ب_1 + ب_2)\sqrt{-1} = ج$ .... (۱)

$(ا_1ا_2 - ب_1ب_2) + (ا_1ب_2 + ا_2ب_1)\sqrt{-1} = ض$ .... (۲)

(۱) اور (۲) سے معلوم ہوا کہ

$ا_1 + ا_2 = ج$ .... (۳)

$ب_1 + ب_2 = 0$ .... (۴)

$ا_1ا_2 - ب_1ب_2 = ض$ .... (۵)

$ا_1ب_2 + ا_2ب_1 = 0$ .... (۶)

اب (۴) سے $ب_{۲} = -ب_{۱}$ اور (۶) میں $ب_{۲}$ کی قیمت رکھنے سے معلوم ہوا کہ

$ب_{۱}(ا_{۲} - ا_{۱}) = ۰$ اسلئے $ب_{۱} = ۰$ یا $ا_{۲} - ا_{۱} = ۰$

اگر $ب_{۱} = ۰$ تو $ب_{۲} = -ب_{۱} = ۰$ اور دونوں اعداد حقیقی ہیں۔

اگر $ا_{۲} - ا_{۱} = ۰$ تو $ا_{۱} = ا_{۲}$ اور چونکہ $ب_{۲} = -ب_{۱}$

اسلئے $ا_{۲} + ب_{۲}\sqrt{-۱} = ا_{۱} - ب_{۱}\sqrt{-۱}$ یعنی اعداد ایک دوسرے کے مزدوج ہیں مساوات (۳) اور (۵) سے ہمیں $ا_{۱}$ اور $ب_{۱}$ اور اسلئے $ا_{۲}$ اور $ب_{۲}$ کی قیمتیں ج اور ض کی رقوم میں حاصل ہوتی ہیں یعنی

$ا_{۱} = ا_{۲} = \frac{ج}{۲}$ اور $ب_{۱} = -ب_{۲} = \sqrt{ض - \frac{ج^{۲}}{۴}}$

۱۱۷— تعریف $ا^{۲}+ب^{۲}$ کے جذر کی مثبت قیمت کو ہر دو مزدوج خیالی اعداد $ا+ب\sqrt{-۱}$ اور $ا-ب\sqrt{-۱}$ کا مقیاس کہتے ہیں ہم $ا+ب\sqrt{-۱}$ کے مقیاس کو $مق(ا+ب\sqrt{-۱})$ سے تعبیر کرینگے۔

∴ بموجب تعریف $مق(ا+ب\sqrt{-۱}) = +\sqrt{ا^{۲}+ب^{۲}}$

مثال ۱— $مق(-۳+۴\sqrt{-۱}) = +\sqrt{(-۳)^{۲}+(۴)^{۲}} = ۵$

مثال ۲— $مق(-۳-۴\sqrt{-۱}) = +\sqrt{(-۳)^{۲}+(-۴)^{۲}} = ۵$

مثال ۳— $مق(۱+\sqrt{-۱}) = +\sqrt{۱^{۲}+۱^{۲}} = \sqrt{۲}$

نوٹ— اگر ب = ۰ یعنی اگر عدد خیالی صرف حقیقی مقدار ہو تو اس کا مقیاس $= +\sqrt{ا^{۲}}$ جو ا کی حسابی قیمت ہے۔

مثلاً $مق(-۳) = +\sqrt{(-۳)^{۲}} = +۳$

۱۱۸— دو خیالی جملوں یا عددوں کے حاصل ضرب کا مقیاس اُن

جملوں کے مقیاسوں کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ا + ب $\sqrt{-1}$ اور ج + د $\sqrt{-1}$ دو جملے ہیں

ان کا حاصل ضرب = اج - ب د + (اد + ب ج) $\sqrt{-1}$ ایک خیالی جملہ ہے۔

اور اس کا مقیاس = $\sqrt{(\text{اج} - \text{ب د})^2 + (\text{اد} + \text{ب ج})^2}$

$= \sqrt{\text{ا}^2\text{ج}^2 + \text{ب}^2\text{د}^2 + \text{ا}^2\text{د}^2 + \text{ب}^2\text{ج}^2}$

$= \sqrt{(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)(\text{ج}^2 + \text{د}^2)}$

$= \sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2} \times \sqrt{\text{ج}^2 + \text{د}^2}$ جس سے مسئلہ ثابت ہوا

۱۱۹ — اگر کوئی عدد خیالی معدوم ہو جائے تو اُس کا مقیاس بھی معدوم ہو جائیگا اور برعکس اس کے اگر کسی عدد خیالی کا مقیاس معدوم ہو جائے تو وہ عدد بھی معدوم ہو جائے گا

∵ اگر ا + ب $\sqrt{-1}$ = ۰ تو ا = ۰ اور ب = ۰

اسلئے $\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2} = 0$

نیز اگر $\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2} = 0$ تو $\text{ا}^2 + \text{ب}^2 = 0$

ا^۲ اور ب^۲ ہر دو مثبت مقادیر ہیں - ان کا مجموعہ اُسی صورت میں صفر ہو سکتا ہے جبکہ اُن میں سے ہر ایک مقدار صفر ہو، یعنی ا = ب = ۰

اگر دو اعداد خیالی برابر ہوں تو اُن کے مقیاس برابر ہونگے مگر اس کا عکس صحیح نہیں۔

∵ اگر $ا_1 + ب_1\sqrt{-1} = ا_2 + ب_2\sqrt{-1}$

تو $ا_1 = ا_2$ اور $ب_1 = ب_2$

∴ $\sqrt{ا_1^2 + ب_1^2} = \sqrt{ا_2^2 + ب_2^2}$

برعکس اس کے اگر $\sqrt{ا_1^2 + ب_1^2} = \sqrt{ا_2^2 + ب_2^2}$

تو یہ ضروری نہیں کہ $ا_1 = ا_2$ اور $ب_1 = ب_2$

۱۲۰ — اگر ج (لا + خ ما) کے سب مکرر حقیقی ہوں تو ہم جانتے ہیں کہ

اگر $ج\,(لا + خ\,ما) = ک + خ\,ق$

تو $ج\,(لا - خ\,ما) = ک - خ\,ق$

اب مقیاس $ج\,(لا + خ\,ما) = مق\,(ک + خ\,ق) = \sqrt{ک^2 + ق^2}$

$= \sqrt{(ک + خ\,ق)(ک - خ\,ق)}$

$= \sqrt{ج\,(لا + خ\,ما)\; ج\,(لا - خ\,ما)}$

یعنی $مق\; ج\,(لا + خ\,ما) = مق\,(لا - خ\,ما) = \sqrt{ج\,(لا + خ\,ما)\; ج\,(لا - خ\,ما)}$ .... (۱)

اسی طرح سے

$مق\; ج\,(لا_1 + خ\,ما_1،\; لا_2 + خ\,ما_2 \ldots\ldots لا_ن + خ\,ما_ن)$

$= مق\; ج\,(لا_1 - خ\,ما_1،\; لا_2 - خ\,ما_2 \ldots\ldots لا_ن - خ\,ما_ن)$

$= \sqrt{ج\,(لا_1 + خ\,ما_1،\; لا_2 + خ\,ما_2 \ldots\ldots لا_ن + خ\,ما_ن) \times ج\,(لا_1 - خ\,ما_1،\; لا_2 - خ\,ما_2 \ldots\ldots لا_ن - خ\,ما_ن)}$ .... (۲)

مسائل (۱) اور (۲) عملیات میں نہایت کارآمد ہیں جیسا کہ امثلہ ذیل سے معلوم ہوگا۔

فرض کرو کہ جملہ ج $(\text{لا}_1+\text{خ}\,\text{ما}_1،\ \text{لا}_2+\text{خ}\,\text{ما}_2، \ldots\ \text{لا}_{\text{ن}}+\text{خ}\,\text{ما}_{\text{ن}})$ کی بجائے جملہ $(\text{لا}_1+\text{خ}\,\text{ما}_1)(\text{لا}_2+\text{خ}\,\text{ما}_2)\ldots(\text{لا}_{\text{ن}}+\text{خ}\,\text{ما}_{\text{ن}})$ ہے

تب موافق مسئلہ (۲) مذکورہ بالا $\text{مق}\left\{(\text{لا}_1+\text{خ}\,\text{ما}_1)(\text{لا}_2+\text{خ}\,\text{ما}_2)\ldots(\text{لا}_{\text{ن}}+\text{خ}\,\text{ما}_{\text{ن}})\right\}$

$$=\sqrt{\left[(\text{لا}_1+\text{خ}\,\text{ما}_1)(\text{لا}_2+\text{خ}\,\text{ما}_2)\ldots(\text{لا}_{\text{ن}}+\text{خ}\,\text{ما}_{\text{ن}})\times(\text{لا}_1-\text{خ}\,\text{ما}_1)(\text{لا}_2-\text{خ}\,\text{ما}_2)\ldots(\text{لا}_{\text{ن}}-\text{خ}\,\text{ما}_{\text{ن}})\right]}$$

$$=\sqrt{(\text{لا}_1^2+\text{ما}_1^2)(\text{لا}_2^2+\text{ما}_2^2)\ldots\ldots(\text{لا}_{\text{ن}}^2+\text{ما}_{\text{ن}}^2)}$$

$$=\left(+\sqrt{\text{لا}_1^2+\text{ما}_1^2}\right)\left(+\sqrt{\text{لا}_2^2+\text{ما}_2^2}\right)\ldots\ldots\left(+\sqrt{\text{لا}_{\text{ن}}^2+\text{ما}_{\text{ن}}^2}\right)$$

$$=\text{مق}(\text{لا}_1+\text{خ}\,\text{ما}_1)\times\text{مق}(\text{لا}_2+\text{خ}\,\text{ما}_2)\times\ldots\ldots\times\text{مق}(\text{لا}_{\text{ن}}+\text{خ}\,\text{ما}_{\text{ن}})$$

یعنی ن اعداد خیالی کے حاصل ضرب کا مقیاس اُن کے مقیاسوں کے حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے ۔

اب فرض کرو کہ $\dfrac{\text{لا}_1+\text{خ}\,\text{ما}_1}{\text{لا}_2+\text{خ}\,\text{ما}_2}$ کا مقیاس مطلوب ہے

مسئلہ (۲) کی استعانت سے

$$\text{مق}\left(\frac{\text{لا}_1+\text{خ}\,\text{ما}_1}{\text{لا}_2+\text{خ}\,\text{ما}_2}\right)=+\sqrt{\left\{\left(\frac{\text{لا}_1+\text{خ}\,\text{ما}_1}{\text{لا}_2+\text{خ}\,\text{ما}_2}\right)\times\left(\frac{\text{لا}_1-\text{خ}\,\text{ما}_1}{\text{لا}_2-\text{خ}\,\text{ما}_2}\right)\right\}}$$

$$=+\sqrt{\frac{\text{لا}_1^2+\text{ما}_1^2}{\text{لا}_2^2+\text{ما}_2^2}}$$

$$=\frac{\text{مق}(\text{لا}_1+\text{خ}\,\text{ما}_1)}{\text{مق}(\text{لا}_2+\text{خ}\,\text{ما}_2)}$$

یعنی دو اعداد خیالی کے خارج قسمت کا مقیاس اُن کے مقیاسوں کے خارج قسمت کے برابر ہوتا ہے ۔

مثال ۱ — $(۲+۳\sqrt{-۱})(۳-۲\sqrt{-۱})(۶-۴\sqrt{-۱})$ کا مقیاس دریافت کرو

مق $\{(۲+۳\sqrt{-۱})(۳-۲\sqrt{-۱})(۶-۴\sqrt{-۱})\}$

$=$ مق $(۲+۳\sqrt{-۱}) \times$ مق $(۳-۲\sqrt{-۱}) \times$ مق $(۶-۴\sqrt{-۱})$

$= \sqrt{۱۳} \times \sqrt{۱۳} \times \sqrt{۵۲} = ۲۶\sqrt{۱۳}$

مثال ۲ — $\dfrac{(\sqrt{۲}+\sqrt{۳}\sqrt{-۱})(\sqrt{۳}+\sqrt{۵}\sqrt{-۱})}{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}\sqrt{-۱}}$ کا مقیاس دریافت کرو

مقیاس $= \left\{\dfrac{(\sqrt{۲}+\sqrt{۳}\sqrt{-۱})(\sqrt{۳}+\sqrt{۵}\sqrt{-۱})}{(\sqrt{۲}+\sqrt{۵}\sqrt{-۱})}\right.$

$\left.\times \dfrac{(\sqrt{۲}-\sqrt{۳}\sqrt{-۱})(\sqrt{۳}-\sqrt{۵}\sqrt{-۱})}{(\sqrt{۲}-\sqrt{۵}\sqrt{-۱})}\right\}$

$= \dfrac{(۲+۳)(۳+۵)}{۲+۵} = \dfrac{۴۰}{۷}$

مثال ۳ — $\{(ب+ج)+(ب-ج)\sqrt{-۱}\}\{(ج+ا)+(ج-ا)\sqrt{-۱}\}$

$\times\{(ا+ب)+(ا-ب)\sqrt{-۱}\}$ کا مقیاس دریافت کرو

مقیاس $= \{(ب+ج)^۲+(ب-ج)^۲\}\{(ج+ا)^۲+(ج-ا)^۲\}$

$\times\{(ا+ب)^۲+(ا-ب)^۲\}$

$= \sqrt{\{۸(ب^۲+ج^۲)(ج^۲+ا^۲)(ا^۲+ب^۲)\}}$

اعداد خیالی پر اعمال اصم کا اثر

۱۲۱ — ہم ثابت کر چکے ہیں کہ اگر اعداد خیالی پر ناطق عمل کیئے جائیں تو صرف اعداد خیالی پیدا ہوتے ہیں ۔

اب اگر ہم ثابت کر سکیں کہ کسی عدد خیالی کے ن مرتبہ کے جذر کی قیمت یا قیمتیں صرف عدد خیالی یا اعداد خیالی ہوتے ہیں تو ہم نے ازبس یہ مسئلہ قائم کر دیا کہ اعداد خیالی پر ہر قسم کے اعمال جبریہ ناطق اور اصم کے استعمال سے سوائے اعداد خیالی کے اور کچھ نہیں پیدا ہو سکتا ۔

اس نتیجہ پر پہنچنے کا بہترین طریقہ ڈیماورے صاحب کا مسئلہ ہے مگر اس کی مدد کے بغیر ہم مقادیر خیالی کا جذر نکالتے ہیں جو مسئلہ مذکورہ کی ایک خاص صورت ہے ۔

$\text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1}$ کا جذر نکالو ۔

فرض کرو کہ $\sqrt{\text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1}} = \text{لا} + \text{ما}\sqrt{-1}$ جہاں لا اور ما دونوں مقادیر حقیقی ہیں ۔

طرفین کا مربع لینے سے $\text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1} = \text{لا}^2 - \text{ما}^2 + 2\,\text{لاما}\sqrt{-1}$

$$\therefore \text{لا}^2 - \text{ما}^2 = \text{ا} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\text{اور} \quad 2\,\text{لاما} = \text{ب} \quad \ldots\ldots (2)$$

$$(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)^2 = (\text{لا}^2 - \text{ما}^2)^2 + (2\,\text{لاما})^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2$$

$$\therefore \text{لا}^2 + \text{ما}^2 = +\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2} \quad \ldots\ldots (3)$$

علامت جذر کے ماقبل ہم نے مثبت علامت اسلئے لکھی ہے ۔ کہ

$\text{لا}^2 + \text{ما}^2$ ایک مثبت مقدار ہے کیونکہ لا اور ما دونوں حقیقی مقداریں ہیں۔

(۱) اور (۳) سے معلوم ہوا کہ

$$\text{لا}^2 = \frac{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}+\text{ا}}{2} \quad \text{و} \quad \text{ما}^2 = \frac{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}-\text{ا}}{2}$$

$$\therefore \text{لا} = \pm\left\{\frac{\text{ا}+\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}{2}\right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{اور} \quad \text{ما} = \pm\left\{\frac{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}-\text{ا}}{2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ حاصل ضرب لا ما کی وہی علامت ہوگی جو ب کی ہے۔ اسلئے

اگر ب مثبت ہو تو

$$\sqrt{\text{ا}+\text{ب}\sqrt{-1}} = \pm\left\{\left(\frac{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}+\text{ا}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{-1}\left(\frac{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}-\text{ا}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

اور اگر ب منفی ہو تو

$$= \pm\left\{\left(\frac{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}+\text{ا}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{-1}\left(\frac{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}-\text{ا}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

مثال ۱ — $-7-24\sqrt{-1}$ کا جذر نکالو۔

فرض کرو کہ $\sqrt{-7-24\sqrt{-1}} = \text{لا}+\text{ما}\sqrt{-1}$

تب $-7-24\sqrt{-1} = \text{لا}^2-\text{ما}^2+2\,\text{لا}\,\text{ما}\sqrt{-1}$

$\therefore \text{لا}^2-\text{ما}^2 = -7$ .... (۱)

اور $2\,\text{لا}\,\text{ما} = -24$

اب $(\text{لا}^2+\text{ما}^2)^2 = (\text{لا}^2-\text{ما}^2)^2+(2\,\text{لا}\,\text{ما})^2 = 49+576 = 625$

$\therefore \text{لا}^2+\text{ما}^2 = 25$ .... (۲)

(۱) اور (۲) سے معلوم ہوا کہ $لا^{۲} = ۹$ اور $ما^{۲} = ۱۶$

$\therefore$ $لا = \pm ۳$ اور $ما = \pm ۴$

چونکہ حاصل ضرب لا ما منفی ہے اسلئے $لا = ۳$ اور $ما = -۴$ یا $لا = -۳$ اور $ما = ۴$

پس مطلوبہ قیمتیں ہوئیں $۳ - ۴\sqrt{-۱}$ اور $-۳ + ۴\sqrt{-۱}$

یعنی $\sqrt{-۷ - ۲۴\sqrt{-۱}} = \pm(۳ - ۴\sqrt{-۱})$

مثال ۲ — $\sqrt[۴]{-۶۴ ا^{۴}}$ کی قیمت دریافت کرو

$$\sqrt[۴]{-۶۴ ا^{۴}} = \sqrt{\pm ۸ ا^{۲} \sqrt{-۱}} = ۲ ا \sqrt{۲} \sqrt{\pm \sqrt{-۱}}$$

اب ہمیں $\sqrt{\pm \sqrt{-۱}}$ کی قیمت دریافت کرنی ہے

فرض کرو کہ $\sqrt{+\sqrt{-۱}} = لا + ما \sqrt{-۱}$

تب $\sqrt{-۱} = لا^{۲} - ما^{۲} + ۲ لا ما \sqrt{-۱}$

$\therefore$ $لا^{۲} - ما^{۲} = ۰$ اور $۲ لا ما = ۱$

جس سے معلوم ہوا کہ $لا = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ اور $ما = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ یا $لا = -\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ اور $ما = -\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

$\therefore$ $\sqrt{+\sqrt{-۱}} = \pm \frac{۱}{\sqrt{۲}}(۱ + \sqrt{-۱})$

اسی طرح سے $\sqrt{-\sqrt{-۱}} = \pm \frac{۱}{\sqrt{۲}}(۱ - \sqrt{-۱})$

$\therefore$ $\sqrt{\pm\sqrt{-۱}} = \pm \frac{۱}{\sqrt{۲}}(۱ \pm \sqrt{-۱})$

اور $\sqrt[۴]{-۶۴ ا^{۴}} = \pm ۲ ا (۱ \pm \sqrt{-۱})$

مثال ۳ — $\sqrt{۸ + ۶\sqrt{-۱}}$ کو عدد خیالی کی صورت میں لاؤ

فرض کرو کہ $\sqrt{۸ + ۶\sqrt{-۱}} = \text{لا} + \text{ما}\sqrt{-۱}$

تب $\text{لا}^{۲} - \text{ما}^{۲} = ۸$ اور $۲\,\text{لاما} = ۶$

اور $(\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲})^{۲} = ۶۴ + ۳۶ = ۱۰۰$

$\therefore \text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} = ۱۰$ اور $\text{لا}^{۲} - \text{ما}^{۲} = ۸$

جس سے معلوم ہوا کہ $\text{لا} = \pm ۳$ اور $\text{ما} = \pm ۱$

اب چونکہ $۲\,\text{لاما} = ۶$ اسلئے $\text{لا} = + ۳$ اور $\text{ما} = + ۱$ یا $\text{لا} = - ۳$ اور $\text{ما} = - ۱$

$\therefore \sqrt{۸ + ۶\sqrt{-۱}} = \pm(۳ + \sqrt{-۱})$ جس کی صحت کی تصدیق طرفین کا مربع لینے سے ہو سکتی ہے۔

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ

$$\sqrt{۳ - ۷\sqrt{-۱}} = \pm\left\{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{۵۸} + ۳}{۲}\right)} - \sqrt{-۱}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{۵۸} - ۳}{۲}\right)}\right\}$$

۱۲۲ — $\sqrt{-۱}$ یا خ کی قوتیں

$(\sqrt{-۱})^{۱} = \sqrt{-۱}$ یا $\text{خ} = \text{خ}$

$(\sqrt{-۱})^{۲} = -۱$ یا $\text{خ}^{۲} = -۱$

$(\sqrt{-۱})^{۳} = -\sqrt{-۱}$ یا $\text{خ}^{۳} = -\text{خ}$

$(\sqrt{-۱})^{۴} = +۱$ یا $\text{خ}^{۴} = +۱$

چونکہ $\sqrt{-۱}$ کی ہر ایک قوت اپنی قوت ماقبل میں $\sqrt{-۱}$ کے ساتھ ضرب کھانے سے حاصل ہوتی ہے اس لئے ظاہر ہے کہ دور مندرجہ بالا کے بعد $\sqrt{-۱}$ کی خواہ کوئی قوت لی جائے وہی نتائج تکرار پائینگے جو اوپر مندرج ہیں مثلاً

$$(\sqrt{-۱})^{۴۵} = \{(\sqrt{-۱})^{۴}\}^{۱۱} \times \sqrt{-۱} = \sqrt{-۱}$$

$$(\sqrt{-۱})^{۵۱} = \{(\sqrt{-۱})^{۴}\}^{۱۲} (\sqrt{-۱})^{۳} = (\sqrt{-۱})^{۳} = -\sqrt{-۱}$$

$$(\sqrt{-۱})^{۶۶} = \{(\sqrt{-۱})^{۴}\}^{۱۶} (\sqrt{-۱})^{۲} = (\sqrt{-۱})^{۲} = -۱$$

$$(\sqrt{-۱})^{۷۲} = \{(\sqrt{-۱})^{۴}\}^{۱۸} = ۱$$

۱۲۴— اب ہم چند کثیر الاستعمال مقادیر خیالی کے خواص دریافت کریں گے۔

فرض کرو کہ $\text{لا} = \sqrt[۳]{۱}$ تب $\text{لا}^{۳} = ۱$ یا $\text{لا}^{۳} - ۱ = ۰$

یعنی $(\text{لا} - ۱)(\text{لا}^{۲} + \text{لا} + ۱) = ۰$

اسلئے $\text{لا} - ۱ = ۰$ یا $\text{لا}^{۲} + \text{لا} + ۱ = ۰$

جس سے $\text{لا} = ۱$ یا $\text{لا} = \frac{-۱ \pm \sqrt{-۳}}{۲}$

اگر ہم لا کی مندرجہ بالا قیمتوں میں سے کسی ایک کی تیسری قوت لیں تو ہر ایک صورت میں ایک حاصل ہوگا معلوم ہوا کہ ایک کے جذر الکعب کی تین قیمتیں ۱ و $\frac{-۱ + \sqrt{-۳}}{۲}$ و $\frac{-۱ - \sqrt{-۳}}{۲}$ ہیں اور ان میں سے دو خیالی ہیں اور ایک حقیقی۔

اب ہم ثابت کرینگے کہ جذر الکعب کی خیالی قیمتوں میں سے ہر ایک دوسری قیمت کے مربعے کے برابر ہے

$$\left(\frac{-۱ + \sqrt{-۳}}{۲}\right)^{۲} = \frac{۱ - ۳ - ۲\sqrt{-۳}}{۴} = \frac{-۲ - ۲\sqrt{-۳}}{۴}$$

$$= \frac{-۱ - \sqrt{-۳}}{۲}$$

اسی طرح سے $\left(\frac{-۱-\sqrt{-۳}}{۲}\right)^{۲} = \frac{۱-۳+۲\sqrt{-۳}}{۴} = \frac{-۲+۲\sqrt{-۳}}{۴}$

$= \frac{-۱+\sqrt{-۳}}{۲}$

ان خیالی جذروں کو ہم سہ اور سہ^{۲} سے تعبیر کریں گے پس ایک کے جذرالکعب کی تین قیمتیں ۱، سہ، سہ^{۲} ہوئیں۔

چونکہ سہ مساوات لا^{۲} + لا + ۱ = ۰ کی ایک قیمت ہے۔

اسلئے سہ^{۲} + سہ + ۱ = ۰

نیز سہ × سہ^{۲} = سہ^{۳} = ۱

اسلئے معلوم ہوا کہ ایک کے جذر الکعب کی دو خیالی قیمتوں کا حاصل ضرب ایک ہے اور سہ^{۳} کی ہر ایک صحیح قوت بھی ایک کے برابر ہے

۱۲۴ — یاد رہے کہ سہ کی تمام مثبت صحیح قوتیں علی التواتر ۱، سہ، سہ^{۲} ہوتی ہیں۔

فرض کرو کہ ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے اگر یہ تین کا ضعف ہو تو لازماً اس کی صورت ۳م ہوگی اور سہ^{ن} = سہ^{۳م} = ۱

اگر ن تین کا ضعف نہ ہو تو اس کی صورت ۳م + ۱ یا ۳م + ۲ ہوگی۔

اگر ن = ۳م + ۱ تو سہ^{ن} = سہ$^{۳م+۱}$ = سہ^{۳م} × سہ = سہ

اگر ن = ۳م + ۲ تو سہ^{ن} = سہ$^{۳م+۲}$ = سہ^{۳م} × سہ^{۲} = سہ^{۲}

اب ہمیں معلوم ہو گیا کہ ہر ایک مقدار حقیقی کے جذر الکعب کی تین قیمتیں ہوتی ہیں دو خیالی اور ایک حقیقی کیونکہ ا^{۳} کا جذر الکعب وہی ہے جو حاصل ضرب ۱ × ا^{۳} کا اس لئے جذر کی تین قیمتیں

ا و ا سہ و ا سہ^{۲} ہیں

اسی طرح سے ۹ کے جذر الکعب کی قیمتیں $\sqrt[۳]{۹}$ و $\sqrt[۳]{۹}$ × سہ و $\sqrt[۳]{۹}$ × سہ^{۲} ہیں جہاں $\sqrt[۳]{۹}$ سے تیسری مرتبہ کا حسابی جذر تعبیر ہوتا ہے

مثال ۱ — $\frac{(۲+۳\sqrt{-۱})^{۲}}{۲+\sqrt{-۱}}$ کو ا + ب $\sqrt{-۱}$ کی صورت میں لاؤ

$$\text{جملہ} = \frac{۴-۹+۱۲\sqrt{-۱}}{۲+\sqrt{-۱}}$$

$$= \frac{(-۵+۱۲\sqrt{-۱})(۲-\sqrt{-۱})}{(۲+\sqrt{-۱})(۲-\sqrt{-۱})}$$

$$= \frac{-۱۰+۱۲+۲۹\sqrt{-۱}}{۴+۱}$$

$= \frac{۲}{۵} + \frac{۲۹}{۵}\sqrt{-۱}$ اور یہ صورت مطلوبہ ہے۔

مثال ۲ — ثابت کرو کہ $\frac{۴-۵\sqrt{-۱}}{۲+۳\sqrt{-۱}} \times \frac{۳+۲\sqrt{-۱}}{۷+\sqrt{-۱}} = \frac{۸۱-۵۸۳\sqrt{-۱}}{۶۵۰}$

$$\text{جملہ} = \frac{۱۲-۱۰(\sqrt{-۱})^{۲}-۷\sqrt{-۱}}{۱۴+۳(\sqrt{-۱})^{۲}+۲۳\sqrt{-۱}} = \frac{۲۲-۷\sqrt{-۱}}{۱۱+۲۳\sqrt{-۱}}$$

$$= \frac{(۲۲-۷\sqrt{-۱})(۱۱-۲۳\sqrt{-۱})}{(۱۱+۲۳\sqrt{-۱})(۱۱-۲۳\sqrt{-۱})}$$

$$= \frac{۲۴۲+۱۶۱(\sqrt{-۱})^{۲}-۵۸۳\sqrt{-۱}}{۱۲۱-۵۲۹(\sqrt{-۱})^{۲}}$$

$$= \frac{۲۴۲-۱۶۱-۵۸۳\sqrt{-۱}}{۱۲۱+۵۲۹} = \frac{۸۱-۵۸۳\sqrt{-۱}}{۶۵۰}$$

مثال ۳ — لا^{۳} + ما^{۳} کے تین اجزاء ضربی درجہ اول دریافت کرو

چونکہ لا^{۳} + ما^{۳} = (لا + ما) (لا^{۲} - لا ما + ما^{۲})

∴ لا^{۳} + ما^{۳} = (لا + ما) (لا + سہ ما) (لا + سہ^{۲} ما)

کیونکہ سہ + سہ^{۲} = -۱ اور سہ^{۳} = ۱

مثال ۴ — ثابت کرو کہ (ا + سہ ب + سہ^{۲} ج)(ا + سہ^{۲} ب + سہ ج)

= ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲} - ب ج - ج ا - ا ب

ا + سہ ب + سہ^{۲} ج اور ا + سہ^{۲} ب + سہ ج کے حاصل ضرب میں

ب^{۲} یا ج^{۲} کا سر = سہ^{۳} = ۱

ب ج کا سر = سہ^{۲} + سہ^{۴} = سہ^{۲} + سہ = -۱

ج ا یا ا ب کا سر = سہ^{۲} + سہ = -۱

∴ (ا + سہ ب + سہ^{۲} ج)(ا + سہ^{۲} ب + سہ ج)

= ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲} - ب ج - ج ا - ا ب

مثال ۵ — ثابت کرو کہ (۱ + سہ - سہ^{۲})^{۳} - (۱ - سہ + سہ^{۲})^{۳} = ۰

چونکہ ۱ + سہ + سہ^{۲} = ۰

∴ (۱ + سہ - سہ^{۲})^{۳} - (۱ - سہ + سہ^{۲})^{۳} = (-۲ سہ^{۲})^{۳} - (-۲ سہ)^{۳}

= -۸ سہ^{۶} + ۸ سہ^{۳} = -۸ + ۸ = ۰

امثلہ نمبری ۱۱

۱- ۳√۷ - ۵√۲ کو ۳√۷ + ۵√۲ سے ضرب دو

۲- ۲√۳ + ۳√۲ کو ۴√۳ - ۵√۲ سے ضرب دو

۳- لا - (۱ + √۳)/۲ کو لا - (۱ - √۳)/۲ سے ضرب دو

ذیل کے جملوں کے نسب نماؤں کو ناطق بناؤ۔

۴۔ $\frac{۳\sqrt{-۲} + ۲\sqrt{-۵}}{۳\sqrt{-۲} - ۲\sqrt{-۵}}$

۵۔ $\frac{ا + ل\sqrt{-۱}}{ا - ل\sqrt{-۱}} - \frac{ا - ل\sqrt{-۱}}{ا + ل\sqrt{-۱}}$

۶۔ $\frac{(ا + \sqrt{-۱})^۳ - (ا - \sqrt{-۱})^۳}{(ا + \sqrt{-۱})^۲ - (ا - \sqrt{-۱})^۲}$

۷۔ $(-\sqrt{-۱})^{۴ن+۳}$ کی قیمت دریافت کرو جس میں ن مثبت صحیح عدد ہے۔

ذیل کے جملوں کا جذر نکالو

۸۔ $-۱۱ - ۶۰\sqrt{-۱}$ ۹۔ $-۸\sqrt{-۱}$

۱۰۔ $ا^۲ - ۱ + ۲ا\sqrt{-۱}$ ۱۱۔ $۴اب - ۲(ا^۲ - ب^۲)\sqrt{-۱}$

ذیل کے جملوں کو ا + خ ب کی صورت میں لاؤ۔

۱۲۔ $\frac{\sqrt{۳} - خ\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۳} - خ\sqrt{۲}}$ ۱۳۔ $\frac{۱ + خ}{۱ - خ}$

۱۴۔ $\frac{(ا + خ ب)^۲}{ا - خ ب} - \frac{(ا - خ ب)^۲}{ا + خ ب}$

۱۵۔ $(ا + خ ب)^۸ + (ا - خ ب)^۸$

۱۶۔ $\frac{۱ + \sqrt{-۱}}{۱ + ۲\sqrt{-۱}} + \frac{۱ - \sqrt{-۱}}{۱ - ۲\sqrt{-۱}}$

۱۷۔ $\frac{۲ + ۳۶\sqrt{-۱}}{۶ + ۸\sqrt{-۱}} + \frac{۷ - ۲۹\sqrt{-۱}}{۳ - ۴\sqrt{-۱}}$

۱۸۔ ثابت کرو کہ $\left(\frac{-۱ + خ\sqrt{۳}}{۲}\right)^ن + \left(\frac{-۱ - خ\sqrt{۳}}{۲}\right)^ن = -۱$

جہاں ن کوئی عدد صحیح ہے مگر ۳ کا ضعف نہیں ہے۔

۱۹- (لا - ۱ - خ √۲)(لا - ۱ + خ √۲)(لا - ۲ + خ √۳)(لا - ۲ - خ √۳)
کو لا کی قوتوں میں پھیلاؤ اور ترتیب دو۔

۲۰- ثابت کرو کہ {(۲ ا - ب - ج) + خ (ب - ج) √۳}^{۳}

= {(۲ ب - ج - ا) + خ (ج - ا) √۳}^{۳}

۲۱- ثابت کرو کہ {(√۳ + ۱) + خ (√۳ - ۱)}^{۳} = ۱۶ (۱ + خ)

۲۲- (۲ - ۳ خ)(۳ + ۴ خ) / (۶ + ۴ خ)(۱۵ - ۸ خ) کا مقیاس دریافت کرو

اگر ا و سہ و سہ^{۲} ایک کے جذر الکعب کی تین قیمتیں ہوں تو ثابت کرو کہ

۲۳- (۱ - سہ + سہ^{۲})(۱ + سہ - سہ^{۲}) = ۴

۲۴- (۱ + سہ^{۲})^{۴} = سہ

۲۵- (۱ - سہ)(۱ - سہ^{۲})(۱ - سہ^{۴})(۱ - سہ^{۵}) = ۹

۲۶- (۲ + ۵ سہ + ۲ سہ^{۲})^{۶} = (۲ + ۲ سہ + ۵ سہ^{۲})^{۶} = ۷۲۹

۲۷- (۱ - سہ + سہ^{۲})(۱ - سہ^{۲} + سہ^{۴})(۱ - سہ^{۴} + سہ^{۸}).....
۲ ن اجزائے ضربی تک = ۲^{۲ن}

۲۸- لا^{۳} - ما^{۳} = (لا - ما)(سہ لا - سہ^{۲} ما)(سہ^{۲} لا - سہ ما)

۲۹- (لا + ما)^{۲} + (سہ لا + سہ^{۲} ما)^{۲} + (سہ^{۲} لا + سہ ما)^{۲} = ۶ لا ما

۳۰- ثابت کرو کہ لا^{۳} + ما^{۳} + ی^{۳} - ۳ لا ما ی

= (لا + ما + ی)(لا + سہ ما + سہ^{۲} ی)(لا + سہ^{۲} ما + سہ ی)

۳۱- اگر لا = ا + ب، ما = سہ ا + سہ^{۲} ب، ی = سہ^{۲} ا + سہ ب

تو ثابت کرو کہ

(۱) لا ما ی = ا^{۳} + ب^{۳}

(۲) لا^{۲} + ما^{۲} + ی^{۲} = ۶ ا ب

(۳) لا^{۳} + ما^{۳} + ی^{۳} = ۳ (ا^{۳} + ب^{۳})

۳۲۔ اگر ا لا + ج ما + ب ی = لا، ج لا + ب ما + ا ی = ما،
اور ب لا + ا ما + ج ی = ے

تو ثابت کرو کہ

(ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲} − ب ج − ج ا − ا ب)(لا^{۲} + ما^{۲} + ی^{۲} − ما ی − ی لا − لا ما)
= لا^{۲} + ما^{۲} + ے^{۲} − ما ے − لا ے − لا ما

۳۳۔ اگر لا = ا لا + ج ما + ب ی، ما = ج لا + ب ما + ا ی،
ے = ب لا + ا ما + ج ی

تو ثابت کرو کہ لا^{۳} + ما^{۳} + ے^{۳} − ۳ لا ما ے
= (ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳} − ۳ ا ب ج)(لا^{۳} + ما^{۳} + ی^{۳} − ۳ لا ما ی)



باب نہم

مسائل مساوات درجہ دوم

۱۲۵ـ مساوات درجہ دوم وہ مساوات ہے جسمیں تحویل اور اختصار کے بعد مقدار مجہول کی سب سے اعلیٰ قوت **دو** ہو مساوات درجہ دوم کی صورت عامہ یہ ہے۔

$$\text{ا لا}^{2} + \text{ب لا} + \text{ج} = ۰$$

اس میں مقادیر ا و ب و ج معلوم ہیں اور ان کی رقوم میں مقدارِ مجہول لا کی قیمت یا قیمتیں دریافت کی جاتی ہیں مکررات ب اور ج میں سے ایک یا دونوں صفر کے برابر ہو سکتے ہیں مگر بالعموم مساوات کا درجہ کم کئے بغیر ہم ا کو صفر کے برابر نہیں فرض کر سکتے۔

۱۲۶ـ مساوات درجہ دوم کی دو سے زیادہ قیمتیں نہیں ہوسکتیں

اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ مساوات $\text{ا لا}^{2} + \text{ب لا} + \text{ج} = ۰$ کی تین قیمتیں عہ و بہ و جہ ہیں اب چونکہ اِن میں سے ہر ایک قیمت شرائط مساوات کو پورا کرتی ہے اسلئے

$$\text{ا عہ}^{2} + \text{ب عہ} + \text{ج} = ۰ \quad \text{......(۱)}$$

$$\text{ا بہ}^{2} + \text{ب بہ} + \text{ج} = ۰ \quad \text{......(۲)}$$

$$\text{ا جہ}^{2} + \text{ب جہ} + \text{ج} = ۰ \quad \text{......(۳)}$$

مساوات (۲) کو (۱) سے تفریق کرو تو حاصل ہوگا

ا (عہ² - بہ²) + ب (عہ - بہ) = ۰

اب چونکہ عہ - بہ صفر کے برابر نہیں ہے کیونکہ مساوات کی قیمتیں سب مختلف فرض کی گئی ہیں اسلئے ہر ایک رقم کو عہ - بہ پر تقسیم کرنے سے

ا (عہ + بہ) + ب = ۰ .... (۴)

اسی طرح مساوات (۲) اور (۳) سے حاصل ہوگا

ا (بہ + جہ) + ب = ۰ .... (۵)

عمل تفریق سے ا (عہ - جہ) = ۰ .... (۶)

اور یہ ناممکن ہے کیونکہ ا صفر کے برابر نہیں ہے اور جیسا ہم نے ابتدا میں فرض کیا عہ اور جہ غیر مساوی ہیں پس ثابت ہوا کہ مساوات درجہ دوم کی تین مختلف قیمتیں نہیں ہوسکتیں۔

نتیجہ صریح ۱ - لا کی تین مختلف قیمتیں شرائط مساوات ا لا² + ب لا + ج = ۰ کو صرف اُس صورت میں پورا کرسکتی ہیں جب ا = ۰، ب = ۰، ج = ۰

کیونکہ اگر تین مختلف قیمتیں مساوات کو پورا کریں تو ربط (۶) صحیح ہونا چاہیئے لیکن عہ اور جہ غیر مساوی ہیں اسلئے یہ تعلق صرف اُسوقت صحیح ہوسکتا ہے جب ا = ۰ لیکن اگر ا = ۰ تو (۴) یا (۵) سے ب = ۰ اور اسلئے (۱) یا (۲) یا (۳) سے ج = ۰

نتیجہ صریح ۲ - اگر لا کی تین مختلف قیمتیں مساوات ا لا² + ب لا + ج = ۰ کو پورا کریں تو لا کی کوئی ایک قیمت مساوات کو پورا کرے گی یعنی اس صورت میں مساوات متماثلہ ہوگی۔ کیونکہ بموجب نتیجہ صریح ۱ مساوات

کی صورت ہوگی ۰ × لا^{2} + ۰ × لا + ۰ = ۰ جو لا کی تمام قیمتوں کے لئے صحیح ہے۔

مثال ۱ - ثابت کرو کہ ۲ {(لا - ا)(لا - ب) + (ا - لا)(ا - ب) + (ب - لا)(ب - ا)} = (ا - ب)^{2} + (لا - ا)^{2} + (لا - ب)^{2} ایک مساوات متماثلہ ہے۔

مثال ۲ - ثابت کرو کہ اگر (ف - ا)^{3} + (ف - ب)^{3} = ۲ (ف - ج)^{3}

(ق - ا)^{3} + (ق - ب)^{3} = ۲ (ق - ج)^{3}

(ر - ا)^{3} + (ر - ب)^{3} = ۲ (ر - ج)^{3}

تو (س - ا)^{3} + (س - ب)^{3} = ۲ (س - ج)^{3}

۱۲۷ - پیشتر اس کے کہ ہم مساوات درجہ دوم کی صورت عامہ کا جبریہ حل دریافت کریں ہم اسکی مفصلہ ذیل خاص صورتوں پر غور کرینگے۔

(۱) فرض کرو کہ ج = ۰ تو مساوات ا لا^{2} + ب لا + ج = ۰ کی مختصر صورت ہوگی ا لا^{2} + ب لا = ۰

یعنی ا لا (لا + ب/ا) = ۰

اب چونکہ ا صفر کے برابر نہیں ہے اسلئے لا = ۰ یا لا = - ب/ا

پس مساوات مفروضہ کی دو قیمتیں ۰ اور - ب/ا ہیں

(۲) فرض کرو کہ ب = ۰ اور ج = ۰

مساوات کی صورت عامہ اور بھی مختصر ہوگئی یعنی ا لا × لا = ۰

اب چونکہ ا صفر کے برابر نہیں ہے اسلئے {لا = ۰ ، لا = ۰}

اسلئے مساوات کی قیمتیں ہوئیں لا = ۰ اور لا = ۰

اس صورت میں قیمتیں برابر ہیں اور ہم کہہ سکتے ہیں کہ مساوات کی صرف ایک ہی قیمت ہے۔ مگر اپنے نتائج کی صداقت عامہ

کو قائم رکھنے کے لیئے یہ کہنا زیادہ مناسب ہوگا کہ مساوات کی دو مساوی قیمتیں ہیں۔

(۴) فرض کرو کہ ب = ۰

تب $ا لا^2 + ج = ۰$

یعنی $ا\left(لا + \sqrt{-\frac{ج}{ا}}\right)\left(لا - \sqrt{-\frac{ج}{ا}}\right) = ۰$

چونکہ ا صفر کے برابر نہیں ہے اسلیئے $لا = -\sqrt{-\frac{ج}{ا}}$ اور $لا = +\sqrt{-\frac{ج}{ا}}$ مطلوبہ قیمتیں ہیں اس جگہ قیمتیں مساوی مگر مختلف العلامت ہیں اگر $\frac{ج}{ا}$ منفی مقدار ہو تو دونوں قیمتیں حقیقی ہونگی اگر $\frac{ج}{ا}$ مثبت مقدار ہو تو دونوں قیمتیں خیالی ہونگی اور اس حالت میں ہم انہیں اس طرح بھی لکھ سکیں گے $لا = -خ\sqrt{\frac{ج}{ا}}$ اور $لا = +خ\sqrt{\frac{ج}{ا}}$

۱۲۸۔ مساوات درجہ دوم کی صورت عامہ کا حل اس حالت میں جب ا و ب و ج سب محدود مقداریں ہوں اور اُن میں سے کوئی بھی صفر کے برابر نہ ہو مختلف طریقوں سے حاصل ہوسکتا ہے لیکن ہم اس جگہ عام مستعمل ترکیب "تکمیل مجذور" کو اختیار کرینگے۔

$$ا لا^2 + ب لا + ج = ۰$$

از تمام مساوات کو ا پر تقسیم کرنے سے

$$لا^2 + \frac{ب}{ا} لا + \frac{ج}{ا} = ۰$$

عمل نقل سے $لا^2 + \frac{ب}{ا} لا = -\frac{ج}{ا}$

طرفین میں $\left(\frac{ب}{۲ا}\right)^2$ زیادہ کرنے سے

$$لا^2 + \frac{ب}{ا} لا + \left(\frac{ب}{۲ا}\right)^2 = -\frac{ج}{ا} + \left(\frac{ب}{۲ا}\right)^2$$

دائیں طرف کا جملہ مربع کامل ہے یعنی $(لا + \frac{ب}{۲ا})^۲$

اسلئے $(لا + \frac{ب}{۲ا})^۲ = \frac{ب^۲ - ۴اج}{۴ا^۲}$

طرفین کا جذر لینے سے $لا + \frac{ب}{۲ا} = \pm \sqrt{\frac{ب^۲ - ۴اج}{۴ا^۲}}$

$\therefore لا = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^۲ - ۴اج}}{۲ا}$

۱۲۹ ۔ اگر مساوات کی مذکورہ بالا قیمتیں عہ اور بہ سے تعبیر کیجائیں تو

$عہ = \frac{-ب + \sqrt{ب^۲ - ۴اج}}{۲ا}$ اور $بہ = \frac{-ب - \sqrt{ب^۲ - ۴اج}}{۲ا}$

ظاہر ہے کہ

(۱) اگر $ب^۲ - ۴اج$ (مقدار جو علامت جذر کے اندر ہے) مثبت ہو تو عہ اور بہ حقیقی اور غیر مساوی ہونگی

(۲) اگر $ب^۲ - ۴اج = ۰$ تو عہ اور بہ حقیقی اور مساوی ہونگی

(۳) اگر $ب^۲ - ۴اج$ منفی ہو تو عہ اور بہ خیالی اور غیر مساوی ہونگی

(۴) اگر $ب^۲ - ۴اج$ مربع کامل ہو تو عہ اور بہ ناطق اور غیر مساوی ہونگی

صرف اِن نتائج کی استعانت سے ہم مساوات کو حل کئے بغیر اُس کی قیمتوں کے مختلف خواص دریافت کر سکتے ہیں۔

مثال ۱ ۔ ثابت کرو کہ لا کی کوئی حقیقی قیمت شرائط مساوات

$۲لا^۲ - ۶لا + ۷ = ۰$ کو پورا نہیں کر سکتی۔

یہاں $ا = ۲$ و $ب = -۶$ و $ج = ۷$

$\therefore ب^۲ - ۴اج = (-۶)^۲ - ۴ \times ۲ \times ۷ = -۲۰$

پس معلوم ہوا کہ مساوات کی قیمتیں خیالی ہیں

مثال ۲ — اگر مساوات لا^2 + ۲ (ک + ۲) لا + ۹ک = ۰ کی قیمتیں مساوی ہوں تو ک کی قیمت دریافت کرو

قیمتوں کے مساوی ہونے کی شرط یہ ہے کہ (ک + ۲)^2 = ۹ک

یعنی ک^2 − ۵ک + ۴ = ۰

یا (ک − ۴)(ک − ۱) = ۰ ∴ ک = ۴ یا ک = ۱

مثال ۳ — ثابت کرو کہ مساوات

لا^2 − ۲ف لا + ف^2 − ق^2 + ۲ق ر − ر^2 = ۰ کی دونوں قیمتیں ناطق ہیں۔

دونوں قیمتیں ناطق ہونگی اگر (− ۲ف)^2 − ۴(ف^2 − ق^2 + ۲ق ر − ر^2) مربع کامل ہو لیکن یہ جملہ = ۴(ق^2 − ۲ق ر + ر^2) = ۴(ق − ر)^2

پس معلوم ہوا کہ قیمتیں ناطق ہیں۔

۱۳۰ — چونکہ $\text{عہ} = \frac{-\text{ب} + \sqrt{\text{ب}^2 - ۴\,\text{ا ج}}}{۲\,\text{ا}}$

اور $\text{بہ} = \frac{-\text{ب} - \sqrt{\text{ب}^2 - ۴\,\text{ا ج}}}{۲\,\text{ا}}$

جمع کرنے سے

$$\text{عہ} + \text{بہ} = \frac{-\text{ب} + \sqrt{\text{ب}^2 - ۴\,\text{ا ج}} - \text{ب} - \sqrt{\text{ب}^2 - ۴\,\text{ا ج}}}{۲\,\text{ا}}$$

$$= -\frac{۲\,\text{ب}}{۲\,\text{ا}} = -\frac{\text{ب}}{\text{ا}} \quad \text{......} \quad (۱)$$

ضرب دینے سے

$$\text{عہ} \times \text{بہ} = \frac{\left(-\text{ب} + \sqrt{\text{ب}^2 - ۴\,\text{ا ج}}\right)\left(-\text{ب} - \sqrt{\text{ب}^2 - ۴\,\text{ا ج}}\right)}{۴\,\text{ا}^2}$$

$$= \frac{(-ب)^2 - (ب^2 - ۴اج)}{۴ا^2} = \frac{۴اج}{۴ا^2} = \frac{ج}{ا} \quad \cdots\cdots (۲)$$

اگر مساوات کو صورت ذیل میں لکھا جائے یعنی

$لا^2 + \frac{ب}{ا} لا + \frac{ج}{ا} = ۰$ تو ان نتائج کو ہم اِس طرح بیان کر سکتے ہیں

اگر کسی مساوات درجہ دوم کی رقم اول کا سر ایک ہو تو

(۱) اُس کی قیمتوں کا مجموعہ برابر ہوگا لا کے سر کے جس کی علامت بدل دی جائے۔

(۲) اس کی قیمتوں کا حاصل ضرب برابر ہوگا مساوات کی تیسری رقم کے

نوٹ۔ مساوات کی اُس رقم کو جس میں مقدار مجہول شامل نہ ہو رقم مطلق کہتے ہیں۔

۱۳۱۔ چونکہ $-\frac{ب}{ا} = عہ + بہ$ اور $\frac{ج}{ا} = عہ بہ$

مساوات $لا^2 + \frac{ب}{ا} لا + \frac{ج}{ا} = ۰$ صورت ذیل میں بھی لکھی جاسکتی

$$لا^2 - (عہ + بہ) لا + عہ بہ = ۰ \quad \cdots\cdots (۱)$$

معلوم ہوا کہ ہر ایک مساوات درجہ دوم اِس صورت میں لکھی جاسکتی ہے

$$لا^2 - (\text{قیمتوں کا مجموعہ}) لا + \text{قیمتوں کا حاصل ضرب} = ۰ \quad \cdots\cdots (۲)$$

نیز (۱) سے $(لا - عہ)(لا - بہ) = ۰ \quad \cdots\cdots (۳)$

اگر کسی مساوات کی صرف قیمتیں دی ہوئی ہوں تو اب ہم اُس مساوات کو دریافت کر سکتے ہیں۔

مثال ۱۔ ایک مساوات کی قیمتیں ۳ اور -۲ ہیں اس کو دریافت کرو۔

مساوات مطلوبہ ہے $(لا - ۳)(لا + ۲) = ۰$

یا $لا^2 - لا - ۶ = ۰$

جب قیمتیں اصم یا غیر منطق ہوں تو طریق ذیل کو اختیار کرنے میں زیادہ

سہولت ہوگی۔

مثال ۲۔ ایک مساوات کی قیمتیں ۲ + $\sqrt{3}$ اور ۲ − $\sqrt{3}$ ہیں اس کو دریافت کرو۔

قیمتوں کا حاصل جمع = ۴ اور قیمتوں کا حاصل ضرب = ۱

∴ قاعدہ (۲) کی استعانت سے مساوات ہوئی لا^2 − ۴ لا + ۱ = ۰

مثال ۳۔ ایک مساوات کی قیمتیں ۲ و −۳ و $\frac{۷}{۵}$ ہیں اُسے دریافت کرو

معادلات ذیل میں سے ہر ایک مساوات مطلوبہ کی شرائط کو پورا کرتی ہے

لا − ۲ = ۰ ، لا + ۳ = ۰ ، لا − $\frac{۷}{۵}$ = ۰

اسلئے مساوات مطلوبہ ہوگی (لا − ۲) (لا + ۳) (لا − $\frac{۷}{۵}$) = ۰

یعنی (لا − ۲) (لا + ۳) (۵ لا − ۷) = ۰

یا ۵ لا^3 − ۲ لا^2 − ۳۷ لا + ۴۲ = ۰

مثال ۴۔ ایسی مساوات مرتب کرو جس کی قیمتیں ۰ ، ± ا ، $\frac{ج}{ب}$ ہوں

لا = ۰ ، لا = ا ، لا = − ا ، لا = $\frac{ج}{ب}$ میں سے ہر ایک مساوات مطلوبہ کی شرائط کو پورا کرتی ہے۔

اسلئے مساوات ہوئی لا (لا + ا) (لا − ا) (لا − $\frac{ج}{ب}$) = ۰

یعنی لا (لا^2 − ا^2) (ب لا − ج) = ۰

یا ب لا^4 − ج لا^3 − ا^2 ب لا^2 + ا^2 ج لا = ۰

۱۳۲۔ نتائج دفعہ ۱۳۰ نہایت ضروری ہیں اور مساوات درجہ دوم کی قیمتوں کے متعلق جو بھی سوالات ہوں اُن کو حل کرنے کے لئے عام طور پر کافی ثابت ہوتے ہیں۔ مگر ایسے سوالات میں ہمیں مساوات کی قیمتوں پر علیحدہ علیحدہ غور نہیں کرنا چاہیئے۔ لیکن ان کے حاصل جمع

اور حاصل ضرب کو مساوات کے سروں یا مکروں کی رقوم میں لکھنے سے جو ارتباطات حاصل ہوں اُن کو استعمال کرنا چاہیئے۔

مثال ۱۔ اگر ا اور ب مساوات لا^۲ - ف لا + ق = ۰ کی قیمتیں ہوں تو
(۱) ا^۲ + ب^۲ (۲) ا^۳ + ب^۳ کی قیمتیں دریافت کرو

یہاں ا + ب = ف اور ا ب = ق

∴ ا^۲ + ب^۲ = (ا + ب)^۲ - ۲ ا ب = ف^۲ - ۲ ق

نیز ا^۳ + ب^۳ = (ا + ب) (ا^۲ + ب^۲ - ا ب)

= ف {(ا + ب)^۲ - ۳ ا ب}

= ف (ف^۲ - ۳ ق)

مثال ۲۔ اگر ا اور ب مساوات ل لا^۲ + م لا + ن = ۰ کی قیمتیں ہوں تو ایسی مساوات دریافت کرو جس کی قیمتیں ا/ب اور ب/ا ہوں۔

قیمتوں کا حاصل جمع = ا/ب + ب/ا = (ا^۲ + ب^۲)/ا ب

قیمتوں کا حاصل ضرب = ا/ب × ب/ا = ۱

اسلئے دفعہ ۱۳۱ کے بموجب مساوات مطلوبہ ہوئی

لا^۲ - ((ا^۲ + ب^۲)/ا ب) لا + ۱ = ۰

یا ا ب لا^۲ - (ا^۲ + ب^۲) لا + ا ب = ۰

ہم مثال بالا میں ثابت کر چکے ہیں کہ

ا^۲ + ب^۲ = (م^۲ - ۲ ن ل)/ل^۲ اور ا ب = ن/ل

اسلئے مساوات مطلوبہ ہے ن/ل لا^۲ - (م^۲ - ۲ ن ل)/ل^۲ لا + ن/ل = ۰

یا ن ل لا^{۲} - (م^{۲} - ۲ ن ل) لا + ن ل = ۰

مثال ۳ - اگر لا = $\frac{۳ + ۵\sqrt{-۱}}{۲}$ تو ۲ لا^{۳} + ۲ لا^{۲} - ۷ لا + ۷۲ کی قیمت دریافت کرو اور ثابت کرو کہ اس قیمت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوگی اگر ہم لا کی بجائے جملہ مجوزہ میں $\frac{۳ - ۵\sqrt{-۱}}{۲}$ لکھدیں

سب سے پہلے ایک ایسی مساوات معلوم کرو جس کی قیمتیں $\frac{۳ \pm ۵\sqrt{-۱}}{۲}$ ہوں

قیمتوں کا مجموعہ = ۳ اور قیمتوں کا حاصل ضرب = $\frac{۱۷}{۲}$

اسلئے مساوات ہوئی ۲ لا^{۲} - ۶ لا + ۱۷ = ۰

پس ۲ لا^{۲} - ۶ لا + ۱۷ ایک ایسا جملہ درجہ دوم ہے جو $\frac{۳ \pm ۵\sqrt{-۱}}{۲}$ میں سے ہر ایک قیمت کے لئے نابود ہوتا ہے۔

اب ۲ لا^{۳} + ۲ لا^{۲} - ۷ لا + ۷۲ = لا (۲ لا^{۲} - ۶ لا + ۱۷)

+ ۴ (۲ لا^{۲} - ۶ لا + ۱۷) + ۴ = لا × ۰ + ۴ × ۰ + ۴ = ۴ اور یہ ہر ایک صورت مفروضہ میں جملہ کی قیمت عددی ہے۔

۱۳۲ - کن شرائط کے ماتحت مساوات ا لا^{۲} + ب لا + ج = ۰ کی قیمتیں (۱) متساوی المقدار اور مختلف العلامت (۲) ایک دوسرے کی متکافی یا مقلوب ہونگی؟

قیمتیں مقدار میں برابر اور علامت میں مختلف ہونگی اگر اُن کا حاصل جمع صفر ہو اسلئے شرط مطلوبہ ہے $-\frac{ب}{ا} = ۰$ یعنی ب = ۰

اگر قیمتیں ایک دوسری کی متکافی ہوں تو اُن کا حاصل ضرب ایک ہوگا اسلئے $\frac{ج}{ا} = ۱$ یعنی ج = ا

نتیجہ اول ہندسہ تحلیلی میں اکثر استعمال ہوتا ہے اور نتیجہ دوم ایک ایسی شرط عام کی خاص صورت ہے جو ہر ایک درجہ مساوات کے لئے

درست ہے۔

۱۳۴۔ کن شرائط کے ماتحت مساوات ا لا^{2} + ب لا + ج = ۰ کی قیمتیں (۱) دونوں مثبت ہونگی (۲) مختلف العلامت مگر اُن میں سے بڑی منفی ہوگی۔

$$\text{عہ} + \text{بہ} = -\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$$

$$\text{عہ بہ} = \frac{\text{ج}}{\text{ا}}$$

(۱) اگر دونوں قیمتیں مثبت ہوں تو حاصل ضرب عہ بہ مثبت ہوگا اور اس لئے ج کی وہی علامت ہوگی جو ا کی۔

نیز چونکہ عہ + بہ مثبت ہے اسلئے $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ منفی ہے اسلئے ب اور ا کی علامات مختلف ہیں۔

پس معلوم ہوا کہ شرط مطلوبہ یہ ہے کہ ا اور ج کی علامتیں متشابہ مگر ب کی علامت سے مختلف ہیں۔

(۲) اگر قیمتیں علامت میں مختلف ہوں تو حاصل ضرب عہ بہ منفی ہوگا اور اسلئے ج کی علامت ا سے مختلف ہوگی۔

نیز عہ + بہ کی وہی علامت ہے جو مساوات کی بڑی قیمت کی اور یہ قیمت منفی ہے اسلئے $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ مثبت ہے اسلئے ا اور ب کی علامات متشابہ ہیں۔

اسلئے شرط مطلوبہ یہ ہے کہ ا اور ب کی علامتیں متشابہ مگر ج کی علامت سے مختلف ہیں۔

۱۳۵۔ کن شرائط کے ماتحت مساوات ا لا^{2} + ب لا + ج = ۰ کی (۱) ایک قیمت صفر ہوگی (۲) دونوں قیمتیں صفر ہونگی (۳) ایک

قیمت غیر متناہی ہوگی (۴) دونوں قیمتیں غیر متناہی ہونگی ؟

$$\text{عہ} + \text{بہ} = -\frac{\text{ب}}{\text{ا}} \quad \ldots\ldots (۱)$$

$$\text{عہ} \times \text{بہ} = \frac{\text{ج}}{\text{ا}} \quad \ldots\ldots (۲)$$

صورت اوّل - اگر ایک قیمت صفر ہو تو $\text{عہ} \times \text{بہ} = \frac{\text{ج}}{\text{ا}} = ۰$

جس سے معلوم ہوا کہ ج = ۰

صورت دوم - اگر دونوں قیمتیں صفر ہوں تو

$$\text{عہ} + \text{بہ} = -\frac{\text{ب}}{\text{ا}} = ۰$$

یعنی ب = ۰ اور $\text{عہ}\,\text{بہ} = \frac{\text{ج}}{\text{ا}} = ۰$ یعنی ج = ۰

پس اس صورت میں ب = ج = ۰

اگر مساوات کی کوئی قیمت صفر نہ ہو تو $\text{لا}^۲$ پر تقسیم کرنے سے ہم اس کو شکل ذیل میں لکھ سکتے ہیں -

$$\text{ا} + \text{ب}\,\frac{۱}{\text{لا}} + \text{ج}\left(\frac{۱}{\text{لا}}\right)^۲ = ۰$$

فرض کرو کہ $\frac{۱}{\text{لا}} = \text{ما}$ تب

$$\text{ج}\,\text{ما}^۲ + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ا} = ۰ \quad \ldots\ldots (۳)$$

اس مساوات کی قیمتیں $\frac{۱}{\text{عہ}}$ اور $\frac{۱}{\text{بہ}}$ ہیں -

صورت سوم - اگر عہ لا انتہا بڑا ہو تو $\frac{۱}{\text{عہ}}$ لا انتہا چھوٹا ہوگا - یعنی مساوات (۳) کی ایک قیمت صفر ہوگی اور اس کے لئے ضروری ہے کہ ا = ۰ جیسا ہم نے اوپر ثابت کیا -

صورت چہارم - اگر عہ اور بہ دونوں لا انتہا بڑے ہوں تو $\frac{۱}{\text{عہ}}$ اور $\frac{۱}{\text{بہ}}$ لا انتہا چھوٹے ہونگے یعنی اس صورت میں مساوات (۳) کی دونوں قیمتیں صفر ہونگی اسلئے ضروری ہے کہ ا = ب = ۰ بموجب صورت (۲)

پس ثابت ہوا کہ مساوات ا لا^{۲} + ب لا + ج = ۰ کی ایک قیمت لا انتہا بڑی ہو گی اگر لا^{۲} کا سر صفر ہو اور دونوں قیمتیں لا انتہا بڑی ہونگی اگر لا^{۲} اور لا دونوں کے سر صفر ہوں۔

ہم نتائج مذکورہ بالا کو نقشۂ ذیل میں اکٹھا لکھتے ہیں تاکہ آیندہ حوالہ دینے میں سہولت ہو

دونوں قیمتیں حقیقی	ب^{۲} − ۴ ا ج > ۰	دونوں قیمتیں منفی	ج/ا + و ب/ا +
دونوں قیمتیں خیالی	ب^{۲} − ۴ ا ج < ۰	قیمتیں مختلف العلامت	ج/ا −
دونوں قیمتیں مساوی	ب^{۲} − ۴ ا ج = ۰	ایک قیمت = ۰	ج = ۰
قیمتیں مساوی مگر مختلف العلامت	ب = ۰	دونوں قیمتیں = ۰	ب = ۰، ج = ۰
		ایک قیمت ∞	ا = ۰
دونوں قیمتیں مثبت	ج/ا + و ب/ا −	دونوں قیمتیں ∞	ا = ۰ اور ب = ۰

امثلہ نمبری ۱۲

جن مساواتوں کی قیمتیں حسب ذیل ہیں انہیں مرتب کرو

۱− ۳/۷ و −۴/۵ ۲− م/ن و −ن/م

۳− (ف−ق)/(ف+ق) و (ف+ق)/(ف−ق) ۴− −ف ± ۲ √(۲ق)

۵− −۳ ± ۵ √(−۱) ۶− −ا ± ب √(−۱)

۷− ا/۲ و ۰ و −۲/ا ۸− ۲ ± √۳ و ۴

۹− ثابت کرو کہ معادلات ذیل کی قیمتیں حقیقی ہیں

(۱) لا^{۲} − ۲ ا لا + ا^{۲} − ب^{۲} − ج^{۲} = ۰

(۲) (ا - ب + ج) لا۲ + ۲ (ا - ب) لا + (ا - ب - ج) = ۰

۱۰۔ ثابت کرو کہ مساوات لا۲ + ۲ (ف + ق) لا + ۲ (ف۲ + ق۲) = ۰
کی قیمتیں خیالی ہیں۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ مساوات {ج۲ - ۲ ب ج + ب۲} لا۲
- ۲ {ج۲ - (ا + ب) ج + ا ب} لا + {۲ ا۲ - ۲ (ب + ج) ا + ب۲ + ج۲} = ۰
کی قیمتیں خیالی ہیں۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ مساوات (لا - ب) (لا - ج) + (لا - ج) (لا - ا)
+ (لا - ا) (لا - ب) = ۰ کی قیمتیں حقیقی ہیں اور وہ برابر نہیں ہوسکتیں
جب تک کہ ا، ب، ج ایک دوسرے کے برابر نہ ہوں۔

۱۳۔ اگر مساوات لا۲ - ۱۵ - م (۲ لا - ۸) = ۰ کی قیمتیں برابر ہوں تو
م کی قیمتیں دریافت کرو۔

۱۴۔ م کی کس قیمت کے لئے مساوات $\frac{\text{لا}^2 - \text{ب لا}}{\text{ا لا} - \text{ج}} = \frac{\text{م} - 1}{\text{م} + 1}$ کی قیمتیں
مقدار میں مساوی اور علامت میں مختلف ہونگی؟

۱۵۔ ثابت کرو کہ معادلات ذیل کی قیمتیں ناطق ہیں

(۱) (ا + ج - ب) لا۲ + ۲ ج لا + (ب + ج - ا) = ۰

(۲) ا ب ج۲ لا۲ + ۳ ا۲ ج لا + ب۲ ج لا - ۶ ا۲ - ا ب + ۲ ب۲ = ۰

اگر عہ اور بہ مساوات ا لا۲ + ب لا + ج = ۰ کی قیمتیں ہوں تو ذیل
کے جملوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

۱۶۔ $\frac{1}{\text{عہ}^2} + \frac{1}{\text{بہ}^2}$ ۱۷۔ عہ۲ بہ + عہ بہ۲

۱۸۔ $\left(\frac{\text{عہ}}{\text{بہ}} - \frac{\text{بہ}}{\text{عہ}}\right)^2$

ذیل کے جملوں کی قیمتیں دریافت کرو

۱۹- لا^{۳} + لا^{۲} - لا + ۲۲ جب لا = ۱ + ۲ $\sqrt{-۱}$

۲۰- لا^{۳} - ۳ لا^{۲} - ۸ لا + ۱۵ جب لا = ۳ + $\sqrt{-۱}$

۲۱- لا^{۳} - ا لا^{۲} + ۲ ا^{۲} لا + ۴ ا^{۳} جب $\frac{لا}{ا}$ = ۱ - $\sqrt{-۳}$

۲۲- اگر عہ اور بہ مساوات لا^{۲} + ف لا + ق = ۰ کی قیمتیں ہوں تو ایسی مساوات مرتب کرو جس کی قیمتیں (عہ - بہ)^{۲} اور (عہ + بہ)^{۲} ہوں۔

۲۳- ثابت کرو کہ مساوات (لا - ا) (لا - ب) = ح^{۲} کی قیمتیں ہمیشہ حقیقی ہوں گی۔

۲۴- اگر لا$_{۱}$ و لا$_{۲}$ مساوات ا لا^{۲} + ب لا + ج = ۰ کی قیمتیں ہوں تو ذیل کے جملوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

(۱) (ا لا$_{۱}$ + ب)$^{-۲}$ + (ا لا$_{۲}$ + ب)$^{-۲}$

(۲) (ا لا$_{۱}$ + ب)$^{-۳}$ + (ا لا$_{۲}$ + ب)$^{-۳}$

۲۵- اگر مساوات ا لا^{۲} + ب لا + ج = ۰ کی ایک قیمت دوسری کی ن گنی ہو تو اسکے مکرروں کا باہمی ربط دریافت کرو۔

۲۶- ایک ایسی مساوات دریافت کرو جس کی قیمتیں مساوات ۲ لا^{۲} + ۲ (م + ن) لا + م^{۲} + ن^{۲} = ۰ کی قیمتوں کے حاصل جمع اور حاصل تفریق کے مربعوں کے برابر ہوں۔

۲۷- مساوات ا لا^{۲} + ب لا + ج = ۰ کی قیمتیں عہ اور بہ ہیں ایک ایسی مساوات بناؤ جس کی قیمتیں عہ^{۲} + بہ^{۲} اور عہ$^{-۲}$ + بہ$^{-۲}$ ہوں۔

۲۸- مساوات ف لا^{۲} + ق لا + ر = ۰ کی قیمتوں کی علامات پر بحث کرو۔

۱۳۶۔ مثال ذیل سے نتائج دفعہ ۱۲۹ کے استعمال کی توضیح ہوگی۔

مثال۔ اگر لا کوئی مقدار حقیقی ہو تو ثابت کرو کہ جملہ $\frac{لا^2 + ۲ لا - ۱۱}{۲ (لا - ۳)}$ تمام عددی قیمتیں اختیار کرنے کی قابلیت رکھتا ہے سوائے اُن قیمتوں کے جو ۲ اور ۶ کے درمیان واقع ہوں۔

فرض کرو کہ جملہ معلومہ کو ہم ما سے تعبیر کرتے ہیں۔

اسلئے $ما = \frac{لا^2 + ۲ لا - ۱۱}{۲ (لا - ۳)}$

ضرب دینے سے $لا^2 + ۲ لا (۱ - ما) + ۶ ما - ۱۱ = ۰$

یہ ایک مساوات درجہ دوم ہے اور اگر لا کی قیمتیں حقیقی ہوں تو ضروری ہے کہ $۴ (۱ - ما)^2 - ۴ (۶ ما - ۱۱)$ مثبت ہو یا ۴ پر تقسیم کرنے اور اختصار کے بعد ضروری ہے کہ $ما^2 - ۸ ما + ۱۲$ مثبت ہو یعنی $(ما - ۶)(ما - ۲)$ مثبت ہو

پس معلوم ہوا کہ اس حاصل ضرب کے دونوں اجزار ضربی مثبت ہونے چاہئیں یا دونوں منفی۔ پہلی صورت میں $ما > ۶$ اور دوسری صورت میں $ما < ۲$ اسلئے ثابت ہوا کہ ما کی قیمت ۲ اور ۶ کے درمیان واقع نہیں ہوسکتی مگر سوائے اسکے ما یعنی جملہ معلومہ باقی تمام عددی قیمتیں اختیار کرنے کی قابلیت رکھتا ہے۔

اس مثال میں یہ بات قابل غور ہے کہ جملہ درجہ دوم $ما^2 - ۸ ما + ۱۲$ کی قیمت مثبت ہے جبتک کہ ما کی قیمت مساوات درجہ دوم $ما^2 - ۸ ما + ۱۲ = ۰$ کی قیمتوں کے درمیان واقع نہ ہو یہ ایک مسئلہ عامہ کی خاص صورت ہے اس کی تحقیق ہم دفعہ ذیل میں کریں گے۔

۱۳۷۔ لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیئے جملہ $ا لا^2 + ب لا + ج$ کی

علامت وہی ہوگی جو ا کی ہے سوائے اُس صورت کے جب مساوات $\text{ا}\,\text{لا}^{2} + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج} = 0$ کی قیمتیں حقیقی اور غیر مساوی ہوں اور لا کی قیمت اِن کے درمیان واقع ہو۔

$$\text{جملہ}\ \text{ا}\,\text{لا}^{2} + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج} = \text{ا}\left\{\text{لا}^{2} + \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\text{لا} + \frac{\text{ج}}{\text{ا}}\right\}$$

$$= \text{ا}\left\{\left(\text{لا} + \frac{\text{ب}}{2\,\text{ا}}\right)^{2} + \frac{\text{ج}}{\text{ا}} - \frac{\text{ب}^{2}}{4\,\text{ا}^{2}}\right\}$$

$$= \text{ا}\left\{\left(\text{لا} + \frac{\text{ب}}{2\,\text{ا}}\right)^{2} - \frac{\text{ب}^{2} - 4\,\text{ا}\,\text{ج}}{4\,\text{ا}^{2}}\right\} \ldots\ldots (1)$$

صورت اوّل۔ فرض کرو کہ $\text{ب}^{2} - 4\,\text{ا}\,\text{ج} > 0$ تب

$$\text{جملہ}\ \text{ا}\,\text{لا}^{2} + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج} = \text{ا}\left\{\left(\text{لا} + \frac{\text{ب}}{2\,\text{ا}}\right)^{2} - \frac{\text{ب}^{2} - 4\,\text{ا}\,\text{ج}}{4\,\text{ا}^{2}}\right\}$$

$$= \text{ا}\left\{\text{لا} + \frac{\text{ب}}{2\,\text{ا}} - \frac{\sqrt{\text{ب}^{2} - 4\,\text{ا}\,\text{ج}}}{2\,\text{ا}}\right\}\left\{\text{لا} + \frac{\text{ب}}{2\,\text{ا}} + \frac{\sqrt{\text{ب}^{2} - 4\,\text{ا}\,\text{ج}}}{2\,\text{ا}}\right\}$$

$= \text{ا}(\text{لا} - \text{عہ})(\text{لا} - \text{بہ})$ جہاں عہ اور بہ دونوں مقادیر حقیقی ہیں یعنی

$$\text{عہ} = \frac{-\text{ب} + \sqrt{\text{ب}^{2} - 4\,\text{ا}\,\text{ج}}}{2\,\text{ا}}$$

اور $$\text{بہ} = \frac{-\text{ب} - \sqrt{\text{ب}^{2} - 4\,\text{ا}\,\text{ج}}}{2\,\text{ا}}$$

فرض کرو کہ عہ بڑا ہے بہ سے۔

اب اگر لا $>$ عہ تو اجزاءِ ضربی لا − عہ اور لا − بہ دونوں مثبت ہونگے اور اگر لا $<$ بہ تو اجزاءِ ضربی لا − عہ اور لا − بہ دونوں منفی ہونگے۔ پس ہر حالت میں جملہ (لا − عہ)(لا − بہ) مثبت ہوگا اور $\text{ا}\,\text{لا}^{2} + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج}$ کی علامت وہی ہوگی جو ا کی۔

لیکن اگر لا کی قیمت عہ اور بہ کے درمیان واقع ہو تو جملہ (لا − عہ)(لا − بہ) کی علامت منفی ہوگی اور $\text{ا}\,\text{لا}^{2} + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج}$ کی علامت

ا کی علامت سے مختلف ہوگی

صورت دوم - فرض کرو کہ ب^2 - ۴ ا ج = ۰ تو (۱) سے ظاہر ہے کہ

ا لا^2 + ب لا + ج = ا (لا + ب/۲ا)^2

اور چونکہ لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے (لا + ب/۲ا)^2 مثبت ہے اسلئے ثابت ہوا کہ ا لا^2 + ب لا + ج کی وہی علامت ہے جو ا کی -

صورت سوم - فرض کرو کہ ب^2 - ۴ ا ج < ۰ یعنی مساوات کی قیمتیں خیالی ہیں -

جملہ ا لا^2 + ب لا + ج = ا {(لا + ب/۲ا)^2 - (ب^2 - ۴ ا ج)/۴ ا^2} بموجب (۱)

= ا {(لا + ب/۲ا)^2 + (۴ ا ج - ب^2)/۴ ا^2}

اب لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے جملہ (لا + ب/۲ا)^2 + (۴ ا ج - ب^2)/۴ ا^2 مثبت ہے اسلئے جملہ ا لا^2 + ب لا + ج کی وہی علامت ہے جو ا کی - پس مسئلہ ثابت ہوا

۱۳۸ - دفعہ آخر سے ظاہر ہے کہ اگر ب^2 - ۴ ا ج منفی ہو یا صفر کے برابر ہو تو جملہ ا لا^2 + ب لا + ج کی ہمیشہ ایک ہی علامت رہیگی خواہ لا کوئی حقیقی قیمت اختیار کرے اور اگر یہ شرط پوری ہو تو جملہ مثبت ہوگا اگر ا مثبت ہو اور منفی ہوگا اگر ا منفی ہو -

برعکس اس کے جملہ ا لا^2 + ب لا + ج کے ہمیشہ مثبت ہونے کے لئے ضروری ہے کہ ب^2 - ۴ ا ج منفی ہو یا صفر کے برابر ہو اور ا مقدار مثبت ہو نیز ا لا^2 + ب لا + ج کے ہمیشہ منفی ہونے کے لئے ضروری ہے کہ ب^2 - ۴ ا ج منفی ہو یا صفر کے برابر ہو اور ا مقدار منفی ہو -

مثال ۱ - ثابت کرو کہ اگر لا کی قیمت کا مناسب انتخاب کیا جائے تو

کسر (لا^2 − ۲لا + ۲۱)/(۶لا − ۱۴) جو قیمت ہم چاہیں اختیار کرنے کی قابلیت رکھتی ہے۔

فرض کرو کہ (لا^2 − ۲لا + ۲۱)/(۶لا − ۱۴) = ما

∴ لا^2 − ۲لا + ۲۱ = ما (۶لا − ۱۴)

∴ لا^2 − ۲(۱ + ۳ما) لا + ۲۱ + ۱۴ما = ۰

مساوات درجہ دوم کو حل کرنے سے

لا = ۱ + ۳ما ± √(۹ما^2 − ۸ما − ۲۰)

اگر لا مقدار حقیقی ہو تو ضرور ہے کہ ۹ما^2 − ۸ما − ۲۰ مثبت ہو یعنی

۹ (ما − ۲)(ما + ۱۰/۹) مثبت ہو

ظاہر ہے کہ ما کی قیمت اور جو کچھ بھی ہو صرف ۲ اور −۱۰/۹ کے درمیان واقع نہیں ہو سکتی اس سے یہ نتیجہ نکلا کہ لا کی قیمت کا مناسب انتخاب کرنے سے کسر (لا^2 − ۲لا + ۲۱)/(۶لا − ۱۴) وہی قیمت قبول کر سکتی ہے جو ہم چاہیں سوائے اُن قیمتوں کے جو ۲ اور −۱۰/۹ کے درمیان واقع ہوں۔

مثال ۲۔ اگر لا مقدار حقیقی ہو تو ایسی حدود دریافت کرو جن کے درمیان ا کی قیمت کا واقع ہونا ضروری ہے تاکہ جملہ (ا لا^2 − ۷لا + ۵)/(۵لا^2 − ۷لا + ا) تمام قیمتیں اختیار کرنے کے قابل ہو سکے۔

فرض کرو (ا لا^2 − ۷لا + ۵)/(۵لا^2 − ۷لا + ا) = ما

تب (ا − ۵ما) لا^2 − ۷لا (۱ − ما) + (۵ − اما) = ۰

اگر اس مساوات کی قیمتیں حقیقی ہوں تو ضروری ہے کہ

۴۹ (۱ − ما)^2 − ۴ (ا − ۵ما) (۵ − اما) مثبت ہو

یعنی (۴۹ − ۲۰ا) ما^2 + ۲ (۲ا^2 + ۱) ما + (۴۹ − ۲۰ا) مثبت ہو۔

اسلئے نتائج مندرجہ بالا کی استعانت سے ضروری ہے کہ (۲ا^2+۱)^2 - (۴۹ - ۲۰ ا)^2 منفی ہو یا صفر ہو اور ۴۹ - ۲۰ ا مثبت ہو

اب (۲ا^2 + ۱)^2 - (۴۹ - ۲۰ ا)^2 منفی یا صفر ہوگا

اگر ۲ (ا^2 - ۱۰ ا + ۲۵) × ۲ (ا^2 + ۱۰ ا - ۲۴) منفی یا صفر ہو

یعنی اگر ۴ (ا - ۵)^2 (ا + ۱۲) (ا - ۲) منفی یا صفر ہو

اور یہ جملہ منفی ہے جب تک کہ ا کی قیمت ۲ اور -۱۲ کے درمیان واقع ہے اور ایسی قیمتوں کے لئے ۴۹ - ۲۰ ا مثبت ہے

نیز جملہ مذکورہ اُس وقت صفر ہوگا جب ا = ۵ یا -۱۲ یا ۲ لیکن جب ا = ۵ تو ۴۹ - ۲۰ ا منفی ہے۔ اسلئے ا کی قیمتوں کی حدود ۲ اور -۱۲ ہیں اور ان کے درمیان اس کی کوئی قیمت ہوسکتی ہے۔

امثلہ نمبری ۱۳

۱- ایسی حدود دریافت کرو جن کے درمیان ن کا واقع ہونا ضروری ہے تاکہ مساوات ۲ ا لا (ا لا + ن ج) + (ن^2 - ۲) ج^2 = ۰ کی دو حقیقی قیمتیں ہوسکیں۔

۲- اگر لا مقدار حقیقی ہو تو ثابت کرو کہ جملہ لا / (لا^2 - ۵ لا + ۹) کی قیمت ہمیشہ ۱ اور -۱/۱۱ کے درمیان واقع ہوگی۔

۳- ثابت کرو کہ لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے جملہ (لا^2 - لا + ۱) / (لا^2 + لا + ۱) کی قیمت ۳ اور ۱/۳ کے درمیان واقع ہوگی۔

۴- اگر لا حقیقی ہو تو ثابت کرو کہ (لا^2 + ۳۴ لا - ۷۱) / (لا^2 + ۲ لا - ۷) کی کوئی قیمت ۵ اور ۹ کے درمیان واقع نہیں ہوسکتی۔

۵۔ ایسی مساوات دریافت کرو جس کی قیمتیں $\frac{\sqrt{\text{ا}}}{\sqrt{\text{ا}} \pm \sqrt{\text{ا} - \text{ب}}}$ ہوں

۶۔ اگر عہ اور بہ مساوات لا^{2} - ف لا + ق = ۰ کی قیمتیں ہوں تو ذیل کے جملوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

(۱) عہ^{2} (عہ^{2} بہ$^{-1}$ - بہ) + بہ^{2} (بہ^{2} عہ$^{-1}$ - عہ)

(۲) (عہ - ف)$^{-4}$ + (بہ - ف)$^{-4}$

۷۔ اگر ل لا^{2} + ن لا + ن = ۰ کی قیمتوں کی باہمی نسبت ف:ق ہو تو ثابت کرو کہ

$$\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}} + \sqrt{\frac{\text{ق}}{\text{ف}}} + \sqrt{\frac{\text{ن}}{\text{ل}}} = 0$$

۸۔ اگر لا حقیقی ہو تو ثابت کرو کہ جملہ $\frac{(\text{لا} + \text{م})^{2} - 4\,\text{م ن}}{2(\text{لا} - \text{ن})}$ تمام قیمتیں اختیار کرنے کی قابلیت رکھتا ہے سوائے اُن قیمتوں کے جو ۲ن اور ۲م کے درمیان واقع ہوں۔

۹۔ اگر مساوات ا لا^{2} + ۲ ب لا + ج = ۰ کی قیمتیں عہ اور بہ ہوں اور مساوات اَ لا^{2} + ۲ بَ لا + جَ = ۰ کی قیمتیں عہ + د اور بہ + د ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ب}^{2} - \text{ا ج}}{\text{ا}^{2}} = \frac{\text{بَ}^{2} - \text{اَ جَ}}{\text{اَ}^{2}}$$

۱۰۔ ثابت کرو کہ اگر لا حقیقی ہو تو جملہ $\frac{\text{ف لا}^{2} + 3\,\text{لا} - 4}{\text{ف} + 3\,\text{لا} - 4\,\text{لا}^{2}}$ تمام قیمتیں اختیار کرنے کی قابلیت رکھتا ہے بشرطیکہ ف کی قیمت ۱ اور ۷ کے درمیان واقع ہو۔

۱۱- لا کی حقیقی قیمتوں کے لئے جملہ $\frac{لا + ۲}{۲ لا^۲ + ۳ لا + ۶}$ کی بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرو۔

۱۲- ثابت کرو کہ اگر لا حقیقی ہو تو جملہ $\frac{لا^۲ - ب ج}{۲ لا - ب - ج}$ کی کوئی حقیقی قیمت ب اور ج کے درمیان واقع نہیں ہو سکتی۔

۱۳- اگر مساوات ا لا^۲ + ۲ ب لا + ج = ۰ کی قیمتیں ممکن اور مختلف ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات

(ا + ج)(ا لا^۲ + ۲ ب لا + ج) = ۲ (ا ج - ب^۲)(لا^۲ + ۱) کی

قیمتیں غیر ممکن ہونگی اور برعکس اسکے۔

۱۴- ثابت کرو کہ اگر لا حقیقی ہو تو جملہ $\frac{(ا لا - ب)(د لا - ج)}{(ب لا - ا)(ج لا - د)}$ تمام

قیمتیں قبول کرنے کی قابلیت رکھتا ہے بشرطیکہ ا^۲ - ب^۲ اور ج^۲ - د^۲ کی ایک ہی علامت ہو۔

۱۳۹- دو مقادیر متغیر لا اور ما کے جملہ مختص کو اکثر رمز ج(لا و ما) سے تعبیر کرتے ہیں۔ مثلاً ا لا + ب ما + ج

اور ا لا^۲ + ب لا ما + ج ما^۲ + د لا + ع ما + ف بالترتیب درجہ اول اور درجہ دوم کے دو جملے بلحاظ لا اور ما کے ہیں۔

مساوات ج(لا) = ۰ اور ج(لا و ما) = ۰ کو مساوات درجہ اول اور درجہ دوم کہیں گے اگر انکے مقابل کے جملے ج(لا) اور ج(لا و ما) جملات درجہ اول اور درجہ دوم ہوں

۱۴۰- ایسی شرط دریافت کرو کہ دو مقادیر متغیر لا اور ما کا جملہ مختص درجہ دوم دو اجزاء ضربی درجہ اول میں تحلیل ہو سکے۔

جملہ معلومہ کو ج (لا و ما) سے تعبیر کرو جہاں

ج (لا و ما) = ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج

اسکو لا کی قوائے نزولی کے موافق صفر کے برابر لکھو۔

ا لا^2 + ۲ لا (ھ ما + گ) + ب ما^2 + ۲ ف ما + ج = ۰

بلحاظ لا کے یہ مساوات درجہ دوم ہے اسکو حل کرنے سے

لا = [-(ھ ما + گ) ± √((ھ ما + گ)^2 - ا(ب ما^2 + ۲ ف ما + ج))] ÷ ا

یا ا لا + ھ ما + گ = ± √((ھ ما + گ)^2 - ا(ب ما^2 + ۲ ف ما + ج))

یا ا لا + ھ ما + گ = ± √(ما^2(ھ^2 - ا ب) + ۲ ما (ھ گ - ا ف) + (گ^2 - ا ج))

اب اگر جملہ ج (لا و ما) دو اجزاء ضربی درجہ اول (بشکل ف لا + ق ما + ر) کا حاصل ضرب ہو تو ضروری ہے کہ علامت جذر کے اندر کی مقدار مربع کامل ہو۔

اسلئے (ھ گ - ا ف)^2 = (ھ^2 - ا ب)(گ^2 - ا ج)

عمل نقل اور تقسیم سے حاصل ہوا۔

ا ب ج + ۲ ف گ ھ - ا ف^2 - ب گ^2 - ج ھ^2 = ۰

جو طالب علم مسائل مقطعات سے واقف ہے وہ بخوبی جانتا ہے کہ اس شرط کو ہم صورت ذیل میں بھی لکھ سکتے ہیں۔

ا	ھ	گ
ھ	ب	ف
گ	ف	ج

= ۰

۱۴۱- اگر مساوات درجہ دوم ا لا^2 + ب لا + ج = ۰ کی قیمتیں وہی ہوں جو مساوات اَ لا^2 + بَ لا + جَ = ۰ کی

ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ب}}{\text{ا}} = \frac{\text{بَ}}{\text{اَ}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ج}}{\text{ا}} = \frac{\text{جَ}}{\text{اَ}}$$

اگر ہر ایک مساوات کی قیمتیں عہ اور بہ سے تعبیر کی جائیں تو

$$\frac{\text{ب}}{\text{ا}} = -(\text{عہ} + \text{بہ}) = \frac{\text{بَ}}{\text{اَ}}$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{ج}}{\text{ا}} = \text{عہ بہ} = \frac{\text{جَ}}{\text{اَ}}$$

ظاہر ہے کہ یہ شرائط ضروری اور کافی ہیں

۱۴۲- ایسی شرط دریافت کرو کہ معادلات $\text{ا لا}^2 + \text{ب لا} + \text{ج} = 0$ اور $\text{اَ لا}^2 + \text{بَ لا} + \text{جَ} = 0$ کی ایک قیمت مشترک ہو۔

فرض کرو کہ لا = عہ سے دونوں مساواتوں کی شرائط پوری ہوتی ہیں۔ تب $\text{ا عہ}^2 + \text{ب عہ} + \text{ج} = 0$

$$\text{اَ عہ}^2 + \text{بَ عہ} + \text{جَ} = 0$$

اسلئے ضرب چلیپائی سے

$$\frac{\text{عہ}^2}{\text{ب جَ} - \text{بَ ج}} = \frac{\text{عہ}}{\text{ج اَ} - \text{جَ ا}} = \frac{1}{\text{ا بَ} - \text{اَ ب}}$$

عہ کو ساقط کرنے کے لئے دوسری نسبت کا مربع لو اور اس کو باقی دو نسبتوں کے حاصل ضرب کے برابر لکھو۔

$$\therefore \frac{\text{عہ}^2}{(\text{ج اَ} - \text{جَ ا})^2} = \frac{\text{عہ}^2}{\text{ب جَ} - \text{بَ ج}} \times \frac{1}{\text{ا بَ} - \text{اَ ب}}$$

اسلئے $(\text{ج اَ} - \text{جَ ا})^2 = (\text{ب جَ} - \text{بَ ج})(\text{ا بَ} - \text{اَ ب})$

شرط مطلوبہ ہے

نیز یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ اگر دو جملات درجہ دوم $\text{ا لا}^2 + \text{ب لا ما} + \text{ج ما}^2$

اور اَ لا^2 + بَ لاما + جَ ما^2 کا ایک جزِ ضربی مشترک ہو تو اس صورت میں بھی یہی شرط ضروری ہوگی۔

امثلہ نمبری ۱۴

۱۔ معلوم کرو کہ م کی کن قیمتوں کے لئے جملہ ما^2 + ۲ لاما + ۲ لا + م ما − ۳ دو ناطق اجزاء ضربی میں تحلیل ہو سکتا ہے؟

۲۔ اگر جملہ ۲ لا^2 + م لاما + ۳ ما^2 − ۵ ما − ۲ دو اجزاء ضربی درجہ اول کے حاصل ضرب کے برابر ہو تو م کی قیمتیں دریافت کرو

۳۔ ثابت کرو کہ جملہ ا (لا^2 − ما^2) − لاما (ب − ج) ہمیشہ دو حقیقی اجزاء ضربی درجہ اول میں تحلیل ہو سکتا ہے۔

۴۔ اگر معادلات لا^2 + ف لا + ق = ۰ اور لا^2 + فَ لا + قَ = ۰ کی ایک قیمت مشترک ہو تو ثابت کرو کہ یہ قیمت $\frac{\text{ف قَ − فَ ق}}{\text{ق − قَ}}$ یا $\frac{\text{ق − قَ}}{\text{فَ − ف}}$ کے برابر ہوگی۔

۵۔ ایسی شرط معلوم کرو کہ جملات ل لا^2 + م لاما + ن ما^2 اور لَ لا^2 + مَ لاما + نَ ما^2 کا ایک جزِ ضربی درجہ اول مشترک ہو

۶۔ اگر جملہ ۳ لا^2 + ۲ ف لاما + ۲ ما^2 + ۲ ا لا − ۴ ما + ۱ اجزاء ضربی درجہ اول میں تحلیل ہو سکے تو ثابت کرو کہ ف مساوات ف^2 + ۴ ا ف + ۲ ا^2 + ۶ = ۰ کی ایک قیمت ہے

۷۔ ایسی شرط معلوم کرو کہ جملات ا لا^2 + ۲ ھ لاما + ب ما^2 اور اَ لا^2 + ۲ ھَ لاما + بَ ما^2 اجزاء ضربی ما − م لا اور م ما + لا کی صورت کے جملوں پر بالترتیب تقسیم ہو سکیں۔

۸۔ ثابت کرو کہ مساوات لا^{2} − ۳ لا ما + ۲ ما^{2} − ۲ لا − ۳ ما − ۳۵ = ۰ میں لا کے لئے کوئی حقیقی قیمت مندرج کرنے سے ما کی ایک حقیقی قیمت حاصل ہوتی ہے اور ما کے لئے حقیقی قیمت مندرج کرنے سے لا کی حقیقی قیمت حاصل ہوتی ہے۔

۹۔ اگر دو حقیقی مقداروں لا اور ما کا باہمی ربط مساوات ۹ لا^{2} + ۲ لا ما + ما^{2} − ۹۲ لا − ۲۰ ما + ۲۴۴ = ۰ کے مطابق ہو تو ثابت کرو کہ لا کی قیمت ۳ اور ۶ کے درمیان واقع ہوگی اور ما کی ۱ اور ۱۰ کے درمیان۔

۱۰۔ اگر (د لا^{2} + ب لا + ج) ما + دَ لا^{2} + بَ لا + جَ = ۰ تو ایسی شرط دریافت کرو کہ لا ایک ناطق جملہ ما کا ہو

باب دہم

مساواتیں جو مساوات درجہ دوم کی طرح حل ہوسکتی ہیں

۱۴۳۔ اگر کسی مساوات صحیح ج (لا) = ۰ کی ایک قیمت ا معلوم ہو تو ہم جانتے ہیں کہ ج (لا) = (لا − ا) جَ (لا) جہاں جَ (لا) کا درجہ ج (لا) سے بقدر ایک کے کم ہے اسلئے معلوم ہوا کہ مساوات مفروضہ ج (لا) = ۰ کا حل مساوات جَ (لا) = ۰ کے حل پر موقوف ہے اب ایسا ممکن ہے جَ (لا) = ۰ مساوات درجہ دوم ہو جس صورت میں اس کا حل حسب معمول حاصل ہوسکتا ہے

مثال ۱۔ −۱ کے جذرالکعب کی قیمتیں دریافت کرو

اگر −۱ کا جذرالکعب لا سے تعبیر ہو تو لا^۳ = −۱ پس ہمیں مساوات لا^۳ + ۱ = ۰ کو حل کرنا ہے اس مساوات کی ایک قیمت ہمیں معلوم ہے۔

مساوات مفروضہ ہے (لا + ۱) (لا^۲ − لا + ۱) = ۰

یعنی
{ لا + ۱ = ۰
{ لا^۲ − لا + ۱ = ۰

مساوات درجہ دوم کی قیمتیں ہیں (۱ ± خ ۳-) / ۲

اسلئے −۱ کے جذرالکعب ہوئے −۱ و (۱ + خ ۳-) / ۲ اور (۱ − خ ۳-) / ۲

مثال ۲۔ مساوات ۷ لا^۳ − ۱۳ لا^۲ + ۳ لا + ۳ = ۰ کی قیمتیں دریافت کرو

ظاہر ہے کہ لا = ۱ شرائط مساوات کو پورا کرتی ہے۔

اسلئے مساوات معلومہ اس طرح لکھی جا سکتی ہے $(\text{لا}-۱)(۷\text{لا}^{۲}-۶\text{لا}-۳)=۰$

مساوات $۷\text{لا}^{۲}-۶\text{لا}-۳=۰$ کی قیمتیں $\frac{۳\pm\sqrt{۳۰}}{۷}$ ہیں

اسلئے مساوات مطلوبہ کی قیمتیں ہوئیں ۱ و $\frac{۳+\sqrt{۳۰}}{۷}$ و $\frac{۳-\sqrt{۳۰}}{۷}$

ایسا ممکن ہے کہ کسی نہ کسی طرح سے ہم مساوات صحیح کو اس صورت میں تحلیل کر سکیں ف ق ر ...... = ۰ جہاں ف، ق، ر ...... درجہ دوم کے صحیح جملے ہوں اس صورت میں مساوات زیر بحث کی قیمتیں معادلات ف = ۰، ق = ۰، ر = ۰ ...... کو حل کرنے سے حاصل ہو سکتی ہیں۔

مثال۔ مساوات $\text{ک}(\text{ا}\text{لا}^{۲}+\text{ب}\,\text{لا}+\text{ج})^{۲}-\text{گ}(\text{د}\text{لا}^{۲}+\text{ع}\,\text{لا}+\text{ف})^{۲}=۰$ کو حل کرو۔

مساوات معلومہ $=\left\{\sqrt{\text{ک}}(\text{ا}\text{لا}^{۲}+\text{ب}\,\text{لا}+\text{ج})+\sqrt{\text{گ}}(\text{د}\text{لا}^{۲}+\text{ع}\,\text{لا}+\text{ف})\right\}$

$\times\left\{\sqrt{\text{ک}}(\text{ا}\text{لا}^{۲}+\text{ب}\,\text{لا}+\text{ج})-\sqrt{\text{گ}}(\text{د}\text{لا}^{۲}+\text{ع}\,\text{لا}+\text{ف})\right\}=۰$

اسلئے مطلوبہ قیمتیں معادلات درجہ دوم

$(\text{ا}\sqrt{\text{ک}}+\text{د}\sqrt{\text{گ}})\text{لا}^{۲}+(\text{ب}\sqrt{\text{ک}}+\text{ع}\sqrt{\text{گ}})\text{لا}+\text{ج}\sqrt{\text{ک}}+\text{ف}\sqrt{\text{گ}}=۰$

اور $(\text{ا}\sqrt{\text{ک}}-\text{د}\sqrt{\text{گ}})\text{لا}^{۲}+(\text{ب}\sqrt{\text{ک}}-\text{ع}\sqrt{\text{گ}})\text{لا}+\text{ج}\sqrt{\text{ک}}-\text{ف}\sqrt{\text{گ}}=۰$

کی چار قیمتیں ہیں جو حسب معمول دریافت ہو سکتی ہیں

۱۴۴۔ فرض کرو کہ کسی مساوات کی تحویل صورت ذیل میں ہو سکتی ہے۔

یعنی $\{\text{ج}(\text{لا})\}^{۲}+\text{ف}\{\text{ج}(\text{لا})\}+\text{ق}=۰$

اگر اس میں ج (لا) کی جگہ ما رکھا جائے تو ما دریافت کرنے کے لئے مساوات $\text{ما}^{۲}+\text{ف}\,\text{ما}+\text{ق}=۰$ حاصل ہوگی۔

مساوات $ما^{۲} + ف\,ما + ق = ۰$ کی قیمتیں ہیں $\frac{-ف \pm \sqrt{ف^{۲} - ۴ق}}{۲}$

اسلئے

$$\left.\begin{aligned} ج(لا) &= \frac{-ف + \sqrt{ف^{۲} - ۴ق}}{۲} \\ ج(لا) &= \frac{-ف - \sqrt{ف^{۲} - ۴ق}}{۲} \end{aligned}\right\} \quad (۱)$$

اب اگر ج (لا) جملہ درجہ اول یا درجہ دوم بلحاظ لا کے ہو تو (۱) کو حل کرنے سے ہمیں اصلی مساوات کی تمام قیمتیں حاصل ہوسکتی ہیں۔

مثال ۱- $۸\,لا^{\frac{۳}{۲ن}} - ۸\,لا^{-\frac{۳}{۲ن}} = ۶۳$ کو حل کرو۔

طرفین کو $لا^{\frac{۳}{۲ن}}$ سے ضرب دینے اور عمل نقل سے

$$۸\,لا^{\frac{۳}{ن}} - ۶۳\,لا^{\frac{۳}{۲ن}} - ۸ = ۰$$

اسلئے $\left(لا^{\frac{۳}{۲ن}} - ۸\right)\left(۸\,لا^{\frac{۳}{۲ن}} + ۱\right) = ۰$

یعنی $لا^{\frac{۳}{۲ن}} = ۸$ یا $-\frac{۱}{۸}$

یا $لا = \left(۲^{۳}\right)^{\frac{۲ن}{۳}}$ یا $\left(-\frac{۱}{۲^{۳}}\right)^{\frac{۲ن}{۳}}$

$\therefore$ $لا = ۲^{۲ن}$ یا $\frac{۱}{۲^{۲ن}}$

مثال ۲- $۲^{۲لا} - ۳ \times ۲^{لا+۲} + ۳۲ = ۰$

یہ مساوات صورت ذیل میں لکھی جاسکتی ہے

$$\left(۲^{لا}\right)^{۲} - ۱۲\left(۲^{لا}\right) + ۳۲ = ۰$$

یعنی $\left(۲^{لا} - ۴\right)\left(۲^{لا} - ۸\right) = ۰$

اسلئے $۲^{لا} = ۴$ یا $۲^{لا} = ۸$

پہلی مساوات کی ایک حقیقی قیمت $لا = ۲$ ہے اور دوسری کی $لا = ۳$

مثال ۳- $۲\sqrt{\frac{لا}{د}} + ۳\sqrt{\frac{د}{لا}} = \frac{ب}{د} + \frac{۶د}{ب}$ کو حل کرو

فرض کرو کہ $\sqrt{\frac{لا}{ا}} = م$ تب $\sqrt{\frac{ا}{لا}} = \frac{۱}{م}$

$\therefore \quad ۲م + \frac{۳}{م} = \frac{ب}{ا} + \frac{۶ا}{ب}$

اخراج کسور سے $۲ا ب م^۲ - ۶ا^۲ م - ب^۲ م + ۳ا ب = ۰$

یعنی $(۲ا م - ب)(ب م - ۳ا) = ۰$

جس سے $م = \frac{ب}{۲ا}$ یا $\frac{۳ا}{ب}$

اسلئے $\frac{لا}{ا} = \frac{ب^۲}{۴ا^۲}$ یا $\frac{۹ا^۲}{ب^۲}$

یعنی $لا = \frac{ب^۲}{۴ا}$ یا $\frac{۹ا^۳}{ب^۲}$

مثال ۴۔ $(لا - ۵)(لا - ۷)(لا + ۶)(لا + ۴) = ۵۰۴$ کو حل کرو

طرفین اور وسطین کو اکٹھا ضرب دینے سے

$(لا^۲ - لا - ۲۰)(لا^۲ - لا - ۴۲) = ۵۰۴$

اگر اس کو بصورت مساوات درجہ دوم بلحاظ $(لا^۲ - لا)$ کے ترتیب دیا جائے تو حاصل ہوگا۔

$(لا^۲ - لا)^۲ - ۶۲(لا^۲ - لا) + ۳۳۶ = ۰$

$\therefore \quad (لا^۲ - لا - ۶)(لا^۲ - لا - ۵۶) = ۰$

$\therefore \quad لا^۲ - لا - ۶ = ۰$ یا $لا^۲ - لا - ۵۶ = ۰$

یعنی $لا = ۳، -۲، ۸، -۷$ ۔

مثال ۵۔ $(لا + ا)(لا + ا + ب)(لا + ا + ۲ب)(لا + ا + ۳ب) = ج^۴$

طرفین اور وسطین کو اکٹھا ضرب دینے سے ہم اس مساوات کو بصورت ذیل لکھ سکتے ہیں یعنی

$$\{لا^۲ + (۲ا + ۳ب)لا + ا(ا + ۳ب)\}$$

$$\times \{لا^۲ + (۲ا + ۳ب)لا + (ا + ب)(ا + ۲ب)\} = ج^۴$$

اگر ما = لا^{2} + (۲ ا + ۳ ب) لا + (ا^{2} + ۳ ا ب) تو مساوات بالا کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

ما (ما + ۲ ب^{2}) = ج^{4}

یعنی ما^{2} + ۲ ب^{2} ما + ب^{4} = ب^{4} + ج^{4}

اسلئے ما = − ب^{2} ± $\sqrt{\text{ب}^{4}+\text{ج}^{4}}$

اسلئے اصلی مساوات کا حل معادلات

لا^{2} + (۲ ا + ۳ ب) لا + ا^{2} + ۳ ا ب + ب^{2} = ± $\sqrt{\text{ب}^{4}+\text{ج}^{4}}$

پر موقوف ہے۔

۱۴۵- اگر کوئی مساوات صورت ذیل میں لکھی جاسکتی ہو یعنی ا لا^{2} + ب لا + ج + ف $\sqrt{\text{ا لا}^{2}\text{ + ب لا + ج}}$ = ق تو اس کا حل اس طرح حاصل ہو سکتا ہے۔

فرض کرو کہ ما = $\sqrt{\text{ا لا}^{2}\text{ + ب لا + ج}}$

تب ما^{2} + ف ما − ق = ۰

اگر عہ اور بہ اس مساوات کی قیمتیں ہوں تو

$\sqrt{\text{ا لا}^{2}\text{ + ب لا + ج}}$ = عہ اور $\sqrt{\text{ا لا}^{2}\text{ + ب لا + ج}}$ = بہ

ان مساواتوں سے ہمیں لا کی ۴ قیمتیں حاصل ہونگی۔

علامت جذر کے ماقبل جب کوئی علامت نہ ہو تو عموماً علامت مثبت کو متصرف خیال کرتے ہیں۔ اسلئے اگر عہ اور بہ دونوں مثبت ہوں تو لا کی چاروں قیمتیں اصلی مساوات کی شرائط کو پورا کرینگی اگر عہ اور بہ میں سے ایک بھی منفی ہو تو اس سے جو مساوات درجہ دوم حاصل ہوگی اسکی قیمتیں ا لا^{2} + ب لا + ج − ف $\sqrt{\text{ا لا}^{2}\text{ + ب لا + ج}}$ = ق کے موافق ہونگی

لیکن اصلی مساوات کی شرائط کو پورا نہیں کرینگی۔

مثال ۱۔ لا² - ۵ لا + ۲ √(لا² - ۵ لا + ۳) = ۱۲ کو حل کرو

طرفین پر ۳ زیادہ کرنے سے

لا² - ۵ لا + ۳ + ۲ √(لا² - ۵ لا + ۳) = ۱۵

اب فرض کرو کہ √(لا² - ۵ لا + ۳) = ما

تب ما² + ۲ ما - ۱۵ = ۰ جس سے ما = ۳ یا - ۵

اسلئے √(لا² - ۵ لا + ۳) = + ۳

یا √(لا² - ۵ لا + ۳) = - ۵

ان مساواتوں کا مربع لینے اور حل کرنے سے ہمیں مساوات اول سے حاصل ہوگا لا = ۶ یا - ۱ اور مساوات دوم سے لا = (۵ ± √۱۱۳)/۲

پہلی دو قیمتیں مساوات معلومہ کو پورا کرتی ہیں مگر دوسری دو مساوات لا² - ۵ لا - ۲ √(لا² - ۵ لا + ۳) = ۱۲ کے متعلق ہیں۔

مثال ۲۔ مساوات لا² - ۷ لا + √(لا² - ۷ لا + ۱۸) = ۲۴ کو حل کرو

طرفین پر ۱۸ زیادہ کرنے سے لا² - ۷ لا + ۱۸ + √(لا² - ۷ لا + ۱۸) = ۴۲

دائیں طرف کو مربع کامل بناؤ تو حاصل ہوگا۔

لا² - ۷ لا + ۱۸ + √(لا² - ۷ لا + ۱۸) + ¼ = ۴۲ ¼ = ۱۶۹/۴

اسلئے √(لا² - ۷ لا + ۱۸) + ½ = ± ۱۳/۲

∴ √(لا² - ۷ لا + ۱۸) = ۶ یا - ۷

یعنی لا² - ۷ لا + ۱۸ = ۳۶ یا ۴۹

اب ہمیں دو معادلات درجہ دوم حل کرنی ہیں۔ پہلی سے ہمیں حاصل ہوگا۔ لا = ۹ یا - ۲ اور دوسری سے لا = ½ (۷ ± √۱۷۳)

قاعدہ آزمایش سے معلوم ہوگا کہ پہلی دو قیمتیں مساوات مجوزہ کو پورا کرتی ہیں لیکن دوسری دو قیمتیں مساوات

$\text{لا}^{۲} - ۷\,\text{لا} - ۸\sqrt{\text{لا}^{۲} - ۷\,\text{لا} + ۱۸} = ۲۴$ کے متعلق ہیں۔

۱۴۶۔ اگر کوئی مساوات جبریہ مساوات صحیح کی صورت میں تحویل ہوسکے تو پہلی مساوات کی تمام قیمتیں دوسری مساوات کی کل شرائط کو پورا کرینگی مگر یہ ممکن ہے کہ اثنائے عمل میں چند ایسی قیمتیں مساوات صحیح میں داخل ہوچکی ہوں جو مساوات مجوزہ سے بیگانہ ہوں اس امر کی توضیح کے لئے امثلہ ذیل کارآمد ہونگی۔

مثال ۱۔ $\frac{۱}{\text{لا}+\text{ا}+\text{ب}} + \frac{۱}{\text{لا}-\text{ا}+\text{ب}} + \frac{۱}{\text{لا}+\text{ا}-\text{ب}} + \frac{۱}{\text{لا}-\text{ا}-\text{ب}} = ۰$

اگر پہلی اور چوتھی رقموں کو ایک جگہ اور دوسری دو کو ایک جگہ اکٹھا کیا جائے تو یہ مساوات حاصل ہوگی $\frac{۲\,\text{لا}}{\text{لا}^{۲} - (\text{ا}+\text{ب})^{۲}} + \frac{۲\,\text{لا}}{\text{لا}^{۲} - (\text{ا}-\text{ب})^{۲}} = ۰$

اب اگر اسکو $\{\text{لا}^{۲} - (\text{ا}+\text{ب})^{۲}\}\{\text{لا}^{۲} - (\text{ا}-\text{ب})^{۲}\}$ سے ضرب دیدی جائے تو مساوات ذیل حاصل ہوگی۔

$$۲\,\text{لا}\{۲\,\text{لا}^{۲} - ۲(\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲})\} = ۰$$

چونکہ مضروب فیہ لا کا جلہ ہے اسلئے ممکن ہے کہ ضرب دینے میں ایسی قیمتیں مساوات مندرجہ بالا میں داخل کردی گئی ہوں جو اصلی مساوات سے بالکل بے تعلق ہوں۔ مساوات آخر الذکر ان دو مساواتوں میں تحویل ہوسکتی ہے۔

$$\left\{\begin{array}{l} \text{لا} = ۰ \\ \text{لا}^{۲} - (\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲}) = ۰ \end{array}\right\}$$

اسلئے اس کی قیمتیں صفر، $\sqrt{ا^{2}+ب^{2}}$ اور $-\sqrt{ا^{2}+ب^{2}}$ ہیں
اب ضروری ہے کہ جو قیمتیں جز ضربی $\{لا^{2}-(ا+ب)^{2}\}\{لا^{2}-(ا-ب)^{2}\}$ کے ذریعہ مساوات میں شامل ہوئی ہوں $\pm(ا+ب)$ اور $\pm(ا-ب)$ ہوں۔

معلوم ہوا کہ تینوں قیمتیں صفر، $\sqrt{ا^{2}+ب^{2}}$ اور $-\sqrt{ا^{2}+ب^{2}}$ اصلی مساوات کی مطلوبہ قیمتیں ہیں اور ان میں سے ہر ایک مساوات مجوزہ کو پورا کرتی ہے۔

مثال ۲-

$$\frac{ا-لا}{\sqrt{ا}+\sqrt{ا-لا}}+\frac{ا+لا}{\sqrt{ا}+\sqrt{ا+لا}}=\sqrt{ا}\quad\ldots\ldots(۱)$$

نسب نما کو ناطق بنانے سے

$$\frac{(ا-لا)\{\sqrt{ا}-\sqrt{ا-لا}\}}{لا}+\frac{(ا+لا)\{\sqrt{ا}-\sqrt{ا+لا}\}}{-لا}=\sqrt{ا}\quad\ldots(۲)$$

طرفین کو لا سے ضرب دینے اور ارقام ناطقہ کو ایک طرف لانے سے حاصل ہوگا۔

$$(ا+لا)^{\frac{3}{2}}-(ا-لا)^{\frac{3}{2}}=۳\,لا\,\sqrt{ا}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(۳)$$

(۳) کا مربع لینے اور عمل نقل سے

$$۲ا^{3}-۳ا\,لا^{2}=۲\,(ا^{2}-لا^{2})^{\frac{3}{2}}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(۴)$$

(۴) کا مربع لینے اور عمل نقل سے مساوات صحیح حاصل ہوگی۔

$$(۴\,لا^{2}-۳\,ا^{2})\,لا^{4}=۰\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(۵)$$

(۵) کی قیمتیں ہیں صفر (چار دفعہ مگر اس تکرار سے ہمیں فی الحال کچھ مطلب نہیں) اور $\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}\,ا$

ظاہر ہے کہ لا = ۰ مساوات (۱) کی ایک قیمت ہے۔

طرفین کا مربع لینے سے معلوم ہوگا کہ $\sqrt{\left(\text{۱} \pm \frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۲}}\right)} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \pm \frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۲}}$ پس $\pm \frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۲}}\,\text{ا}$ مساوات (۱) کی قیمتیں ہونگی

اگر

$$\frac{\text{۲} \mp \sqrt{\text{۳}}}{\text{۳} \mp \sqrt{\text{۳}}} + \frac{\text{۲} \pm \sqrt{\text{۳}}}{\text{۳} \pm \sqrt{\text{۳}}} = \text{۱}$$

یعنی اگر

$$\frac{\text{۳} \mp \sqrt{\text{۳}} + \text{۳} \pm \sqrt{\text{۳}}}{\text{۹} - \text{۳}} = \text{۱}$$

اور یہ درست ہے پس معلوم ہوا کہ مساوات (۵) کی تمام قیمتیں مساوات (۱) کی قیمتیں ہیں

مثال ۳۔

$$\frac{\sqrt{(\text{ا} + \text{لا})}}{\sqrt{\text{ا}} + \sqrt{(\text{ا} + \text{لا})}} = \frac{\sqrt{(\text{ا} - \text{لا})}}{\sqrt{\text{ا}} - \sqrt{(\text{ا} - \text{لا})}} \quad \ldots\ldots(\text{۱})$$

مثال بالا کے مطابق مساوات (۱) پر عمل کرنے سے حاصل ہوگا۔

$$\text{۴}\,\text{لا}^{\text{۴}} - \text{۳}\,\text{ا}^{\text{۲}}\,\text{لا}^{\text{۲}} = \text{۰} \quad \ldots\ldots(\text{۲})$$

(۲) کی قیمتیں ہیں صفر اور $\pm \frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۲}}\,\text{ا}$ مگر قاعدہ آزمائش سے معلوم ہوگا کہ ان میں سے کوئی بھی اصلی مساوات کو پورا نہیں کرتی۔

مثال ۴۔

$$\sqrt{(\text{۲}\,\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۴}\,\text{لا} + \text{۱})} + \sqrt{(\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۵}\,\text{لا} + \text{۲})}$$

$$= \sqrt{(\text{۲}\,\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۲}\,\text{لا} + \text{۳})} + \sqrt{(\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۳}\,\text{لا} + \text{۴})} \quad \ldots(\text{۱})$$

عمل نقل سے

$$\sqrt{(\text{۲}\,\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۴}\,\text{لا} + \text{۱})} - \sqrt{(\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۳}\,\text{لا} + \text{۴})}$$

$$= \sqrt{(\text{۲}\,\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۲}\,\text{لا} + \text{۳})} - \sqrt{(\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۵}\,\text{لا} + \text{۲})}$$

طرفین کا مربع لینے سے $3\text{لا}^2 - 7\text{لا} + 5 - 2\sqrt{(2\text{لا}^2 - 4\text{لا} + 1)(\text{لا}^2 - 3\text{لا} + 4)}$

$= 3\text{لا}^2 - 7\text{لا} + 5 - 2\sqrt{(2\text{لا}^2 - 2\text{لا} + 3)(\text{لا}^2 - 5\text{لا} + 2)}$

یعنی $\sqrt{2\text{لا}^4 - 10\text{لا}^3 + 21\text{لا}^2 - 19\text{لا} + 4}$

$= \sqrt{2\text{لا}^4 - 12\text{لا}^3 + 17\text{لا}^2 - 19\text{لا} + 6}$ ......(۲)

(۲) کا مربع لینے اور عمل نقل سے $\text{لا}^3 + 2\text{لا}^2 - 1 = 0$

یعنی $(\text{لا} + 1)(\text{لا}^2 + \text{لا} - 1) = 0$

اسلئے (۳) کی قیمتیں ہوئیں -1 اور $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

اب $\text{لا} = -1$ مساوات (۱) کو پورا کرتی ہے اور ہم یہ ثابت کرسکتے ہیں کہ باقی دو قیمتیں مساوات (۱) کو پورا نہیں کرتیں کیونکہ اگر $\text{لا} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ تو $\text{لا}^2 + \text{لا} - 1 = 0$۔ اسلئے $\text{لا}^2 = -\text{لا} + 1$، اب لا^2 کی یہ قیمت استعمال کرنے سے مساوات (۱) مساوات $\sqrt{-6\text{لا} + 3} = \sqrt{-4\text{لا} + 5}$ میں تحویل ہوسکتی ہے جس سے $-6\text{لا} + 3 = -4\text{لا} + 5$ اور $\text{لا} = -1$ اس مساوات کی ایک قیمت ہے مگر $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ میں سے کوئی بھی اس کو پورا نہیں کرتی۔

مثال ۵۔ $\frac{1 - \sqrt{1 - \text{لا}^2}}{1 + \sqrt{1 - \text{لا}^2}} = 27\,\frac{\sqrt{1 + \text{لا}} + \sqrt{1 - \text{لا}}}{\sqrt{1 + \text{لا}} - \sqrt{1 - \text{لا}}}$ ......(۱)

دائیں طرف کے شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو $1 - \sqrt{1 - \text{لا}^2}$ سے اور بائیں طرف کے شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو $\sqrt{1 + \text{لا}} - \sqrt{1 - \text{لا}}$ سے ضرب دینے سے حاصل ہوگا۔

$$\frac{\left(1 - \sqrt{1 - \text{لا}^2}\right)^2}{\text{لا}^2} = 27\,\frac{\text{لا}}{1 - \sqrt{1 - \text{لا}^2}}$$

طرفین مساوات کو لا (۱ - ۸ ∛(۱ - لا^{2})) سے ضرب دو تو حاصل ہوگا۔

{۱ - ۸ ∛(۱ - لا^{2})}^{3} = ۲۷ لا^{3} .... (۲)

اگر ۱+ کے جذر الکعب کی تین قیمتیں ۱، سہ، سہ^{2} ہوں تو مساوات (۲) تین معادلات ذیل میں تحلیل ہوسکیگی

۱ - ۸ ∛(۱ - لا^{2}) = ۳ لا
۱ - ۸ ∛(۱ - لا^{2}) = ۳ سہ لا .... (۳)
۱ - ۸ ∛(۱ - لا^{2}) = ۳ سہ^{2} لا

ان مساواتوں کو ناطق بنانے سے ہمیں تین معادلات صحیح حاصل ہونگی

۱۰ لا^{2} - ۶ لا = ۰
(۱ + ۹ سہ^{2}) لا^{2} - ۶ سہ لا = ۰ .... (۴)
(۱ + ۹ سہ) لا^{2} - ۶ سہ^{2} لا = ۰

معادلات (۴) کی قیمتیں ہیں ۰، ۳/۵ اور ۰، ۶ سہ/(۱ + ۹ سہ^{2}) اور ۰، ۶ سہ^{2}/(۱ + ۹ سہ)
طالب علم کو یہ فیصلہ کرنے میں دقت نہ ہوگی کہ ان میں سے کون سی قیمتیں اصلی مساوات کو پورا کرتی ہیں۔

۱۴۷ - معادلات متکافیہ

مساوات درجہ چہارم کی ایک مشہور قسم ترکیب ذیل سے مساوات درجہ دوم کی صورت میں تحویل ہوسکتی ہے۔

معادلات ا لا^{4} + ب لا^{3} + ج لا^{2} + ب لا + ا = ۰ .... (۱)

اور ا لا^{4} + ب لا^{3} + ج لا^{2} - ب لا + ا = ۰ .... (۱')

بہ غور کرو ان مساواتوں میں شروع اور آخیر سے برابر برابر فاصلوں پر جو

ارقام ہیں انکے سر یا تو باہم مساوی ہیں یا دوسری اور چوتھی انقام کے سر مقدار میں مساوی اور علامت میں مختلف ہیں - ایسی مساواتوں کو معاولات متکافیہ کہتے ہیں -

لا^2 پر تقسیم کرنے سے معاولات (۱) اور (۱َ) صور ذیل میں لکھی جا سکتی ہیں

$$\text{ا}\left(\text{لا}^2+\frac{1}{\text{لا}^2}\right)+\text{ب}\left(\text{لا}+\frac{1}{\text{لا}}\right)+\text{ج}=0 \quad \text{......(۲)}$$

$$\text{ا}\left(\text{لا}^2+\frac{1}{\text{لا}^2}\right)+\text{ب}\left(\text{لا}-\frac{1}{\text{لا}}\right)+\text{ج}=0 \quad \text{......(۲َ)}$$

یعنی
$$\text{ا}\left(\text{لا}+\frac{1}{\text{لا}}\right)^2+\text{ب}\left(\text{لا}+\frac{1}{\text{لا}}\right)+\text{ج}-2\text{ا}=0 \quad \text{......(۳)}$$

اور
$$\text{ا}\left(\text{لا}-\frac{1}{\text{لا}}\right)^2+\text{ب}\left(\text{لا}-\frac{1}{\text{لا}}\right)+\text{ج}+2\text{ا}=0 \quad \text{......(۳َ)}$$

(۳) اور (۳َ) بالترتیب بلحاظ $\text{لا}+\frac{1}{\text{لا}}$ اور $\text{لا}-\frac{1}{\text{لا}}$ کے معاولات درجہ دوم ہیں

اگر مساوات (۳) کی قیمتیں عہ اور بہ ہوں اور مساوات (۳َ) کی جہ اور مہ

تو مساوات (۳) سے حاصل ہوگا
$$\left\{\begin{array}{l}\text{لا}+\frac{1}{\text{لا}}=\text{عہ}\\ \text{لا}+\frac{1}{\text{لا}}=\text{بہ}\end{array}\right\}$$

یعنی
$$\left\{\begin{array}{l}\text{لا}^2-\text{عہ}\,\text{لا}+1=0\\ \text{لا}^2-\text{بہ}\,\text{لا}+1=0\end{array}\right\} \quad \text{......(۴)}$$

اسی طرح عمل کرنے سے (۳َ) سے حاصل ہوگا

$$\left\{\begin{array}{l}\text{لا}^2-\text{جہ}\,\text{لا}-1=0\\ \text{لا}^2-\text{مہ}\,\text{لا}-1=0\end{array}\right\} \quad \text{......(۴َ)}$$

پس معاولات درجہ دوم (۴) کی چار قیمتیں مساوات درجہ چہارم (۱) کی قیمتیں ہیں اور (۴َ) کی چار قیمتیں مساوات (۱َ) کی قیمتیں ہیں

مساوات متکافی کی تعمیم

اگر مساوات $\text{ا}\,\text{لا}^{4} + \text{ب}\,\text{لا}^{3} + \text{ج}\,\text{لا}^{2} + \text{د}\,\text{لا} + \text{ر} = 0$ پر اُسی قسم کا عمل کیا جائے جیسا (۱) اور (۱) پر کیا تو اس کی تحویل صورت ذیل میں ہو گی۔

$$\text{ا}\left(\text{لا}^{2} + \frac{\text{ر}}{\text{ا}\,\text{لا}^{2}}\right) + \text{ب}\left(\text{لا} + \frac{\text{د}}{\text{ب}\,\text{لا}}\right) + \text{ج} = 0$$

اب فرض کرو کہ $\frac{\text{ر}}{\text{ا}} = \frac{\text{د}^{2}}{\text{ب}^{2}}$ تو یہ مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے۔

$$\text{ا}\left(\text{لا} + \frac{\text{د}}{\text{ب}\,\text{لا}}\right)^{2} + \text{ب}\left(\text{لا} + \frac{\text{د}}{\text{ب}\,\text{لا}}\right) + \text{ج} - 2\frac{\text{ا}\text{د}}{\text{ب}} = 0$$

جو بلحاظ $\text{لا} + \frac{\text{د}}{\text{ب}\,\text{لا}}$ کے مساوات درجہ دوم ہے۔

نتیجہ صریح ۔ یہ بات قابل توجہ ہے کہ ذیل کی معادلات متکافیہ درجہ پنجم معادلات متکافی درجہ چہارم میں تحویل ہو سکتی ہیں اور اسلئے مساوات درجہ دوم کی طرح حل ہو سکتی ہیں۔ یعنی

$$\text{ا}\,\text{لا}^{5} + \text{ب}\,\text{لا}^{4} + \text{ج}\,\text{لا}^{3} \pm \text{ج}\,\text{لا}^{2} \pm \text{ب}\,\text{لا} \pm \text{ا} = 0$$

اس میں علامات مشتبہ میں سے اوپر کی علامات اکٹھی اور نیچے کی اکٹھی لینی چاہئیں

معادلات مندرجہ بالا اس طرح لکھی جا سکتی ہیں

$$\text{ا}(\text{لا}^{5} \pm 1) + \text{ب}\,\text{لا}(\text{لا}^{3} \pm 1) + \text{ج}\,\text{لا}^{2}(\text{لا} \pm 1) = 0$$

جس سے ظاہر ہے کہ $\text{لا} + 1$ یا $\text{لا} - 1$ دائیں طرف کا جز ضربی ہے۔ اس جز ضربی کو دور کرنے سے یہ مساوات درجہ پنجم مساوات متکافی درجہ چہارم ہو جاتی ہے اور اسے ہم حل کر سکتے جیسا اوپر بیان ہوا

مثال ۱۔ مساوات $۱۲\,لا^{۴} - ۵۶\,لا^{۳} + ۸۹\,لا^{۲} - ۵۶\,لا + ۱۲ = ۰$ کو حل کرو۔

$لا^{۲}$ پر تقسیم کرنے اور ترتیب دینے سے

$$۱۲\left(لا^{۲} + \frac{۱}{لا^{۲}}\right) - ۵۶\left(لا + \frac{۱}{لا}\right) + ۸۹ = ۰$$

فرض کرو کہ $لا + \frac{۱}{لا} = ی$ تب $لا^{۲} + \frac{۱}{لا^{۲}} = ی^{۲} - ۲$

$$\therefore\ ۱۲\,(ی^{۲} - ۲) - ۵۶\,ی + ۸۹ = ۰$$

جس سے حاصل ہوا $ی = لا + \frac{۱}{لا} = \frac{۵}{۲}$ یا $\frac{۱۳}{۶}$

ان مساواتوں کو حل کرنے سے $لا = ۲،\ \frac{۱}{۲}،\ \frac{۳}{۲}،\ \frac{۲}{۳}$

مثال ۲۔ $+۱$ کے پانچویں جذر کی قیمتیں دریافت کرو

ہمیں مساوات $لا^{۵} = +۱$ یعنی $لا^{۵} - ۱ = ۰$ حل کرنی ہے اس مساوات کی تحلیل ان دو مساواتوں میں ہوسکتی ہے۔

$$\left\{\begin{array}{l} لا - ۱ = ۰ \\ لا^{۴} + لا^{۳} + لا^{۲} + لا + ۱ = ۰ \end{array}\right.$$

دوسری مساوات مساوات متکافی درجہ چہارم ہے اور اسکو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$\left(لا + \frac{۱}{لا}\right)^{۲} + \left(لا + \frac{۱}{لا}\right) - ۱ = ۰$$

اس مساوات کو بلحاظ $لا + \frac{۱}{لا}$ کے حل کرنے سے حاصل ہوا

$$لا + \frac{۱}{لا} = -\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$$

اور $$لا + \frac{۱}{لا} = -\frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}$$

ان قیمتوں سے دو معادلات درجہ دوم حاصل ہوتی ہیں یعنی

$$لا^{۲} + \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}\,لا + ۱ = ۰$$

اور $$لا^{۲} + \frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}\,لا + ۱ = ۰$$

ان مساواتوں سے لا کی ۴ قیمتیں حاصل ہوتی ہیں یعنی۔ $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۴} \pm خ \frac{\sqrt{۱۰-۲\sqrt{۵}}}{۴}$

$\frac{\sqrt{۵}-۱}{۴} \pm خ \frac{\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}}{۴}$ ۔

مندرجہ بالا چار قیمتیں اور ایک +۱ کے پانچویں جذر کی پانچ قیمتیں ہیں

مثال ۳۔ $(لا+ا)^۴ + (لا+ب)^۴ = ۱۷(ا-ب)^۴$

اس مساوات کو ہم بصورت ذیل لکھ سکتے ہیں یعنی

$(لا+ا)^۴ + (لا+ب)^۴ = ۱۷\{(لا+ا)-(لا+ب)\}^۴$

$(لا+ب)^۴$ پر تقسیم کرنے سے

$$\left(\frac{لا+ا}{لا+ب}\right)^۴ + ۱ = ۱۷\left\{\frac{لا+ا}{لا+ب} - ۱\right\}^۴$$

یا $ما^۴+۱ = ۱۷(ما-۱)^۴$ جہاں $ما = \frac{لا+ا}{لا+ب}$

یہ مساوات بلحاظ ما کے متکافی ہے اور اس طرح لکھی جا سکتی ہے

$$\left(ما+\frac{۱}{ما}\right)^۲ - \frac{۱۷}{۴}\left(ما+\frac{۱}{ما}\right) + \frac{۳۵}{۸} = ۰$$

اسلئے $ما + \frac{۱}{ما} = \frac{۵}{۲}$ یا $ما + \frac{۱}{ما} = \frac{۷}{۴}$

ان مساواتوں سے حاصل ہوا $ما = ۲$ یا $\frac{۱}{۲}$ اور $ما = \frac{۷ \pm خ\sqrt{۱۵}}{۸}$

پس ہمیں چار مساواتیں حاصل ہوئیں

$\frac{لا+ا}{لا+ب} = ۲$، $\frac{لا+ا}{لا+ب} = \frac{۱}{۲}$ اور $\frac{لا+ا}{لا+ب} = \frac{۷ \pm خ\sqrt{۱۵}}{۸}$

ان سے لا کی چار قیمتیں حاصل ہونگی۔ حقیقی قیمتیں $لا = ا - ۲ب$ اور $لا = ب - ۲ا$ ہیں۔

مثال ۴ - مساوات $۶لا^۴ - ۲۵لا^۳ + ۱۲لا^۲ + ۲۵لا + ۶ = ۰$ کو حل کرو

جواب $لا = ۲، -\frac{۱}{۲}، ۳، -\frac{۱}{۳}$

مثال ۵۔ حل کرو $لا^{۴} + لا^{۳} - ۴ لا^{۲} + لا + ۱ = ۰$

جواب $لا = ۱، ۱، \frac{-۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}$

۱۴۸۔ معاون مقادیر مجہول شامل کرنے سے ہم ایک مجہول کی مساوات اصم کے حل کو ہمیشہ ایک یا ایک سے زیادہ مجہولوں کی ناطق مساوات کے حل پر موقوف کرسکتے ہیں مثلاً اگر

$$\sqrt{لا + ا} + \sqrt{لا + ب} + \sqrt{لا + ج} = د$$

اور اگر ہم فرض کریں کہ $و = \sqrt{لا + ا}$، $ھ = \sqrt{لا + ب}$، $ے = \sqrt{لا + ج}$

تو ہمیں مفصلہ ذیل ناطق معادلات کا نظام حاصل ہوگا۔

$$و + ھ + ے = د، \quad و^{۲} = لا + ا، \quad ھ^{۲} = لا + ب$$

اور $ے^{۲} = لا + ج$

یہ کسی خاص مثال کے خاص حالات پر منحصر ہے کہ اس قسم کی تحویل مساوات کے حل کو آسان بنا دے۔ مثال ذیل میں یہ ترکیب کامیابی سے استعمال کی گئی ہے۔

مثال ۱۔ $(ا + لا)^{\frac{۱}{۴}} + (ا - لا)^{\frac{۱}{۴}} = ب$

ہم مساوات مفروضہ کو یوں لکھ سکتے ہیں

$$(ا + لا)^{\frac{۱}{۴}} + (ا - لا)^{\frac{۱}{۴}} = \frac{ب}{(۲ا)^{\frac{۱}{۴}}} \left\{ (ا + لا) + (ا - لا) \right\}^{\frac{۱}{۴}}$$

اس لئے $\left(\frac{ا + لا}{ا - لا}\right)^{\frac{۱}{۴}} + ۱ = \frac{ب}{(۲ا)^{\frac{۱}{۴}}} \left\{ \frac{ا + لا}{ا - لا} + ۱ \right\}^{\frac{۱}{۴}}$

اب فرض کرو کہ $ما = \left(\frac{ا + لا}{ا - لا}\right)^{\frac{۱}{۴}}$

تو معلوم ہوا کہ $\text{ما} + 1 = \left(\frac{\text{ب}}{2\,\text{ا}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\text{ما}^2 + 1\right)^{\frac{1}{4}}$

اس مساوات سے حاصل ہوا $2\,\text{ا}\,(\text{ما} + 1)^4 = \text{ب}^2 (\text{ما}^2 + 1)$ جو مساوات متکافی درجہ چہارم ہے۔ اور حسب معمول مساوات درجہ دوم کی وساطت سے حل ہو سکتی ہے۔

جب ما کی قیمت اس طرح حاصل ہو گئی تو مساوات $\frac{1 + \text{لا}}{1 - \text{لا}} = \text{ما}^4$ سے لا کی قیمت دریافت ہو سکتی ہے

۱۴۹۔ اب ہم چند متفرق سوالات ایسی معادلات کے حل کرینگے جو مساوات درجہ دوم کی صورت میں تحویل ہو سکتی ہیں اکثر اس قسم کی مساواتین طرح طرح کی حکمتوں اور ترکیبوں سے حل ہوتی ہیں اور ان پر طالب علم کا عبور کرنا مشق اور تجربہ پر موقوف ہے۔

مثال ۱۔ حل کرو۔

$$\sqrt{3\,\text{لا}^2 - 4\,\text{لا} + 34} + \sqrt{3\,\text{لا}^2 - 4\,\text{لا} - 11} = 9 \quad \ldots (1)$$

از روئے تطابق

$$(3\,\text{لا}^2 - 4\,\text{لا} + 34) - (3\,\text{لا}^2 - 4\,\text{لا} - 11) = 45 \quad \ldots (2)$$

(۲) کو (۱) پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوگا۔

$$\sqrt{3\,\text{لا}^2 - 4\,\text{لا} + 34} - \sqrt{3\,\text{لا}^2 - 4\,\text{لا} - 11} = 5 \quad \ldots (3)$$

اب (۲) مساوات متماثلہ ہے اسلئے لا کی تمام قیمتوں کے لئے صحیح ہے لیکن مساوات (۱) کو لا کی خاص خاص قیمتیں پورا کرتی ہیں اسلئے مساوات (۳) کو بھی صرف لا کی وہی خاص قیمتیں پورا کرینگی۔

(۱) اور (۳) کو جمع کرنے سے

$$\sqrt{3\,\text{لا}^2 - 4\,\text{لا} + 34} = 7$$

جس سے لا = ۳ یا − ۵/۴

مثال ۲- مساوات ۶ لا √لا − ۱۱ لا + ۶ √لا − ۱ = ۰ کو حل کرو

یہ مساوات صورت ذیل میں لکھی جا سکتی ہے

(لا − ۳ √لا)² + ۲ (لا − ۳ √لا) + ۱ = لا²

اسلئے لا − ۳ √لا + ۱ = ± لا

علامت مثبت لینے سے لا − ۳ √لا + ۱ = لا

∴ √لا = ۱/۳ اور لا = ۱/۹

علامت منفی لینے سے لا − ۳ √لا + ۱ = − لا

اس سے √لا = ۱ یا ۱/۲ اسلئے لا = ۱ یا ۱/۴

مثال ۳- فرض کرو کہ

(لا + ج + √(لا² − ج²)) / (لا + ج − √(لا² − ج²)) = ۹ (لا + ج) / (۸ ج) .... (۱)

ترکیب اور تفصیل نسبت سے

۲ (لا + ج) / (۲ √(لا² − ج²)) = (۹ لا + ۱۷ ج) / (۹ لا + ج)

طرفین کا مربع لو اور دائیں طرف کو مختصر کرو تو حاصل ہوگا-

(لا + ج) / (لا − ج) = (۹ لا + ۱۷ ج)² / (۹ لا + ج)² .... (۲)

دوبارہ ترکیب اور تفصیل نسبت سے

لا / ج = ((۹ لا + ۱۷ ج)² + (۹ لا + ج)²) / ((۹ لا + ۱۷ ج)² − (۹ لا + ج)²)

$$= \frac{(۹\text{لا} + ۱۷\text{ج})^{۲} + (۹\text{لا} + \text{ج})^{۲}}{۱۶\text{ج}\,(۱۸\text{لا} + ۱۸\text{ج})}$$

یعنی $۶۳\text{لا}^{۲} - ۱۸\text{لا}\,\text{ج} - ۱۴۵\text{ج}^{۲} = ۰$

جس سے $\text{لا} = \frac{۵\text{ج}}{۳}$ یا $\text{لا} = -\frac{۲۹\text{ج}}{۲۱}$

مثال ۴۔ فرض کرو کہ $\sqrt{\left(\frac{۳\text{ا}}{۴} - \text{لا}\right)} + \sqrt{(۳\text{ا}\,\text{لا} - \text{لا})} = \frac{۳\text{ا}}{۲}\sqrt{(۱-۴\text{لا})}$

عمل نقل سے

$$\frac{۳\text{ا}}{۲}\sqrt{(۱-۴\text{لا})} - \sqrt{\left(\frac{۳\text{ا}}{۴} - \text{لا}\right)} = \sqrt{(۳\text{ا}\,\text{لا} - \text{لا})}$$

طرفین کا مربع لینے سے

$$\frac{۹\text{ا}^{۲}}{۴}(۱-۴\text{لا}) - ۳\text{ا}\sqrt{(۱-۴\text{لا})}\sqrt{\left(\frac{۳\text{ا}}{۴} - \text{لا}\right)}$$
$$= ۳\text{ا}\,\text{لا} - \frac{۳\text{ا}}{۴} = -\frac{۳\text{ا}}{۴}(۱-۴\text{لا})$$

$\sqrt{(۱-۴\text{لا})}$ پر تقسیم کرنے سے

$$\frac{۹\text{ا}^{۲} + ۳\text{ا}}{۴}\sqrt{(۱-۴\text{لا})} = ۳\text{ا}\sqrt{\left(\frac{۳\text{ا}}{۴} - \text{لا}\right)}$$

مربع کرنے سے

$$(۱ + ۳\text{ا})^{۲}(۱-۴\text{لا}) = ۱۶\left(\frac{۳\text{ا}}{۴} - \text{لا}\right)$$

$$\therefore ۴\text{لا}\left\{(۱+۳\text{ا})^{۲} - ۴\right\} = (۱+۳\text{ا})^{۲} - ۱۲\text{ا} = (۱-۳\text{ا})^{۲}$$

$$\therefore ۴\text{لا}\,(۳\text{ا}+۳)(۳\text{ا}-۱) = (۳\text{ا}-۱)^{۲}$$

$$\therefore \text{لا} = \frac{۳\text{ا} - ۱}{۱۲(\text{ا}+۱)}$$

نیز جز ضربی $\sqrt{(۱-۴\text{لا})}$ سے جسکو ہم نے اثنائے عمل میں دور کیا تھا $\text{لا} = \frac{۱}{۴}$

اس مثال سے ظاہر ہے کہ ایسی مساواتوں میں مربع لینے سے پیشتر طالب علم کو مساوات کے دونوں طرف ارقام مساوات کو اس طرح ترتیب دینا چاہیئے کہ ناطق ہونے پر اکثر ارقام ایک دوسرے کو نابود کردیں - اس مثال میں اگر ہم طرفین کا اصلی حالت میں مربع لیتے تو کوئی رقم غائب نہ ہوتی لیکن مربع لینے سے پیشتر دو رقموں کو منتقل کرنے سے -لا طرفین سے خارج ہوگیا -

امثلہ نمبری ۱۵

معادلات ذیل کو حل کرو -

۱- $\text{لا}^{-۲} - ۲\,\text{لا}^{-۱} = ۸$ ۲- $۲\sqrt{\text{لا}} + ۲\,\text{لا}^{-\frac{۱}{۲}} = ۵$

۳- $۶\,\text{لا}^{\frac{۳}{۴}} = ۷\,\text{لا}^{\frac{۱}{۲}} - ۲\,\text{لا}^{\frac{۱}{۴}}$ ۴- $۳\,\text{لا}^{\frac{۲}{\text{ن}}} - \text{لا}^{\frac{۱}{\text{ن}}} - ۲ = ۰$

۵- $\text{لا}^{۴\text{م}} - \text{لا}^{۲\text{م}}(\text{ب}^{۲\text{م}} + \text{ج}^{۲\text{م}}) + \text{ب}^{۲\text{م}}\,\text{ج}^{۲\text{م}} = ۰$

۶- $(۹^{\text{لا}})^{\text{لا}} - ۲(۳^{\text{لا}})^{\text{لا}} \times ۳^{\text{لا}+۱} = ۳^{۲\text{لا}+۳}$

۷- $۲\,\text{لا}^{\frac{\text{ن}+\text{ق}}{۲\text{ن}\text{ق}}} = \frac{\text{ا}^۲ - \text{ب}^۲}{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲}\left(\text{لا}^{\frac{۱}{\text{ن}}} + \text{لا}^{\frac{۱}{\text{ق}}}\right)$

۸- $۵\sqrt{\frac{۳}{\text{لا}}} + ۷\sqrt{\frac{\text{لا}}{۳}} = ۲۲\frac{۲}{۳}$

۹- $\sqrt{\frac{\text{لا}}{\text{لا}-۱}} + \sqrt{\frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}}} = ۲\frac{۱}{۶}$

۱۰- $۵(۵^{\text{لا}} + ۵^{-\text{لا}}) = ۲۶$ ۱۱- $۲^{۲\text{لا}+۸} + ۱ = ۳۲ \times ۲^{\text{لا}}$

۱۲- $\sqrt{۲^{\text{لا}}} + \frac{۱}{\sqrt{۲^{\text{لا}}}} = ۲$

۱۳- $(لا-۷)(لا-۳)(لا+۵)(لا+۱) = ۱۶۸۰$

۱۴- $(لا+۹)(لا-۳)(لا-۷)(لا+۵) = ۳۸۵$

۱۵- $لا(۲لا+۱)(لا-۲)(۲لا-۳) = ۶۳$

۱۶- $(۲لا-۷)(لا^{۲}-۹)(۲لا+۵) = ۹۱$

۱۷- $(لا+۳)(لا+۸)(لا+۱۳)(لا+۱۸) = ۵۱$

۱۸- $۳لا^{۲} - ۴لا + \sqrt{۳لا^{۲} - ۴لا - ۶} = ۱۸$

۱۹- $۳لا^{۲} - ۷ + ۳\sqrt{۳لا^{۲} - ۱۶لا + ۲۱} = ۱۶لا$

۲۰- $\frac{۳لا-۲}{۲} + \sqrt{۲لا^{۲} - ۵لا + ۳} = \frac{(لا+۱)^{۲}}{۳}$

۲۱- $۷لا - \frac{\sqrt{۳لا^{۲} - ۸لا + ۱}}{لا} = \left(\frac{۸}{\sqrt{لا}} + \sqrt{لا}\right)^{۲}$

۲۲- $\sqrt{۲لا^{۲} + ۵لا - ۷} + \sqrt{۳(لا^{۲} - ۷لا + ۶)} - \sqrt{۷لا^{۲} - ۶لا - ۱} = ۰$

۲۳- $\sqrt{ا^{۲} + ۲الا - ۳لا^{۲}} - \sqrt{ا^{۲} + الا - ۶لا^{۲}} = \sqrt{۲ا^{۲} + ۳الا - ۹لا^{۲}}$

۲۴- $\sqrt{۲لا^{۲} - ۹لا + ۴} + ۳\sqrt{۲لا - ۱} = \sqrt{۲لا^{۲} + ۲۱لا - ۱۱}$

۲۵- $\sqrt{۲لا^{۲} + ۵لا - ۲} - \sqrt{۲لا^{۲} + ۵لا - ۹} = ۱$

۲۶- $\sqrt{۲لا^{۲} - ۷لا + ۱} - \sqrt{۲لا^{۲} - ۹لا + ۴} = ۱$

۲۷- $\sqrt{۳لا^{۲} - ۷لا - ۳۰} - \sqrt{۲لا^{۲} - ۷لا - ۵} = لا - ۵$

۲۸- $لا^{۴} + \frac{۸}{۹}لا^{۲} + ۱ = ۳لا^{۳} + ۳لا$

۲۹- $لا^{۴} + ۱ - ۳(لا^{۳} + لا) = ۲لا^{۲}$

۳۰- $۱۰(لا^{۴} + ۱) - ۶۳لا(لا^{۲} - ۱) + ۵۲لا^{۲} = ۰$

۳۱- $ا لا^{۴} + ب لا^{۳} + ب لا + ا = ۰$

۳۲- ا لا^۳ + ب لا^۲ - ب لا - ا = ۰

۳۳- ا لا^۴ + ب لا^۳ - ب لا - ا = ۰

۳۴- ا^۲ لا^۴ + ۲ ا ب لا^۳ + ب^۲ لا^۲ - ج^۲ = ۰

۳۵- ۱۲ لا^۵ + لا^۴ + ۱۳ لا^۳ - ۱۳ لا^۲ - لا - ۱۲ = ۰

۳۶- ثابت کرو کہ مساوات درجہ چہارم ا لا^۴ + ب لا^۳ + ج لا^۲ + د لا + ر = ۰ مساوات درجہ دوم کی وساطت سے حل ہوسکتی ہے بشرطیکہ

ب/۲ا = ۴ ا د/(۴ ا ج - ب^۲) اور ر/ا = د^۲/ب^۲

معادلات ذیل کو حل کرو

۳۷- (لا + √(۱۲ ا - لا))/(لا - √(۱۲ ا - لا)) = (√ا + ۱)/(√ا - ۱)

۳۸- (ا + ۲ لا + √(ا^۲ - ۴ لا^۲))/(ا + ۲ لا - √(ا^۲ - ۴ لا^۲)) = ۵ لا/ا

۳۹- √(لا^۲ + لا) + √(لا - ۱)/√(لا^۳ - لا) = ۵/۲

۴۰- (لا^۳ + ۱)/(لا^۲ - ۱) = لا + √(۶/لا)

۴۱- (ا + لا)^(۲/۳) + ۴ (ا - لا)^(۲/۳) = ۵ (ا^۲ - لا^۲)^(۱/۳)

۴۲- √(لا^۲ + ا لا - ۱) - √(لا^۲ + ب لا - ۱) = √ا - √ب

۱۵۰- اب ہم دو مقادیر مجہول کی ہمزاد مساواتوں پر غور کرینگے ان میں سے بعض مساوات درجہ دوم کی وساطت سے حل ہوسکتی ہیں

مثال ۱- حل کرو لا + ۲ + ما + ۳ + √((لا + ۲)(ما + ۳)) = ۳۹

(لا + ۲)^{۲} + (ما + ۳)^{۲} + (لا + ۲) (ما + ۳) = ۷۴۱

فرض کرو کہ لا + ۲ = و اور ما + ۳ = ھ تب

و + ھ + √وھ = ۳۹ .... (۱)

و^{۲} + ھ^{۲} + وھ = ۷۴۱ .... (۲)

اسلئے (۲) کو (۱) پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوگا -

و + ھ - √وھ = ۱۹ .... (۳)

(۱) اور (۳) سے و + ھ = ۲۹

اور √وھ = ۱۰ یا وھ = ۱۰۰

جس سے و = ۲۵ یا ۴ ، ھ = ۴ یا ۲۵

پس لا = ۲۳ یا ۲ ، ما = ۱ یا ۲۲

مثال ۲- حل کرو لا^{۴} + ما^{۴} = ۸۲ .... (۱)

لا - ما = ۲ .... (۲)

فرض کرو کہ لا = و + ھ اور ما = و - ھ

تب مساوات (۲) سے حاصل ہوگا ھ = ۱

ھ کی یہ قیمت مساوات (۱) میں مندرج کرنے سے

(و + ۱)^{۴} + (و - ۱)^{۴} = ۸۲

∴ ۲ (و^{۴} + ۶ و^{۲} + ۱) = ۸۲

یعنی و^{۴} + ۶ و^{۲} - ۴۰ = ۰

جس سے و^{۲} = ۴ یا -۱۰ اور و = ± ۲ یا ± √-۱۰

پس لا = ۳ ، -۱ ، ۱ ± √-۱۰

اور ما = ۱ ، -۳ ، -۱ ± √-۱۰

مثال ۳- حل کرو (۲لا + ما)/(۳لا − ما) − (لا − ما)/(لا + ما) = ۲ ۸/۱۵ ...... (۱)

۷لا + ۵ما = ۲۹ ...... (۲)

(۱) سے ۱۵(۲لا^۲ + ۳لاما + ما^۲ − ۳لا^۲ + ۴لاما − ما^۲) = ۳۸(۳لا^۲ + ۲لاما − ما^۲)

∴ ۱۲۹لا^۲ − ۲۹لاما − ۳۸ما^۲ = ۰

∴ (۳لا − ۲ما)(۴۳لا + ۱۹ما) = ۰

اس لئے ۳لا = ۲ما .... (۳)

یا ۴۳لا = −۱۹ما .... (۴)

مساوات (۳) سے لا/۲ = ما/۳ = (۷لا + ۵ما)/۲۹ = ۱ بموجب مساوات (۲)

∴ لا = ۲، ما = ۳

نیز (۴) سے لا/۱۹ = ما/−۴۳ = (۷لا + ۵ما)/−۸۲ = −۲۹/۸۲ بموجب مساوات (۲)

∴ لا = −۵۵۱/۸۲ ، ما = ۱۲۴۷/۸۲

اسلئے لا = ۲ ، ما = ۳ یا لا = −۵۵۱/۸۲ ، ما = ۱۲۴۷/۸۲

مثال ۴- حل کرو ۴لا^۳ + ۳لا^۲ما + ما^۳ = ۸

۲لا^۳ − ۲لا^۲ما + لاما^۲ = ۱

فرض کرو کہ ما = م لا، ان دو مساواتوں میں ما کی قیمت مندرج کرنے سے

لا^۳(۴ + ۳م + م^۳) = ۸ .... (۱)

لا^۳(۲ − ۲م + م^۲) = ۱ .... (۲)

∴ (۴ + ۳م + م^۳)/(۲ − ۲م + م^۲) = ۸

یعنی م^۳ − ۸م^۲ + ۱۹م − ۱۲ = ۰

یعنی (م − ۱)(م − ۳)(م − ۴) = ۰

اسلئے م = ۱ یا ۳ یا ۴

(ا) فرض کرو کہ م = ۱، مساوات (۱) یا (۲) میں م کی یہ قیمت مندرج کرو

مساوات (۲) سے لا^{3} = ۱ اس لئے لا = ۱، ω، ω^{2}

اور ما = م لا = لا = ۱، ω، ω^{2}

(ب) فرض کرو کہ م = ۳، مساوات (۲) میں یہ قیمت رکھنے سے

۵ لا^{3} = ۱ اس لئے لا = $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$

اور ما = م لا = ۳ لا = ۳ $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$

(ج) فرض کرو کہ م = ۴ تو

۱۰ لا^{3} = ۱ اس لئے لا = $\sqrt[3]{\frac{1}{10}}$

اور ما = م لا = ۴ لا = ۴ $\sqrt[3]{\frac{1}{10}}$

اسلئے مکمل حل یہ ہے

لا = ۱، $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$، $\sqrt[3]{\frac{1}{10}}$، ω، ω^{2}

ما = ۱، ۳ $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$، ۴ $\sqrt[3]{\frac{1}{10}}$، ω، ω^{2}

نوٹ ۔ اگر مساواتیں متجانس اور ایک ہی درجہ کی ہوں تو طریق بالا کی مدد سے حل ہمیشہ بآسانی حاصل ہو سکے گا۔

مثال ۵ ۔ حل کرو ۳۱ لا^{2} ما^{2} − ۷ ما^{4} − ۱۱۲ لا ما + ۶۴ = ۰ ...... (۱)

لا^{2} − ۷ لا ما + ۴ ما^{2} + ۸ = ۰ ...... (۲)

(۲) سے − ۸ = لا^{2} − ۷ لا ما + ۴ ما^{2}

اسکو مساوات (۱) میں مندرج کرنے سے

۳۱ لا^{2} ما^{2} − ۷ ما^{4} + ۱۴ لا ما (لا^{2} − ۷ لا ما + ۴ ما^{2}) + (لا^{2} − ۷ لا ما + ۴ ما^{2})^{2} = ۰

∴ ۳۱ لا^{2} ما^{2} − ۷ ما^{4} + (لا^{2} − ۷ لا ما + ۴ ما^{2})(۱۴ لا ما + لا^{2} − ۷ لا ما + ۴ ما^{2}) = ۰

$\therefore$ $۳۱\,\text{لا}^{۲}\text{ما}^{۲} - ۷\,\text{ما}^{۴} + (\text{لا}^{۲} + ۴\,\text{ما}^{۲})^{۲} - (۷\,\text{لا}\,\text{ما})^{۲} = ۰$

یعنی $\text{لا}^{۴} - ۱۰\,\text{لا}^{۲}\text{ما}^{۲} + ۹\,\text{ما}^{۴} = ۰$ .... (۳)

$\therefore$ $(\text{لا}^{۲} - \text{ما}^{۲})(\text{لا}^{۲} - ۹\,\text{ما}^{۲}) = ۰$

اسلئے $\text{لا} = \pm\,\text{ما}$ یا $\text{لا} = \pm\,۳\,\text{ما}$

ہر ایک مساوات کو بالترتیب (۲) میں مندرج کرنے سے

$\text{لا} = \text{ما} = \pm\,۲$

$\text{لا} = -\text{ما} = \pm\sqrt{-\frac{۲}{۳}}$

$\text{لا} = \pm\,۳\text{، } \text{ما} = \pm\,۱$

$\text{لا} = \pm\,۳\sqrt{-\frac{۴}{۱۷}}\text{، } \text{ما} = \mp\sqrt{-\frac{۴}{۱۷}}$

نوٹ - یہ بات قابل توجہ ہے کہ مساوات (۳) متجانس ہے اس جگہ ہم نے ایک مساوات کو دوسری مساوات کی مدد سے متجانس بنالیا ہے - یہ ترکیب نہایت کارآمد ہے اور ہندسہ تحلیلہ میں کثرت سے استعمال ہوتی ہے -

مثال ۶- حل کرو $(\text{لا}+\text{ما})^{\frac{۲}{۳}} + ۲\,(\text{لا}-\text{ما})^{\frac{۲}{۳}} = ۳(\text{لا}^{۲}-\text{ما}^{۲})^{\frac{۱}{۳}}$ .... (۱)

$۳\,\text{لا} - ۲\,\text{ما} = ۱۳$ .... (۲)

مساوات (۱) کی ہر ایک رقم کو $(\text{لا}^{۲}-\text{ما}^{۲})^{\frac{۱}{۳}}$ یا $(\text{لا}+\text{ما})^{\frac{۱}{۳}}(\text{لا}-\text{ما})^{\frac{۱}{۳}}$ پر تقسیم کرو تو حاصل ہوگا -

$$\left(\frac{\text{لا}+\text{ما}}{\text{لا}-\text{ما}}\right)^{\frac{۱}{۳}} + ۲\left(\frac{\text{لا}-\text{ما}}{\text{لا}+\text{ما}}\right)^{\frac{۱}{۳}} = ۳$$

یہ مساوات بلحاظ $\left(\frac{\text{لا}+\text{ما}}{\text{لا}-\text{ما}}\right)^{\frac{۱}{۳}}$ کے مساوات درجہ دوم ہے جس سے حاصل ہوگا $\left(\frac{\text{لا}+\text{ما}}{\text{لا}-\text{ما}}\right)^{\frac{۱}{۳}} = ۲$ یا ۱ جس سے $\frac{\text{لا}+\text{ما}}{\text{لا}-\text{ما}} = ۸$ یا ۱

∴ ۷لا = ۹ما یا ما = ۰

ان مساواتوں کو (۲) کے ساتھ ملا کر حل کرنے سے حاصل ہوگا

لا = ۹، ما = ۷ یا لا = $\frac{۱۳}{۳}$ ، ما = ۰

امثلہ نمبری ۱۶

معادلات ذیل کو حل کرو

۱- ۳لا - ۲ما = ۷
لا ما = ۲۰

۲- ۵لا - ما = ۳
ما^{۲} - ۶لا^{۲} = ۲۵

۳- ۴لا - ۳ما = ۱
۱۲لاما + ۱۳ما^{۲} = ۲۵

۴- لا^{۴} + لا^{۲}ما^{۲} + ما^{۴} = ۹۳۱
لا^{۲} - لاما + ما^{۲} = ۱۹

۵- لا^{۲} + لاما + ما^{۲} = ۸۴
لا - $\sqrt{\text{لاما}}$ + ما = ۶

۶- لا + $\sqrt{\text{لاما}}$ + ما = ۶۵
لا^{۲} + لاما + ما^{۲} = ۲۲۷۵

۷- لا + ما = ۷ + $\sqrt{\text{لاما}}$
لا^{۲} + ما^{۲} = ۱۳۳ - لاما

۸- ۳لا^{۲} - ۵ما^{۲} = ۷
۳لاما - ۴ما^{۲} = ۲

۹- ۵ما^{۲} - ۷لا^{۲} = ۱۷
۵لاما - ۶لا^{۲} = ۶

۱۰- ۳لا^{۲} + ۱۶۵ = ۱۶لاما
۷لاما + ۳ما^{۲} = ۱۳۲

۱۱- ۳لا^{۲} + لاما + ما^{۲} = ۱۵
۳۱لاما - ۳لا^{۲} - ۵ما^{۲} = ۴۵

۱۲- لا^{۲} + ما^{۲} - ۳ = ۳لاما
۲لا^{۲} - ۶ + ما^{۲} = ۰

۱۳- لا^{۴} + ما^{۴} = ۷۰۶
لا + ما = ۸

۱۴- لا^{۴} + ما^{۴} = ۲۷۲
لا - ما = ۲

۱۵- لا^{۵} - ما^{۵} = ۹۹۲ ، لا - ما = ۲

۱۶- لا + ۴/ما = ۱ ، ما + ۳/لا = ۲۵

۱۷- لا²/ما + ما²/لا = ۹/۲ ، ۳/(لا + ما) = ۱

۱۸- لا/۲ + ما/۵ = ۵ ، ۲/لا + ۵/ما = ۵/۶

۱۹- لا + ما = ۱۰۷۲ ، لا^(۱/۳) + ما^(۱/۳) = ۱۶

۲۰- لا ما^(۱/۲) + ما لا^(۱/۲) = ۲۰ ، لا^(۳/۲) + ما^(۳/۲) = ۶۵

۲۱- لا^(۱/۲) + ما^(۱/۲) = ۵ ، ۶(لا^(-۱/۲) + ما^(-۱/۲)) = ۵

۲۲- √(لا + ما) + √(لا − ما) = ۴ ، لا² − ما² = ۹

۲۳- ما + √(لا² − ۱) = ۲ ، √(لا + ۱) − √(لا − ۱) = √ما

۲۴- √(ما/لا) + √(لا/ما) = ۱۰/۳ ، لا + ما = ۱۰

۲۵- (√لا − √ما)/(√لا + √ما) + (√لا + √ما)/(√لا − √ما) = ۱۷/۴ ، لا² + ما² = ۷۰۶

۲۶- لا² + ۳ما² − ۱۵لا = ۱۰ (۳ما − ۸) ، لا ما = ۶

۲۷- لا² ما² + ۴۰۰ = ۴۱ لا ما ، ما² = ۵ لا ما − ۴ لا²

۲۸- ۴لا² + ۵ما = ۶ + ۲۰ لا ما − ۲۵ما² + ۲لا ، ۷لا − ۱۱ما = ۱۷

۲۹- ۹لا² + ۳۳لا − ۱۲ = ۱۲ لا ما − ۴ما² + ۲۲ما ، لا² − لا ما = ۱۸

۳۰- (لا² − ما²)(لا − ما) = ۱۶ لا ما ، (لا⁴ − ما⁴)(لا² − ما²) = ۶۴۰ لا² ما²

۳۱- ۲لا² − لا ما + ما² = ۲ما ، ۲لا² + ۴ لا ما = ۵ما

۳۲- (لا³ + ما³)/(لا + ما)² + (لا³ − ما³)/(لا − ما)² = ۴۳ لا/۸ ، ۵لا − ۷ما = ۴

۳۳- ما (ما^{۲} − ۳ لاما − لا^{۲}) + ۲۴ = ۰، لا(ما^{۲} − ۴ لاما + ۲ لا^{۲}) + ۸ = ۰

۳۴- ۳ لا^{۳} − ۸ لاما^{۲} + ما^{۳} + ۲۱ = ۰، لا^{۲} (ما − لا) = ۱

۳۵- ما^{۲} (۴ لا^{۲} − ۱۰۸) = لا (لا^{۳} − ۹ ما^{۳})، ۲ لا^{۲} + ۹ لاما + ما^{۲} = ۱۰۸

۳۶- ۶ لا^{۲} + لا^{۲} ما^{۲} + ۱۶ = ۲ لا (۱۲ لا + ما^{۳})، لا^{۲} + لاما − ما^{۲} = ۴

۳۷- لا (ا + لا) = ما (ب + ما)، الا + ب ما = (لا + ما)^{۲}

۳۸- لاما + اب = ۲ ا لا، لا^{۲} ما^{۲} + ا^{۲} ب^{۲} = ۲ ب^{۲} ما^{۲}

۳۹- $\frac{\text{لا} - \text{ا}}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ما} - \text{ب}}{\text{ب}^{۲}} = \frac{۱}{\text{لا} - \text{ب}} - \frac{۱}{\text{ما} - \text{ا}} - \frac{۱}{\text{ا} - \text{ب}} = ۰$

۴۰- ب لا^{۳} = ۱۰ ا^{۲} ب لا + ۳ ا^{۳} ما، ا ما^{۳} = ۱۰ ا ب^{۲} ما + ۳ ب^{۳} لا

۴۱- $۲\,\text{ا}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ما}} - \frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right) + ۴\,\text{ا}^{۲} = ۴\,\text{لا}^{۲} + \frac{\text{لاما}}{۲\,\text{ا}} - \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} = ۱$

۱۵۱- جن مساواتوں میں تین یا تین سے زیادہ مقادیر مجہول شامل ہوں وہ صرف خاص صورتوں میں حل ہو سکتی ہیں ہم اس جگہ اُنکے حل کرنے کی چند مشہور ترکیبوں پر غور کرینگے -

مثال ۱- حل کرو لا + ما + ی = ۱۳ .... (۱)

لا^{۲} + ما^{۲} + ی^{۲} = ۶۵ .... (۲)

لا ما = ۱۰ .... (۳)

(۲) اور (۳) سے (لا + ما)^{۲} + ی^{۲} = ۸۵

لا + ما کی جگہ و رکھنے سے یہ مساوات ہو جائے گی

و^{۲} + ی^{۲} = ۸۵ نیز (۱) سے و + ی = ۱۳

جس سے حاصل ہوگا و = ۷ یا ۶ ، ی = ۶ یا ۷

پس
{ لا + ما = ۷ ، لا ما = ۱۰ } اور { لا + ما = ۶ ، لا ما = ۱۰ }

اسلئے
{ لا = ۵ یا ۲ ، ما = ۲ یا ۵ ، ی = ۶ } یا { لا = ۳ ± $\sqrt{-1}$ ، ما = ۳ ∓ $\sqrt{-1}$ ، ی = ۷ }

مثال ۲- حل کرو (لا + ما)(لا + ی) = ۳۰

(ما + ی)(ما + لا) = ۱۵

(ی + لا)(ی + ما) = ۱۸

ما + ی، ی + لا، لا + ما کی جگہ بالترتیب و، ھ، ے، لکھنے سے

ھ ے = ۳۰، ے و = ۱۵، و ھ = ۱۸ .... (۱)

ان مساواتوں کو اکٹھا ضرب دینے سے

و^2 ھ^2 ے^2 = ۳۰ × ۱۵ × ۱۸ = ۱۵^2 × ۶^2

∴ و ھ ے = ± ۹۰

اس نتیجے کو معادلات (۱) میں سے کسی ایک کے ساتھ ملانے سے

و = ۳، ھ = ۶، ے = ۵ یا و = -۳، ھ = -۶، ے = -۵

∴ { ما + ی = ۳ ، ی + لا = ۶ ، لا + ما = ۵ } یا { ما + ی = -۳ ، ی + لا = -۶ ، لا + ما = -۵ }

جس سے لا = ۴، ما = ۱، ی = ۲ یا لا = -۴، ما = -۱، ی = -۲

مثال ۳- حل کرو ما^2 + ما ی + ی^2 = ۴۹ .... (۱)

ی^2 + ی لا + لا^2 = ۱۹ .... (۲)

لا^{2} + لا ما + ما^{2} = ۳۹ .... (۳)

(۲) کو (۱) سے تفریق کرنے سے

ما^{2} − لا^{2} + ی (ما − لا) = ۳۰

یعنی (ما − لا)(لا + ما + ی) = ۳۰ .... (۴)

اسی طرح (۱) اور (۳) سے

(ی − لا)(لا + ما + ی) = ۱۰ .... (۵)

اسلئے (۴) اور (۵) سے بذریعہ عمل تقسیم

(ما − لا) / (ی − لا) = ۳

جس سے ما = ۳ ی − ۲ لا

مساوات (۳) میں ما کی یہ قیمت مندرج کرنے سے

لا^{2} − ۳ لا ی + ۳ ی^{2} = ۱۳

مساوات (۲) سے لا^{2} + لا ی + ی^{2} = ۱۹

ان متجانس مساواتوں کو حل کرنے سے حاصل ہوگا

لا = ± ۲، ی = ± ۳ اور اسلئے ما = ± ۵

یا لا = ± ۱۱/√۷ ، ی = ± ۱/√۷ اور اسلئے ما = ∓ ۱۹/√۷

مثال ۴ ـ حل کرو لا^{2} − ما ی = ا^{2}، ما^{2} − ی لا = ب^{2}، ی^{2} − لا ما = ج^{2}

ان مساوات کو ما، ی، لا سے بالترتیب ضرب دینے اور جمع کرنے سے حاصل ہوگا ـ

ج^{2} لا + ا^{2} ما + ب^{2} ی = ۰ .... (۱)

ان مساواتوں کو ی، لا، ما سے بالترتیب ضرب دینے اور جمع کرنے

سے حاصل ہوگا۔

ب^2 لا + ج^2 ما + ا^2 ی = ۰ .... (۲)

(۱) اور (۲) سے بذریعہ ضرب چلیپائی

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}^4-\text{ب}^2\text{ج}^2}=\frac{\text{ما}}{\text{ب}^4-\text{ج}^2\text{ا}^2}=\frac{\text{ی}}{\text{ج}^4-\text{ا}^2\text{ب}^2}=\text{ک}\ (\text{فرض کرو})$$

دی ہوئی مساواتوں میں یہ قیمتیں مندرج کرنے سے

$$\text{ک}^2(\text{ا}^6+\text{ب}^6+\text{ج}^6-3\,\text{ا}^2\text{ب}^2\text{ج}^2)=1$$

$$\therefore \frac{\text{لا}}{\text{ا}^4-\text{ب}^2\text{ج}^2}=\frac{\text{ما}}{\text{ب}^4-\text{ج}^2\text{ا}^2}=\frac{\text{ی}}{\text{ج}^4-\text{ا}^2\text{ب}^2}=\pm\frac{1}{\sqrt{\text{ا}^6+\text{ب}^6+\text{ج}^6-3\,\text{ا}^2\text{ب}^2\text{ج}^2}}$$

امثلہ نمبری ۱۷

معادلات ذیل کو حل کرو

۱۔ ۹لا + ما − ۸ی = ۰
۴لا − ۸ما + ۷ی = ۰
مای + یلا + لاما = ۴۷

۲۔ ۳لا + ما − ۲ی = ۰
۴لا − ما − ۳ی = ۰
لا^3 + ما^3 + ی^3 = ۴۶۷

۳۔ لا − ما − ی = ۲
لا^2 + ما^2 − ی^2 = ۲۲
لاما = ۵

۴۔ لا + ۲ما − ی = ۱۱
لا^2 − ۴ما^2 + ی^2 = ۳۷
لای = ۲۴

۵۔ لا^2 + ما^2 − ی^2 = ۲۱
۳لای + ۳مای − ۲لاما = ۱۸
لا + ما − ی = ۵

۶۔ لا^2 + لاما + لای = ۱۸
ما^2 + مای + مالا + ۱۲ = ۰
ی^2 + یلا + یما = ۳۰

۷- لا^{۲} + ۲ لاما + ۳ لای = ۵۰ ۸- (ما - ی)(ی + لا) = ۲۲

۲ ما^{۲} + ۳ مای + مالا = ۱۰ (ی + لا)(لا - ما) = ۳۳

۳ ی^{۲} + ی لا + ۲ ی ما = ۱۰ (لا - ما)(ما - ی) = ۶

۹- لا^{۲} ما^{۲} ی^{۲} و = ۱۲، لا^{۲} ما^{۲} ی و^{۲} = ۸، لا^{۲} ما ی^{۲} و^{۲} = ۱، ۳ لا ما^{۲} ی^{۲} و^{۲} = ۴

۱۰- لا^{۲} ما^{۲} ی = ۱۲، لا^{۳} ما ی^{۳} = ۵۴، لا^{۷} ما^{۳} ی^{۲} = ۷۲

۱۱- لاما + لا + ما = ۲۳ ۱۲- ۲ لاما - ۴ لا + ما = ۱۷

لای + لا + ی = ۴۱ ۳ مای + ما - ۶ ی = ۵۲

مای + ما + ی = ۲۷ ۶ لای + ۳ ی + ۲ لا = ۲۹

۱۳- لای + ما = ۷ ی، مای + لا = ۸ ی، لا + ما + ی = ۱۲

۱۴- لا^{۳} + ما^{۳} + ی^{۳} = ل^{۳}، لا^{۲} + ما^{۲} + ی^{۲} = ل^{۲}، لا + ما + ی = ل

۱۵- لا^{۲} + ما^{۲} + ی^{۲} = مای + ی لا + لاما = ل^{۲}، ۳ لا - ما + ی = ل $\sqrt{۳}$

۱۶- لا^{۲} + ما^{۲} + ی^{۲} = ۲۱ ل^{۲}، مای + ی لا - لاما = ۶ ل^{۲}،

۳ لا + ما - ۲ ی = ۳ ل

باب یازدہم

ترتیب و اجتماع

۱۵۲- اگر متعدد اشیا میں سے چند یا سب اشیا لیکر انہیں مختلف طریقوں سے سلسلہ وار رکھا جائے تو ایسے ہر ایک طریقے کو ترتیب اشیا کہتے ہیں مثلاً کل ترتیبیں جو حروف ا، ب، ج، د میں سے دو دو حروف اکٹھے لینے سے بن سکتی ہیں ۱۲ ہیں یعنی

اب ، اج ، اد ، بج، بد ، جد

با ، جا ، دا ، جب ، دب ، دج

ان میں سے ہر ایک دو دو حروف کی ایک مختلف ترتیب ہے

اگر انہی چار حروف میں سے تین تین حروف کی مختلف ترتیبیں لگائیں تو وہ تعداد میں ۲۴ ہوں گی۔

ابج	ابد	اجد	بجد
اجب	ادب	ادج	بدج
بجا	بدا	جدا	جدب
باج	باد	جاد	جبد
جاب	داب	داج	دبج
جبا	دبا	دجا	دجب

اگر سب حروف کی اکٹھی ترتیبیں لگائیں تو وہ مفصلہ ذیل ہونگی۔

ا ب ج د	ب ج د ا	ج د ا ب	د ا ب ج
ا ب د ج	ب ج ا د	ج د ب ا	د ا ج ب
ا ج ب د	ب د ج ا	ج ا د ب	د ب ا ج
ا ج د ب	ب د ا ج	ج ا ب د	د ب ج ا
ا د ب ج	ب ا ج د	ج ب د ا	د ج ا ب
ا د ج ب	ب ا د ج	ج ب ا د	د ج ب ا

جس سے ظاہر ہے کہ چار حروف کی ۲۴ مختلف ترتیبیں ہیں جن میں سے ہر ایک ترتیب میں چاروں حروف اکٹھے شامل ہوتے ہیں

تعریف ہر ایک ایسا مجموعہ جو متعدد اشیا میں سے چند یا سب اشیا اکٹھا کرنے سے بن سکتا ہے اور جس میں ترتیب اشیا ملحوظ نہیں رکھی جاتی **اجتماع** اشیا کہلاتا ہے۔

مثلاً چار حروف ا، ب، ج، د میں سے کل اجتماع جو ایک ایک حرف، دو دو حروف، تین تین حروف اور چار چار حروف اکٹھے لینے سے بن سکتے ہیں مفصلہ ذیل ہیں۔

کل اجتماع ایک ایک حرف لینے سے ا، ب، ج، د تعداد میں ۴ ہیں

کل اجتماع دو دو حروف اکٹھے لینے سے { اب، اج، اد / ب ج، ب د، ج د } ″ ″ ″ ۶ ″

″ تین تین ″ ″ اب ج، اج د، اب د، ب ج د ″ ″ ۴ ″ ″

″ چار چار ″ ″ اب ج د ″ ″ ۱ ہے

اگر ن اشیا میں سے ر، ر (ر سے ر سے) اشیا لیکر اُن کی مختلف

ترتیبیں لگائی جائیں تو اپنی آئندہ سہولت کے لئے ہم ان مختلف ترتیبوں کی تعداد کو ${}_{\text{ن}}\text{ت}_{\text{ر}}$ سے تعبیر کریں گے اسی طرح سے اگر ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے مختلف اجتماع بنائے جائیں تو ایسے اجتماعوں کی تعداد کو ہم ${}_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}}$ سے تعبیر کریں گے۔

اس طریق کتابت کے مطابق نتائج مندرجہ بالا اختصاراً یوں لکھے جا سکتے ہیں۔

$${}_{4}\text{ت}_{2} = 12 \text{،} \quad {}_{4}\text{ت}_{3} = 24 \text{،} \quad {}_{4}\text{ت}_{4} = 24$$

$${}_{4}\text{ج}_{1} = 4 \text{،} \quad {}_{4}\text{ج}_{2} = 6 \text{،} \quad {}_{4}\text{ج}_{3} = 4$$

نیز ${}_{4}\text{ج}_{4} = 1$ چونکہ چار حروف میں سے چار چار حروف کا ایک ہی اجتماع بن سکتا ہے۔

ہمیں معلوم ہے کہ ۴ حروف میں سے تین تین حروف کے اجتماع تعداد میں چار ہیں یعنی

ا ب ج، ا ج د، ا ب د، ب ج د

اب ان میں سے ہر ایک مجموعہ مثلاً ا ب ج چھ مختلف طرح سے ترتیب دیا جا سکتا ہے یعنی

ا ب ج   ب ج ا   ج ا ب

ا ج ب   ب ا ج   ج ب ا

اسی طرح سے ا ج د، ا ب د، ب ج د میں سے ہر ایک اجتماع چھ مختلف طرح سے ترتیب دیا جا سکتا ہے۔ پس معلوم ہوا کہ چار اشیا میں سے تین تین اشیا کی ترتیبیں اُن کی تعداد اجتماع کی ۶ گنی ہوتی ہیں

یعنی $ت_۴ = ۶ × ج = ۲۴$

ترتیب و اجتماع کی بحث میں عام طور پہ اس بات کا یاد رکھنا مفید ہوگا کہ مختلف اجتماع بنانے میں ہمارا تعلق صرف اُس تعداد اشیا سے ہوتا ہے جو کسی ایک انتخاب میں موجود ہو مگر ترتیب لگانے میں تدریج اشیا کا خاص لحاظ رکھنا پڑتا ہے مثلاً اب اور با دو مختلف اجتماع نہیں ہیں مگر دو مختلف ترتیبیں ضرور ہیں۔

نوٹ ترتیب و اجتماع کے متعلق ایک اور مختصر طریق کتابت مندرجہ ذیل ہے اس کو بعض اوقات ہم اختصار کی خاطر استعمال کریں گے۔

"ن اشیا کی ر ترتیبوں" اور "ن اشیا کے ر اجتماعوں" سے آیندہ ہمارا یہ مطلب ہوگا کہ ن اشیا میں سے ر ر اشیا لیکر ان کی مختلف ترتیبیں اور اجتماع بنائے گئے ہیں۔

۱۵۳ - ضروری - فرض کرو کہ ایک کام ۲ طرح سے ہوسکتا ہے اور ایک اور کام ۳ طرح سے ہوسکتا ہے تو ظاہر ہے کہ دونوں کام اکٹھے ۲ × ۳ مختلف طرح سے ہو سکتے ہیں بشرطیکہ ان میں کچھ لگاؤ یا تعلق ہو۔ اور اس کی وجہ یہ ہے کہ پہلے کام کرنے کا ہر ایک طریقہ دوسرے کام کے تینوں طریقوں میں سے کسی ایک کے ساتھ اکٹھا کیا جا سکتا ہے یا منسلک ہوسکتا ہے اور بالعموم اگر کسی ایک کام کرنے کے لا طریقے ہوں اور دوسرے کام کرنے کے ما تو دونوں کام ایک ساتھ کرنیکے کل طریقے لاما ہونگے۔

تمثیلاً فرض کرو کہ کسی ٹوکرے میں سے ایک نارنگی نکالنے کے لا طریقے ہیں اور سیب نکالنے کے ما تو دونوں نارنگی اور سیب نکالنے

کل طریقے ۱۸ ہونگے۔

مثال ۱۔ دس جہاز بمبئی اور کراچی کے درمیان آتے جاتے ہیں معلوم کرو کہ کتنی طرح سے ایک مسافر بمبئی سے کراچی جا سکتا ہے اور مختلف جہاز سے آسکتا ہے۔

پہلے سفر کے ۱۰ طریقے ہیں اور اِن میں سے ہر ایک کے مقابل واپس آنے کے ۹ طریقے ہیں (کیونکہ مسافر جس جہاز سے جائے اُسی سے واپس نہیں آسکتا۔)

اسلئے آنے جانے کے مختلف طریقے = ۱۰ × ۹ = ۹۰

یہ اصول اُس صورت پر بھی حاوی ہے جہاں دو سے زیادہ عمل ہوں اور اُن میں سے ہر ایک متعدد طریقوں سے ہو سکتا ہو۔

مثال ۲۔ کسی شہر میں ۳ مسافر آئے وہاں چار مسافر خانے تھے اگر اُن میں سے ہر ایک الگ الگ مسافر خانے میں رہے تو معلوم کرو کہ کتنے مختلف طریقوں سے وہ مختلف مسافر خانوں میں قیام کر سکتے ہیں؟

پہلا مسافر چار مسافر خانوں میں سے کسی ایک کو منتخب کر سکتا ہے اور جب اُس نے اپنا انتخاب کسی ایک طریقے سے کر لیا تو دوسرا مسافر باقی تین میں سے کسی ایک کو منتخب کر سکتا ہے معلوم ہوا کہ پہلے دو مسافر ۴ × ۳ طریقوں سے اپنی جائے قیام کا انتخاب کر سکتے ہیں اور ان میں سے کسی ایک انتخاب کے ساتھ تیسرا مسافر دو طرح سے اپنا مسافر خانہ منتخب کر سکتا ہے اسلئے مطلوبہ طریقے = ۴ × ۳ × ۲ = ۲۴

۱۵۴۔ تین حروف ا، ب، ج کی مختلف ترتیبوں کو بالتفصیل لکھنے کے بغیر ہم اُن کی تعداد اس طرح دریافت کر سکتے ہیں

ایسا خیال کرو کہ ہمیں تین خالی مقامات تین حروف ا ، ب ، ج سے پُر کرنے ہیں۔

پہلا مقام تین مختلف طریقوں سے پُر ہو سکتا ہے یعنی ا سے یا ب سے یا ج سے۔

جب ایک مقام پُر ہو گیا تو دوسرے مقام کو پُر کرنے کے لئے ۲ حروف باقی ہونگے کیونکہ اگر ا مقام اول کے لئے منتخب کیا گیا ہو تو ب اور ج ابھی باقی ہونگے اور اگر ب مقام اول کیلئے مخصوص کیا گیا ہو تو ا اور ج باقی ہونگے۔ اس سے معلوم ہوا کہ دوسرے مقام کو پُر کرنے کے ۲ طریقے ہیں اِسلئے پہلے دو مقامات پُر کرنے کے طریقے ۳ × ۲ ہوئے۔

اب چونکہ صرف ایک حرف باقی ہے اسلئے تیسرے مقام کو پُر کرنے کا صرف ایک طریقہ ہے۔

پس معلوم ہوا کہ تینوں مقامات پُر کرنے کے کل طریقے ۳ × ۲ × ۱ ہیں یعنی تین اشیا میں سے سب اشیا کی اکٹھی ترتیبیں ۳ × ۲ × ۱ ہیں۔

اسی طرح سے اگر ۴ اشیا کی اکٹھی ترتیبیں لگانی منظور ہوں تو پہلا مقام ۴ طرح سے پُر ہو سکتا ہے اس کے بعد انتخاب کے لئے ۳ اشیا باقی رہینگی اِس لئے دوسرا مقام ۳ طرح سے پُر ہو سکتا ہے معلوم ہوا کہ پہلے دو مقام ۴ × ۳ طرح سے پُر ہو سکتے ہیں تیسرے مقام کو پُر کرنے کے ۲ طریقے ہونگے اسلئے پہلے تین مقام ۴ × ۳ × ۲ طرح سے پُر ہو سکتے ہیں۔ اب چونکہ صرف ایک شئے باقی ہے

اسلئے آخری مقام کے پُر کرنیکا صرف ایک طریقہ ہے۔ پس معلوم ہوا کہ چاروں مقامات پُر کرنے کے کل طریقے ۴ × ۳ × ۲ × ۱ یعنی ۲۴ ہیں

۱۵۵ - ب ت کی قیمت دریافت کرو

ایسا خیال کرو کہ ہمیں دو مقامات پُر کرنے ہیں۔

پہلا مقام ۵ اشیا میں سے کسی ایک سے پُر ہو سکتا ہے اسلئے ایسا کرنے کے کل ۵ طریقے ہیں

دوسرے مقام کو پُر کرنے کے لئے ہمارے پاس ۴ اشیا ہیں اسلئے دوسرا مقام ۴ طرح سے پُر ہو سکتا ہے پس معلوم ہوا کہ دونوں مقامات پُر کرنے کے کل طریقے ۵ × ۴ یعنی ۲۰ ہیں۔

اس قسم کا سوال گزشتہ سوال سے مختلف ہے کیونکہ یہاں ۵ اشیا میں سے صرف دو دو کی مختلف ترتیبیں مطلوب ہیں

۱۵۶ - اگر ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کی ترتیبیں لگائی جائیں تو اُن کی تعداد دریافت کرو یا دوسرے الفاظ میں ن اشیا کی ر، ر ترتیبوں کی تعداد دریافت کرو۔

ن اشیا کو ن حروف ا، ب، ج وغیرہ سے تعبیر کرو اور بموجب سابق فرض کرو کہ ر خالی مقامات ہیں اور ان میں سے ہر ایک مقام کو ایک حرف سے پُر کرنا ہے۔

پہلا مقام ن طریقوں سے پُر ہو سکتا ہے کیونکہ ہم ن مختلف حروف میں سے کوئی سا ایک منتخب کر سکتے ہیں اور وہ پہلے مقام میں رکھا جا سکتا ہے۔ جب یہ کسی ایک طریقے سے پُر ہو گیا تو دوسرا مقام ن-۱ طریقوں سے پُر ہو سکتا ہے اور چونکہ پہلے مقام کے پُر کرنے کا

ہر ایک طریقہ دوسرے مقام کے پُر کرنے کے ہر ایک طریقے سے منسلک ہو سکتا ہے اسلیئے پہلے دو مقامات پُر کرنے کے کل طریقے یعنی $_{ن}ت_{۲}$ = ن (ن-۱)، جب پہلے دو مقام پُر ہو گئے تو تیسرا مقام ن-۲ طریقوں سے پُر ہو سکتا ہے اور دلیل سابق کے موافق پہلے تین مقامات پُر کرنے کے کل طریقے یعنی $_{ن}ت_{۳}$ = ن (ن-۱)(ن-۲)

اسی طرح عمل کو جاری رکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ ہر ایک نئے مقام کے پُر ہونے پر حاصل ضرب میں ایک نیا جز ضربی داخل ہوتا ہے اور کسی خاص منزل پر اجزاء ضربی کی تعداد وہی ہے جو پُر کردہ مقامات کی۔ اس سے ثابت ہوا کہ ر مقامات پُر کرنے کے کل طریقے یعنی

$_{ن}ت_{ر}$ = ن (ن-۱)(ن-۲)...... ر اجزاء ضربی تک

اور ر واں جز ضربی = ن-(ر-۱) = ن-ر+۱

اسلیئے ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کی ترتیبیں یعنی

$_{ن}ت_{ر}$ = ن (ن-۱)(ن-۲)......(ن-ر+۱)

نتیجہ صریح۔ اگر ن اشیا میں سے سب اشیا کی اکٹھی ترتیبیں لگائی جائیں تو ان کی تعداد = ن (ن-۱)(ن-۲)...... ن اجزاء ضربی تک

= ن (ن-۱)(ن-۲)......۳×۲×۱

اس حاصل ضرب کو (یعنی ایک سے لیکر ن تک تمام اعداد صحیح کے حاصل ضرب کو) لنؔ یا ن! سے تعبیر کرتے ہیں اسے ہم "حاصل ضربی ن" یا اختصاراً "ضربی ن" کہیں گے پس معلوم ہوا کہ

$_{ن}ت_{ن}$ = ن (ن-۱)(ن-۲)...... ۲×۱ = لنؔ یا ن!

نوٹ۔ عددی مثالیں حل کرنے میں اس بات کا خیال رکھنا مفید ہوگا کہ علامت

${}_{\text{ن}}\text{ت}_{\text{ر}}$ میں حرف آخر (یعنی ر) سے حاصل ضرب کے اجزاء ضربی کی تعداد تعبیر ہوتی ہے۔

۱۵۷۔ ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کی ترتیبوں کی تعداد طریق ذیل سے بھی حاصل ہوسکتی ہے۔

فرض کرو کہ ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کی کل ترتیبیں ${}_{\text{ن}}\text{ت}_{\text{ر}}$ سے تعبیر ہوتی ہیں۔

فرض کرو کہ ہم ن اشیا میں سے ر-۱، ر-۱ اشیا کی کل ترتیبیں لگاتے ہیں ان کی تعداد ${}_{\text{ن}}\text{ت}_{\text{ر-۱}}$ ہوگی

اب اِن میں سے ہر ایک ترتیب کے ساتھ باقی ن-ر+۱ اشیا میں سے ہر ایک شے کو باری باری رکھو ہر دفعہ ایسا کرنے سے ہمیں ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کی ایک ترتیب حاصل ہوگی اور اس لئے ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کی کل ترتیبیں ${}_{\text{ن}}\text{ت}_{\text{ر-۱}} \times (\text{ن-ر+۱})$ ہونگی

یعنی $${}_{\text{ن}}\text{ت}_{\text{ر}} = {}_{\text{ن}}\text{ت}_{\text{ر-۱}} \times (\text{ن-ر+۱})$$

ر کیجگہ ر-۱ لکھنے سے $${}_{\text{ن}}\text{ت}_{\text{ر-۱}} = {}_{\text{ن}}\text{ت}_{\text{ر-۲}} \times (\text{ن-ر+۲})$$

اسی طرح سے $${}_{\text{ن}}\text{ت}_{\text{ر-۲}} = {}_{\text{ن}}\text{ت}_{\text{ر-۳}} \times (\text{ن-ر+۳})$$

....

$${}_{\text{ن}}\text{ت}_{\text{۳}} = {}_{\text{ن}}\text{ت}_{\text{۲}} \times (\text{ن-۲})$$

$${}_{\text{ن}}\text{ت}_{\text{۲}} = {}_{\text{ن}}\text{ت}_{\text{۱}} \times (\text{ن-۱})$$

$${}_{\text{ن}}\text{ت}_{\text{۱}} = \text{ن}$$

عمودی سطروں کو اکٹھا ضرب دو اور متماثل ارقام کو طرفین سے خارج کرو تو حاصل ہوگا۔

$پ_ر = ن(ن-۱)(ن-۲)\cdots\cdots(ن-ر+۱)$

نتیجہ صریح۔ $پ_ر = \frac{|\underline{ن}}{|\underline{ن-ر}}$

کیونکہ $پ_ر = ن(ن-۱)(ن-۲)\cdots\cdots(ن-ر+۱)$

$$= \frac{ن(ن-۱)\cdots\cdots(ن-ر+۱)(ن-ر)\cdots\cdots ۳\times۲\times۱}{(ن-ر)\cdots\cdots ۲\times۱}$$

$$= \frac{|\underline{ن}}{|\underline{ن-ر}}$$

مثال ۱۔ $پ_۴^{۶}$ کی قیمت دریافت کرو

قیمت مطلوبہ = چھ اشیا میں سے چار چار اشیا کی ترتیبوں کی تعداد

$= ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ = ۳۶۰$

مثال ۲۔ نو ہندسے ۱، ۲، ۳، ....۹ ہیں ان میں سے چھ چھ ہندسے لینے سے کتنے مختلف اعداد بن سکتے ہیں؟۔

یہاں نو مختلف اشیا ہیں ان میں سے چھ چھ کی مختلف ترتیبیں معلوم کرنی ہیں اسلئے اعداد مطلوبہ کی تعداد $= پ_۶^{۹}$

$= ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴$

$= ۶۰۴۸۰$

مثال ۳۔ کل ۷ گھنٹوں میں سے چار چار گھنٹے کتنی مختلف طرح سے بج سکتے ہیں اور ۷ گھنٹے سب کے سب اکٹھے کتنی مختلف طرح سے بج سکتے ہیں۔؟

چونکہ مختلف گھنٹوں کے بجنے سے مختلف آوازیں پیدا ہوتی ہیں

اسلیئے اگر انہیں مختلف ترتیبوں سے بجایا جائے تو ہر دفعہ ایک مختلف اور نئی آواز پیدا ہوگی (مثلاً اگر دو گھنٹوں ا اور ب کو بترتیب اب بجایا جائے تو اس طرح سے جو مرکب آواز پیدا ہوگی وہ اُن کو ترتیب ب ا میں بجانے سے مختلف ہوگی)

پس ۷ گھنٹوں میں سے چار چار گھنٹوں کے بجنے کے مختلف اطوار = ہ‍ت‌۴ = ۷×۶×۵×۴ = ۸۴۰

اور ۷ گھنٹوں کے اکٹھے بجنے کے کل اطوار = ہ‍ت‌۷

= ۱×۲×۳×۴×۵×۶×۷

= ۵۰۴۰

مثال ۴۔ چھ ہندسوں ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ میں سے کل کتنے اعداد بن سکتے ہیں جو ۳۰۰۰ اور ۴۰۰۰ کے درمیان واقع ہوں اور ۵ پر تقسیم ہو سکیں۔

چونکہ ہر ایک عدد ۳۰۰۰ اور ۴۰۰۰ کے درمیان واقع ہوتا ہے اسلیئے ظاہر ہے کہ وہ ۳ سے شروع ہوتا ہے اور اس میں ۴ ہندسے شامل ہیں نیز چونکہ وہ ۵ پر پورا تقسیم ہوتا ہے اسلیئے اکائی کی جگہ ۵ ہونا چاہیئے (کیونکہ دیئے ہوئے ہندسوں میں صفر نہیں ہے۔)

پس معلوم ہوا کہ اعداد مجوزہ ایسے ہیں کہ ان میں اول اور آخر کے ہندسے معین ہیں صرف دو درمیانی مقامات کو ہندسوں ۴، ۶، ۷، ۸ سے پُر کرنا ہے اور ایسا کرنے کے کل طریقے = ہ‍ت‌۲ = ۱۲

مثال ۵۔ لفظ "متصاعدہ" کے حروف سے اور کتنے الفاظ بن سکتے ہیں؟

یہاں کل ۷ حروف ہیں یعنی م، ت، ص، ا، ع، د، ہ

اب چونکہ حروف کی مختلف ترتیبوں سے مختلف الفاظ پیدا ہوتے ہیں اسلئے مندرجہ بالا حروف سے جو الفاظ بن سکتے ہیں اُن کی تعداد = $\underline{|7}$ = ۷ × ۶ × ۵ × ۴ × ۳ × ۲ × ۱

= ۵۰۴۰

اسلئے تعداد مطلوبہ = ۵۰۴۰ - ۱ = ۵۰۳۹

اب فرض کرو کہ ایسے اعداد کی تعداد مطلوب ہے جن کے شروع میں ہمیشہ م ہوتا ہے اور آخر میں ۸ -

اس صورت میں م اور ۸ کو اپنی اپنی جگہ قائم کرو اور باقی ۵ درمیانی حروف کو آپس میں ترتیب دو پس الفاظ کی تعداد مطلوبہ = $\underline{|5}$ = ۵ × ۴ × ۳ × ۲ × ۱ = ۱۲۰

مثال ۶ - کتنے مختلف طریقوں سے ۷ حروف ا، ب، ج، د، ع، ف، گ آپس میں اس طرح پر ترتیب دئے جا سکتے ہیں کہ (۱) ب اور ج ہمیشہ اکٹھے رہیں (۲) ب اور ج کبھی اکٹھے نہ ہوں -

(۱) چونکہ ب اور ج ہمیشہ اکٹھے رہیں گے اسلئے ہم انہیں ایک خطوط وحدانی کے اندر داخل کرتے ہیں جیسے (ب ج) اور چھ اشیا ا، (ب ج)، د، ع، ف، گ کی مختلف ترتیبیں دریافت کرتے ہیں ایسی ترتیبوں کی تعداد = $\underline{|6}$

= ۶ × ۵ × ۴ × ۳ × ۲ × ۱ = ۷۲۰

اِن میں سے ہر ایک ترتیب میں حروف ب اور ج ترتیب ب ج میں پائے جاتے ہیں

اسی طرح سے ۷۲۰ ترتیبیں ایسی ہیں جن میں حروف مذکورہ کی ترتیب ج ب ہے پس معلوم ہوا کہ کل ترتیبوں کی تعداد جن میں ب اور ج ہمیشہ متصل ہیں ۲×۷۲۰ یا ۱۴۴۰ ہے

(۲) فرض کرو کہ اُن ترتیبوں کی تعداد جن میں حروف ب اور ج اکٹھے نہیں ہیں لا ہے اور اُن ترتیبوں کی تعداد جن مین وہ اکٹھے ہیں ما ہے

تب صریحاً لا + ما = ${}_{۷}پت_{۷}$

اور بموجب حصہ (۱) ما = ۲ ${}_{۶}پت_{۶}$

اسلئے لا = ${}_{۷}پت_{۷}$ − ۲ ${}_{۶}پت_{۶}$

= ۷ ${}_{۶}پت_{۶}$ − ۲ ${}_{۶}پت_{۶}$

= (۷−۲) ${}_{۶}پت_{۶}$

= ۵ × ۷۲۰

= ۳۶۰۰

اسلئے اُن ترتیبوں کی تعداد جن میں ب اور ج اکٹھے نہیں ہوتے ۳۶۰۰ ہے

۱۵۸۔ ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے اجتماعوں کی تعداد دریافت کرو یا ن اشیا کے ر، اجتماعوں کی تعداد دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے اجتماعوں کی تعداد ${}_{ن}ج_{ر}$ سے تعبیر ہوتی ہے۔

اب ان میں سے ہر ایک اجتماع ایسی ر مختلف اشیا کا مجموعہ ہے جو آپس میں |ر طریقوں سے ترتیب دی جاسکتی ہیں۔

اسلئے ${}_{ن}ج_{ر}$ × |ر = ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کی ترتیبوں کی تعداد

یعنی ${}_{ن}ج_{ر}$ × |ر = ${}_{ن}پت_{ر}$

$$= \text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)\ldots\ldots(\text{ن}-\text{ر}+۱)$$

اسلئے

$$\text{ن}\,\text{ج}_{\text{ر}} = \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)\ldots\ldots(\text{ن}-\text{ر}+۱)}{\lfloor\text{ر}} \ldots\ldots (۱)$$

نتیجہ صریح۔ ضابطہ $\text{ن}\,\text{ج}_{\text{ر}}$ مختلف صورت میں بھی لکھا جا سکتا ہے کیونکہ اگر ہم شمارکنندہ اور نسب نما دونوں کو $\lfloor\text{ن}-\text{ر}$ سے ضرب دیں تو حاصل ہوگا

$$\frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)\ldots\ldots(\text{ن}-\text{ر}+۱)\lfloor\text{ن}-\text{ر}}{\lfloor\text{ر}\,\lfloor\text{ن}-\text{ر}}$$

شمارکنندہ میں اب ایک سے لیکر ن تک کے کل طبعی اعداد شامل ہیں اسلئے

$$\text{ن}\,\text{ج}_{\text{ر}} = \frac{\lfloor\text{ن}}{\lfloor\text{ر}\,\lfloor\text{ن}-\text{ر}} \ldots\ldots (۲)$$

بہتر ہوگا کہ طالب علم $\text{ن}\,\text{ج}_{\text{ر}}$ کی قیمت کی دونوں صورتیں (۱) اور (۲) یاد رکھے اور نتیجہ (۱) کو اُس وقت استعمال کرے جب عددی جواب مطلوب ہو اور (۲) کو اُس وقت استعمال کرے جب سوال کو صرف صورت جبریہ میں ختم کرنا کافی ہو۔

نوٹ۔ اگر نتیجہ (۲) میں فرض کیا جائے کہ ر = ن تو

$$\text{ن}\,\text{ج}_{\text{ن}} = \frac{\lfloor\text{ن}}{\lfloor\text{ن}\,\lfloor\text{۰}} = \frac{۱}{\lfloor\text{۰}}$$

لیکن $\text{ن}\,\text{ج}_{\text{ن}} = ۱$ اسلئے اگر نتیجہ اُس صورت میں صحیح ہو جب کہ ر = ن تو علامت $\lfloor\text{۰}$ کو ایک کے مساوی خیال کرنا چاہیئے۔

مثال ۱۔ اگر ن + ۲ اشیا میں سے تین تین اشیا کے اجتماعوں

کی تعداد $\frac{\text{۲ن}}{\text{۳}}$ اشیا میں سے دو دو اشیا کے اجتماعوں کی تعداد کی ۱۱ گنی ہو تو ن کی قیمت دریافت کرو

چونکہ $\text{ج}_{\text{ن+۲}, \text{۳}} = \frac{\text{ن(ن+۱)(ن+۲)}}{\text{۱×۲×۳}}$

اور $\text{ج}_{\frac{\text{۲ن}}{\text{۳}}, \text{۲}} = \frac{\frac{\text{۲ن}}{\text{۳}}\left(\frac{\text{۲ن}}{\text{۳}} - \text{۱}\right)}{\text{۱×۲}}$

اسلئے بموجب شرائط سوال

$$\frac{\text{ن(ن+۱)(ن+۲)}}{\text{۱×۲×۳}} = \text{۱۱} \times \frac{\text{۲ن(۲ن-۳)}}{\text{۱×۲×۹}}$$

یا $\text{۳(ن+۲)(ن+۱)} = \text{۲۲(۲ن-۳)}$

یا $\text{۳ن}^{\text{۲}} - \text{۳۵ن} + \text{۷۲} = \text{۰}$

یا $\text{(ن-۹)(۳ن-۸)} = \text{۰}$

اسلئے $\text{ن} = \text{۹}$

چونکہ تعداد اشیا مکسور نہیں ہوسکتی اسلئے ن کی دوسری قیمت غیر واجب ہے۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ $\text{ج}_{\text{۴ن}, \text{۲ن}} : \text{ج}_{\text{۲ن}, \text{ن}}$

$$= \{\text{۱×۳×۵} \ldots\ldots \text{(۴ن-۱)}\} : \{\text{۱×۳×۵} \ldots\ldots \text{(۲ن-۱)}\}^{\text{۲}}$$

چونکہ $\text{ج}_{\text{۴ن}, \text{۲ن}} = \frac{|\underline{\text{۴ن}}}{|\underline{\text{۲ن}}\ |\underline{\text{۲ن}}}$ اور $\text{ج}_{\text{۲ن}, \text{ن}} = \frac{|\underline{\text{۲ن}}}{|\underline{\text{ن}}\ |\underline{\text{ن}}}$

اسلئے نسبت مطلوبہ $= \frac{|\underline{\text{۴ن}}}{|\underline{\text{۲ن}}\ |\underline{\text{۲ن}}} \times \frac{|\underline{\text{ن}}\ |\underline{\text{ن}}}{|\underline{\text{۲ن}}}$

$$= \frac{\lfloor 4\text{ن}}{\lfloor 2\text{ن}} \times \left\{\frac{\lfloor \text{ن}}{\lfloor 2\text{ن}}\right\}^2$$

اب $\lfloor 4\text{ن} = 1\times2\times3\times4 \ldots\ldots 4\text{ن}$

$$= \{1\times3\times5 \ldots (4\text{ن}-1)\} \times \{2\times4\times6 \ldots 4\text{ن}\}$$

$$= \{1\times3\times5 \ldots (4\text{ن}-1)\} \times 2^{2\text{ن}} \{1\times2\times3 \ldots 2\text{ن}\}$$

اسلئے $\frac{\lfloor 4\text{ن}}{\lfloor 2\text{ن}} = \{1\times2\times3 \ldots (4\text{ن}-1)\} \times 2^{2\text{ن}} \ldots\ldots (1)$

نیز $\lfloor 2\text{ن} = \{1\times3\times5 \ldots (2\text{ن}-1)\} \times \{2\times4\times6 \ldots 2\text{ن}\}$

$$= \{1\times3\times5 \ldots (2\text{ن}-1)\} \times 2^{\text{ن}} \{1\times2\times3 \ldots \text{ن}\}$$

اسلئے $\frac{\lfloor 2\text{ن}}{\lfloor \text{ن}} = \{1\times3\times5 \ldots (2\text{ن}-1)\} 2^{\text{ن}}$

اور اسلئے $\left\{\frac{\lfloor \text{ن}}{\lfloor 2\text{ن}}\right\}^2 = \frac{1}{2^{2\text{ن}} \times \{1\times3\times5 \ldots (2\text{ن}-1)\}^2} \ldots (2)$

اسلئے (۱) اور (۲) سے نسبت مطلوبہ $= \frac{1\times3\times5 \ldots (4\text{ن}-1)}{\{1\times3\times5 \ldots (2\text{ن}-1)\}^2}$

۱۵۹- ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے اجتماعوں کی تعداد وہی ہوگی جو اُنہی اشیا میں سے ن-ر، ن - ر اشیا کے اجتماعوں کی تعداد
ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے کل ممکن اجتماع بنانے میں جب ہم ر اشیا کا کوئی ایک مجموعہ منتخب کرتے ہیں تو اس کے مقابل ن-ر اشیا کا ایک مجموعہ باقی رہتا ہے یعنی ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے اجتماعوں کی تعداد وہی ہے جو ن اشیا میں

سے ن-ر، ن-ر اشیا کے اجتماعوں کی تعداد ہے۔

$$\therefore \; {}_{ن}ج_{ر} = {}_{ن}ج_{ن-ر}$$

اس مسئلہ کو ہم اس طرح بھی ثابت کر سکتے ہیں

$${}_{ن}ج_{ن-ر} = \frac{|ن}{|ن-ر \;\; |ن-(ن-ر)}$$ [دفعہ ۱۵۸]

$$= \frac{|ن}{|ن-ر \;\; |ر} = {}_{ن}ج_{ر}$$

ایسے اجتماعوں کو **متمم اجتماع** کہتے ہیں۔

نتیجہ صریح۔ اگر ${}_{ن}ج_{لا} = {}_{ن}ج_{ما}$ تو لا = ما یا لا + ما = ن کیونکہ ظاہر ہے کہ لا اور ن-لا میں سے ما کی کوئی سی ایک قیمت ہو سکتی ہے

نوٹ۔ چونکہ ${}_{ن}ج_{.} = {}_{ن}ج_{ن-.} = {}_{ن}ج_{ن} = ۱$

نتیجہ ${}_{ن}ج_{ر} = {}_{ن}ج_{ن-ر}$ جو ہم نے ابھی ثابت کیا ہے حسابی عمل کے مختصر کر دینے میں نہایت کارآمد ہے۔

مثال ۱۔ ${}_{۱۲}ج_{۸}$ ، ${}_{۱۵}ج_{۹}$ ، ${}_{۲۵}ج_{۲۲}$ کی قیمتیں دریافت کرو

$${}_{۱۲}ج_{۸} = {}_{۱۲}ج_{۱۲-۸} = {}_{۱۲}ج_{۴} = \frac{۹ \times ۱۰ \times ۱۱ \times ۱۲}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}$$

$$= ۹ \times ۵ \times ۱۱ = ۴۹۵$$

$${}_{۱۵}ج_{۹} = {}_{۱۵}ج_{۱۵-۹} = {}_{۱۵}ج_{۶} = \frac{۱۰ \times ۱۱ \times ۱۲ \times ۱۳ \times ۱۴ \times ۱۵}{۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}$$

$$= ۵ \times ۱۱ \times ۱۳ \times ۷ = ۵۰۰۵$$

$${}_{25}ج_{22} = {}_{25}ج_{25-22} = {}_{25}ج_{3} = \frac{23\times 24\times 25}{3\times 2\times 1}$$
$$= 2300$$

مثال ۲۔ اگر ${}_{ن}ج_{14} = {}_{ن}ج_{16}$ تو ${}_{ن}ج_{28}$ اور ${}_{32}ج_{ن}$ کی قیمتیں دریافت کرو

چونکہ ${}_{ن}ج_{14} = {}_{ن}ج_{16}$ ∴ $ن = 14 + 16 = 30$

اسلئے ${}_{ن}ج_{28} = {}_{30}ج_{28} = {}_{30}ج_{2} = \frac{29\times 30}{2\times 1} = 435$

اور ${}_{32}ج_{ن} = {}_{32}ج_{30} = {}_{32}ج_{2} = \frac{31\times 32}{2\times 1} = 496$

مثال ۳۔ اگر ${}_{ن}ج_{ر} = {}_{ن}ج_{ر+1}$ اور اگر ان میں سے ہر ایک کی نسبت ${}_{ن}ج_{ر-1}$ سے ۵ : ۴ ہو تو ن کی قیمت دریافت کرو۔

چونکہ ${}_{ن}ج_{ر+1} = {}_{ن}ج_{ر}$

اسلئے $ر+1 = ن-ر$ ....(۱)

اب چونکہ $${}_{ن}ج_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن-ر}} = \frac{\underline{|ن}}{ر\ \underline{|ر-1}\ \underline{|ن-ر}}$$

اور $${}_{ن}ج_{ر-1} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر-1}\ \underline{|ن-ر+1}} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر-1}\ (ن-ر+1)\ \underline{|ن-ر}}$$

اسلئے بموجب شرائط سوال

$$\frac{5}{4} = {}_{ن}ج_{ر} \div {}_{ن}ج_{ر-1} = \frac{ن-ر+1}{ر}$$

$$= \frac{ر+2}{ر}$$ بموجب (۱)

جس سے $ر = 8$ اور اسلئے $ن = 2ر+1 = 17$

۱۶۰- جب ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے ایسے اجتماع مطلوب ہوں جن میں سے ہر ایک اجتماع میں ایک خاص شے شامل ہو تو ہمیں اُس شے کو علیحدہ نکال کر باقی ماندہ ن-۱ اشیا میں سے ر-۱، ر-۱ اشیا کے مختلف اجتماع بنانے چاہئیں اور پھر ہر ایک ایسے اجتماع میں اُس خاص شے کو شامل کر دینا چاہیئے۔

پس معلوم ہوا کہ ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے اُن اجتماعوں کی تعداد جن میں سے ہر ایک میں ایک خاص شے ہمیشہ شامل ہوتی ہے
$$= ج^{ن-۱}_{ر-۱}$$

مثال ۱- ایک تاش کی بازی لگانے کے لئے ۱۰ مردوں میں سے چھ چھ کی مختلف جماعتیں مطلوب ہیں معلوم کرو کہ یہ عمل کتنی طرح سے ہو سکتا ہے۔

تعداد مطلوبہ $= ج^{۱۰}_{۶} = ج^{۱۰}_{۴} = \frac{۷ \times ۸ \times ۹ \times ۱۰}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = ۲۱۰$

اس تعداد میں کتنے انتخاب ایسے ہیں جن میں ایک خاص آدمی شامل ہوگا؟

اُسے علیحدہ کرو اور باقی ۹ مردوں میں سے پانچ پانچ کی مختلف جماعتیں بناؤ اور پھر آخیر میں اس کو ہر ایک جماعت میں شامل کر دو۔

ایسی جماعتوں کی تعداد $= ج^{۹}_{۵} = ج^{۹}_{۴}$

$$= \frac{۶ \times ۷ \times ۸ \times ۹}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = ۱۲۶$$

ان میں کتنے انتخاب ایسے ہیں جن میں ایک خاص آدمی شامل نہیں ہوگا؟

اُسے علیحدہ کرو اور باقی ۹ میں سے چھ چھ کی جماعتیں بناؤ تعداد مطلوبہ $= ج^{۹}_{۶} = ج^{۹}_{۳} = \frac{۷ \times ۸ \times ۹}{۳ \times ۲ \times ۱} = ۸۴$

مثال ۲ - کل ۱۲ کتابوں میں سے پانچ پانچ کتابیں کتنی طرح سے منتخب ہوسکتی ہیں جبکہ ہر ایک صورت میں (۱) ایک خاص کتاب ہمیشہ شامل کی جائے - (۲) ایک خاص کتاب ہمیشہ خارج کی جائے -

(۱) چونکہ ہر ایک انتخاب میں کتاب مختص شامل ہوگی اسلئے ہمیں گیارہ کتابوں میں سے صرف چار چار کتابیں منتخب کرنی ہیں -

اسلئے تمام طریقوں کی تعداد $= {}_{11}ج_{4} = \frac{8 \times 9 \times 10 \times 11}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 330$

(۲) چونکہ کتاب مختص ہمیشہ خارج کی جائے گی اسلئے ہمیں ۱۱ کتابوں میں سے پانچ پانچ کتابیں منتخب کرنی ہیں اسلئے مطلوبہ طریقوں کی تعداد

$$= {}_{11}ج_{5} = \frac{7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 462$$

۱۶۱ - امثلہ ذیل میں یہ بات قابل توجہ ہے کہ ترتیب لگانے کے قاعدہ کو استعمال نہیں کرنا چاہیئے جب تک کہ مناسب اجتماع بموجب شرائط سوال مرتب نہ ہوجائیں -

مثال ۱ - ۸ ہندوستانیوں اور ۵ انگریزوں میں سے ۷ کی ایک کمیٹی بنانی ہے معلوم کرو کہ یہ کتنے مختلف طریقوں سے ہوسکتا ہے جبکہ کمیٹی میں (۱) صرف ۲ انگریز ہوں (۲) کم از کم دو انگریز ہوں -

(۱) کمیٹی میں دو انگریز اور اسلئے ۵ ہندوستانی ہونگے
اب ۸ ہندوستانیوں میں سے ۵ ہندوستانی منتخب کرنے کے طریقے

$$= {}_{8}ج_{5} = {}_{8}ج_{3}$$

اور ۵ انگریزوں میں سے ۲ انگریز منتخب کرنیکے طریقے $= {}_{5}ج_{2}$

چونکہ کمیٹی بنانے میں ہر ایک ہندوستانی گروہ ہر ایک انگریزی گروہ سے منسلک ہوسکتا ہے اسلئے کمیٹی بنانے کے کل طریقے $= ج^{۵}_{۲} \times ج^{۸}_{۳}$

$$= \frac{۴ \times ۵}{۲ \times ۱} \times \frac{۶ \times ۷ \times ۸}{۳ \times ۲ \times ۱}$$

$$= ۱۰ \times ۵۶ = ۵۶۰$$

(۲) کمیٹی میں ۲، ۳، ۴، ۵ انگریز ہو سکتے ہیں اس لئے ہمیں چار مختلف صورتوں پر غور کرنا چاہیئے:-

صورت اول - کمیٹی میں ۲ انگریز اور ۵ ہندوستانی ہیں -

صورت دوم - 〃 ۳ انگریز اور ۴ ہندوستانی ہیں

صورت سوم - 〃 ۴ انگریز اور ۳ ہندوستانی ہیں

صورت چہارم - 〃 ۵ انگریز اور ۲ ہندوستانی ہیں

اب بموجب حصہ (۱) پہلی صورت میں کمیٹی بنانیکے مختلف طریقے

$= ج^{۵}_{۲} \times ج^{۸}_{۵}$ ، دوسری صورت میں $= ج^{۵}_{۳} \times ج^{۸}_{۴}$ ، تیسری صورت میں

$= ج^{۵}_{۴} \times ج^{۸}_{۳}$ اور چوتھی صورت میں $= ج^{۵}_{۵} \times ج^{۸}_{۲}$

اسلئے تعداد مطلوبہ $= \left(ج^{۵}_{۲} \times ج^{۸}_{۵}\right) + \left(ج^{۵}_{۳} \times ج^{۸}_{۴}\right)$

$$+ \left(ج^{۵}_{۴} \times ج^{۸}_{۳}\right) + \left(ج^{۵}_{۵} \times ج^{۸}_{۲}\right)$$

$$= \left(ج^{۵}_{۲} \times ج^{۸}_{۳}\right) + \left(ج^{۵}_{۲} \times ج^{۸}_{۴}\right) + \left(ج^{۵}_{۱} \times ج^{۸}_{۳}\right) + ۱ \times ج^{۸}_{۲}$$

$$= \left(\frac{۵ \times ۶ \times ۷ \times ۸}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} \times \frac{۴ \times ۵}{۲ \times ۱}\right) + \left(\frac{۶ \times ۷ \times ۸}{۳ \times ۲ \times ۱} \times \frac{۴ \times ۵}{۲ \times ۱}\right)$$

$$+ \left(\frac{۶ \times ۷ \times ۸}{۳ \times ۲ \times ۱} \times ۵\right) + \left(\frac{۷ \times ۸}{۲ \times ۱}\right)$$

$= ۲۸ + ۲۸۰ + ۷۰۰ + ۵۶۰$

$= ۱۵۶۸$

مثال ۲۔ ایک کشتی کے ۸ ملاح ہیں اُن میں سے ۳ ایک طرف چپو چلا سکتے ہیں اور ۲ دوسری طرف، معلوم کرو کہ کشتی میں ان کی نشستیں کتنی طرح سے ترتیب دی جا سکتی ہیں۔

فرض کرو کہ ملاح ا، ب، ج، د، ع، ف، گ، ھ ہیں نیز فرض کرو کہ ا، ب، ج ہمیشہ ایک طرف اور د، ع ہمیشہ دوسری طرف رہتے ہیں جیسا کہ ترتیب ذیل سے ظاہر ہے۔

ا	
ب	د
ج	ع

اب ضروری ہے کہ دونوں طرف چار چار ملاح ہوں باقی تین میں سے ایک کو ا، ب، ج کی طرف بٹھانا چاہیئے اور دوسرے دو کو د اور ع کی طرف۔

ظاہر ہے کہ یہ عمل تین طرح سے ہو سکتا ہے کیونکہ ہم کسی ایک کو ا، ب، ج کی طرف بٹھا سکتے ہیں۔

ان تینوں طریقوں میں سے فی الحال ایک پر غور کرو یعنی جب ف کو ا، ب، ج کی طرف بٹھایا جائے دیکھو ترتیب ذیل

ا	د
ب	ع
ج	گ
ف	ھ

اب ا ، ب ، ج ، ف آپس میں ⌊۴ طرح سے ترتیب دئے جا سکتے ہیں اور صریحاً ان میں سے ہر ایک ترتیب کے مقابل د، ع، گ، ہ کو آپس میں ترتیب دینے کے ⌊۴ طریقے ہیں اس لئے اس صورت میں ملاحوں کو ترتیب دینے کے کل طریقوں کی تعداد = ⌊۴ × ⌊۴

اسی طرح سے دوسری دو صورتوں میں سے ہر ایک کے مقابل ملاحوں کو آپس میں ترتیب دینے کے ⌊۴ × ⌊۴ طریقے ہیں۔

اسلئے ملاحوں کو آپس میں ترتیب دینے کے کل مختلف طریقے

= ۳ × ⌊۴ × ⌊۴

= ۳ × ۲۴ × ۲۴

= ۱۷۲۸

مثال ۳۔ ۱۰ حروف صحیح اور ۴ حروف علت میں سے کتنے ایسے الفاظ بن سکتے ہیں جن میں سے ہر ایک میں ۳ حروف صحیح اور ۲ حروف علت شامل ہوں۔

۱۰ حروف صحیح میں سے تین تین حروف کے مجموعوں کی تعداد = $^{۱۰}\text{ج}_{۳}$

۴ حروف علت میں سے دو دو حروف کے مجموعوں کی تعداد = $^{۴}\text{ج}_{۲}$

اب پہلی قسم کے ہر ایک مجموعہ کو دوسری قسم کے ہر ایک مجموعہ کیساتھ اکٹھا کرنے سے ہمیں $^{۱۰}\text{ج}_{۳} \times {}^{۴}\text{ج}_{۲}$ مجموعے حاصل ہوتے ہیں جن میں سے ہر ایک میں ۳ حروف صحیح اور ۲ حروف علت شامل ہیں

اب ان میں سے ہر ایک مجموعہ میں ۵ مختلف حروف ہیں جو آپس میں ⌊۵ طرح سے ترتیب دئے جا سکتے ہیں۔

اسلئے الفاظ کی تعداد مطلوبہ $= ج^{۱۰}_{۳} \times ج^{۴}_{۲} \times \underline{|۵}$

$$= \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸}{۱ \times ۲ \times ۳} \times \frac{۴ \times ۳}{۱ \times ۲} \times \underline{|۵}$$

$$= ۱۲۰ \times ۶ \times \underline{|۵}$$

$$= ۷۲۰ \times ۱۲۰$$

$$= ۸۶۴۰۰$$

مثال ۴۔ اگر ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کی ترتیبیں لگائی جائیں تو معلوم کرو کہ کتنی ترتیبوں میں تین اشیاء معینہ شامل ہونگی۔

سب سے پہلے ہم ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے ایسے اجتماعوں کی تعداد دریافت کرینگے جن میں سے ہر ایک اجتماع میں تینوں اشیاء معینہ شامل ہوں۔

ظاہر ہے کہ اگر ہم ایک ایسا اجتماع بنائیں جس میں تینوں اشیاء مذکورہ شامل ہوں تو اُس میں اور ر-۳ اشیا بھی موجود ہونگی جو باقی ماندہ ن-۳ اشیا میں سے منتخب کی گئی ہیں پس معلوم ہوا کہ ر اشیا کے ایسے اجتماع جن میں تینوں اشیا موجود ہوں اتنے ہونگے جتنے کہ ن-۳ اشیا میں سے ر-۳، ر-۳ اشیا کے اجتماع ہیں۔

یعنی اجتماعوں کی تعداد مطلوبہ $= ج^{ن-۳}_{ر-۳} = \frac{\underline{|ن-۳}}{\underline{|ر-۳}\ \underline{|ن-ر}}$

لیکن ان میں سے ہر ایک ر اشیا کا مجموعہ آپس میں $\underline{|ر}$ طرح سے ترتیب دیا جاسکتا ہے پس کل ترتیبوں کی تعداد جن میں تینوں اشیائے معینہ شامل ہیں $= \frac{\underline{|ن-۳}}{\underline{|ر-۳}\ \underline{|ن-ر}} \times \underline{|ر}$

$$= \frac{\lfloor \text{ن} - ۳}{\lfloor \text{ن} - \text{ر}} \times \text{ر}(\text{ر} - ۱)(\text{ر} - ۲)$$

۱۶۲- اگر ن اشیا کے مختلف پارسل بنانے مطلوب ہوں تو اس سوال کا حل ضابطہ متعلقہ $_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}}$ سے حاصل ہوسکتا ہے۔

فرض کرو کہ ن اشیا کے ایسے دو پارسل بنانے مطلوب ہیں جن میں سے ایک میں ر اشیا اور دوسرے میں باقی ن-ر اشیا شامل ہوتی ہیں پہلے پارسل کی ر اشیا منتخب کرنے کے کل طریقے $_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}}$ ہیں اور ظاہر ہے کہ جب ہم ر اشیا کا ایک اجتماع بناتے ہیں تو ن-ر اشیا کا ایک اجتماع باقی رہتا ہے اور وہ دوسرے پارسل کی تعدادِ اشیا ہے پس معلوم ہوا کہ دونوں پارسل بنانے کے کل طریقوں کی تعداد وہی ہے جو پہلے پارسل کی ر اشیا منتخب کرنے کی تعداد ہے۔

اسلئے مطلوبہ طریقوں کی تعداد $= {}_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}} = \frac{\lfloor \text{ن}}{\lfloor \text{ر} \lfloor \text{ن} - \text{ر}}$

اگر ل + م اشیا کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرنا مطلوب ہو یا اُن کے ایسے دو پارسل بنانے ہوں جن میں جداگانہ ل اور م اشیا شامل ہوں تو ایسا کرنے کے کل طریقے $= \frac{\lfloor \text{ل} + \text{م}}{\lfloor \text{ل} \lfloor \text{م}}$ .... (۱)

اگر ل + م + ن اشیا میں سے تین ایسے اجتماع یا پارسل بنانے مطلوب ہوں جن میں جداگانہ ل، م، ن اشیا شامل ہوں تو سب سے اول ہم انہیں ایسے دو حصوں میں تقسیم کر سکتے ہیں جن میں بالترتیب ل اور م + ن اشیا شامل ہوں (۱) سے ظاہر ہے کہ ایسا کرنے کے کل طریقوں

ہے اسی طرح سے م + ن اشیا کے دو پارسل $\dfrac{\lfloor \text{ل + م + ن}}{\lfloor \text{ل}\ \lfloor \text{م + ن}}$ کی تعداد جن میں جداگانہ م اور ن اشیا شامل ہوں $\dfrac{\lfloor \text{م + ن}}{\lfloor \text{م}\ \lfloor \text{ن}}$ طرح سے بن سکتے ہیں اسلئے ل + م + ن اشیا میں سے بالترتیب ل، م، ن اشیا کے تین پارسل بنانے کے کل طریقے

$$= \frac{\lfloor \text{ل + م + ن}}{\lfloor \text{ل}\ \lfloor \text{م + ن}} \times \frac{\lfloor \text{م + ن}}{\lfloor \text{م}\ \lfloor \text{ن}}$$

$$= \frac{\lfloor \text{ل + م + ن}}{\lfloor \text{ل}\ \lfloor \text{م}\ \lfloor \text{ن}}$$

ل+م اشیا کے دو پارسل بنانے میں وہ صورت جبکہ ل = م قابل غور ہے یہاں ضابطہ $\dfrac{\lfloor \text{ل + م}}{\lfloor \text{ل}\ \lfloor \text{م}}$ سے صحیح جواب حاصل نہیں ہوتا ۔

مثلاً ایک سادہ صورت پر غور کرو جہاں دو دو اشیا کے پارسل بنانے کے لئے ۴ اشیا ا، ب، ج، د اس طرح تقسیم کی گئی ہیں یعنی

اب	اور	جد
اج	″	بد
اد	″	بج
بج	″	اد
بد	″	اج
جد	″	اب

ہمیں ضابطہ ج سے معلوم ہے کہ اس قسم کی تقسیم کے $\frac{|۴}{|۲\ |۲}$ یعنی ۶ طریقے ہیں لیکن ہر ایک طریقہ دو دفعہ تکرار پاتا ہے پس معلوم ہوا کہ مطلوبہ مختلف طریقوں کی تعداد مندرجہ بالا کا نصف ہے

اسی طرح سے جب ۲ل اشیا کے ایسے دو پارسل بنانے ہوں جن میں سے ہر ایک پارسل میں ل اشیا شامل ہوں تو ایسا کرنے کے

$$\text{کل طریقے} = \frac{|۲ل}{۲\ |ل\ |ل}$$

اب اگر یہی پارسل دو شخصوں کو دیئے جائیں تو ایسا کرنے کے کل طریقے $\frac{|۲ل}{۲\ |ل\ |ل} \times ۲$ یعنی $\frac{|۲ل}{(|ل)^{۲}}$ ہونگے کیونکہ اگر ۲ل اشیا کے دو پارسل بنائے جائیں تو وہ دو طرح سے دو شخصوں کو دیئے جا سکتے ہیں

اسی طرح سے اگر ضابطہ $\frac{|ل+م+ن}{|ل\ |م\ |ن}$ میں ل = م = ن

اور پارسلوں کی ترتیب میں کچھ تمیز نہ کی جائے تو ل، م، ن اشیا کے پارسلوں کو باہم ترتیب دینے کے $|۳$ طریقے متماثل ہونگے۔

اسلئے ۳ل اشیا میں سے ل، ل اشیا کے تین پارسل بنانے کے

$$\text{مختلف طریقے} = \frac{|۳ل}{|۳\ (|ل)^{۳}}$$

اگر ان پارسلوں کو تین شخصوں میں تقسیم کرنا ہو تو ایسا کرنے کے

کل طریقے $\dfrac{\underline{|3l}}{\underline{|3}\,(\underline{|l})^{3}} \times \underline{|3}$ یعنی $\dfrac{\underline{|3l}}{(\underline{|l})^{3}}$ ہونگے کیونکہ پارسل جب ایک دفعہ بن گئے تو وہ تین اشخاص میں $\underline{|3}$ طرح سے تقسیم ہو سکتے ہیں پس معلوم ہوا کہ ۳ اشخاص میں سے ہر ایک کو ل، ل اشیا دینے کے مختلف طریقے $\dfrac{\underline{|3l}}{(\underline{|l})^{3}}$ ہیں

مثال ۱۔ ۱۰ خطوط میں سے چھ چھ اور چار چار کے دو پارسل کتنی طرح سے بن سکتے ہیں؟

مطلوبہ طریقوں کی تعداد $= \dfrac{\underline{|10}}{\underline{|4}\,\underline{|6}} = 210$

کتنی طرح سے ۱۰ خطوط دو شخصوں میں اس طرح تقسیم ہو سکتے ہیں کہ ۶ ایک کو دیئے جائیں اور ۴ دوسرے کو؟

۶ خطوط ایک شخص کو اور ۴ دوسرے کو دیئے جا سکتے ہیں یا برعکس اسکے۔

اسلئے مطلوبہ طریقوں کی تعداد $= \dfrac{2\,\underline{|10}}{\underline{|4}\,\underline{|6}} = 420$

مثال ۲۔ ۱۵ خطوط میں سے پانچ پانچ کے تین پارسل کتنی مختلف طرح سے بن سکتے ہیں؟

مطلوبہ طریقوں کی تعداد $= \dfrac{\underline{|15}}{\underline{|5}\,\underline{|5}\,\underline{|5}} \times \dfrac{1}{\underline{|3}}$

اگر ۱۵ خطوط میں سے پانچ پانچ خطوط تین مختلف مکانوں پر دینے مطلوب ہوں تو اس صورت میں طریقوں کی تعداد = پانچ پانچ خطوط

کے پارسل بنانے کی تعداد کی $\underline{|۳}$ گنی $= \frac{\underline{|۱۵}}{(\underline{|۵})^{۳}}$

امثلہ نمبری ۱۸

۱۔ ۵ حروف ا ، ب ، ج ، د ، ع میں سے چار چار حروف کی ایسی ترتیبیں مفصل لکھو جن میں ا حرف اول ہو اور اُنکی تعداد دریافت کرو

۲۔ ۵ حروف ا ، ب ، ج ، د ، ع کی وہ سب ترتیبیں مفصل لکھو جن میں ا حرف اول ہو اور ع حرف آخر یا برعکس اسکے۔ نیز اُن کی تعداد دریافت کرو۔

۳۔ حاصل ضرب ن (ن-۱)(ن-۲)..... (ن-۶) میں کل اجزاء ضربی کی تعداد دریافت کرو۔

۴۔ حاصل ضرب ''ن (ن-۱)(ن-۲)(ن-۳).... ر اجزاء ضربی تک میں سب سے اخیر کا جزو ضربی دریافت کرو

۵۔ اگر ${}_{ن}ت_{۵} = ۱۲\ {}_{ن}ت_{۳}$ تو ن کی قیمت دریافت کرو۔

۶۔ ثابت کرو کہ ${}_{ن+۱}ت_{ر} = {}_{ن}ت_{ر} + ر \times {}_{ن}ت_{ر-۱}$

۷۔ کسی لفظ میں ۴ حروف علت اور ۳ حروف صحیح شامل ہیں کتنی طرح سے ایک حرف علت اور ایک حرف صحیح ان میں سے اکٹھے منتخب ہو سکتے ہیں ؟

۸۔ ${}_{۶}ت$ ، ${}_{۶}ت_{۵}$ ، ${}_{۲۴}ج_{۲۲}$ ، ${}_{۱۹}ج_{۱۴}$ کی قیمتیں دریافت کرو۔

۹۔ اگر ن اشیا میں سے تین تین اشیا کی ترتیبوں کا چار گنا ن-۱ اشیا میں سے تین تین اشیا کی ترتیبوں کے ۵ گنے کے برابر ہو

تو ن کی قیمت دریافت کرو

۱۰- "احد عشرہ" کے حروف سے کل کتنی ترتیبیں بن سکتی ہیں اور ان میں سے کتنی ا سے شروع اور ح سے ختم ہونگی؟

۱۱- ہندسے ۳، ۴، ۷، ۵، ۸، ۱ دئے ہوئے ہیں ان میں سے چار چار ہندسے لینے سے کتنے مختلف اجتماع بن سکتے ہیں اور اگر ان میں سے چار چار ہندسے لیکر مختلف اعداد بنا ئے جائیں تو ان کی تعداد کیا ہوگی؟

۱۲- اگر $ج^{ن}_{۳} : ج^{ن}_{۲} = ۳:۴۴$ تو ن کی قیمت دریافت کرو

۱۳- ۵ گھنٹوں میں سے سب کے سب اکٹھے بجنے سے کل کتنی مختلف آوازیں پیدا ہو سکتی ہیں؟

۱۴- ۷ گھنٹے سب کے سب اکٹھے کتنی مختلف طرح سے بج سکتے ہیں اگر سب سے اونچی آواز سب سے آخر ہو؟

۱۵- کتنی راتوں کو ۲۴ ملاحوں میں سے چار چار آدمیوں کے مختلف پہرے لگ سکتے ہیں اور ان میں سے کتنے پہروں میں ایک خاص آدمی شامل ہوگا؟

۱۶- اگر ت اور ق ہمیشہ اکٹھے رہیں تو معلوم کرو کہ لفظ "متقاربہ" کے حروف آپس میں کل کتنی طرح سے ترتیب دئے جا سکتے ہیں۔

۱۷- کسی قصباتی کونسل میں ۲۵ مشیر اور ۱۰ جاگیردار ہیں معلوم کرو کہ ان میں سے کل کتنی کمیٹیاں بن سکتی ہیں جبکہ ہر ایک کمیٹی میں ۵ مشیر اور ۳ جاگیردار ہوں۔

۱۸- کل چھ حروف ہیں، تین بڑے چھاپے کے اور تین چھوٹے کے، اُن ترتیبوں کی تعداد دریافت کرو جو (۱) بڑے حروف سے شروع ہوں۔ (۲) جو بڑے حروف سے شروع اور ختم ہوں۔

۱۹- ۵۰ اشیا میں سے ۴۶، ۴۶ اشیا کے اجتماعوں کی تعداد دریافت کرو

۲۰- اگر $ج^{ن}_{۱۲} = ج^{ن}_{۸}$ تو $ج^{ن}_{۱۱}$ اور $ج^{ن}_{۲۲}$ کی قیمتیں دریافت کرو۔

۲۱- کتنی طرح سے لفظ "مجادلہ" کے حروف آپس میں ترتیب دیئے جا سکتے ہیں اگر ج اور د ہمیشہ طاق مقامات میں رہیں۔

۲۲- ۴ افسر اور ۸ سپاہی ہیں، ان میں سے چھ چھ کی جماعتیں کتنی مختلف طرح سے منتخب ہوسکتی ہیں اگر ہر ایک جماعت میں (۱) صرف ایک افسر ہو (۲) کم از کم ایک افسر ہو۔

۲۳- ۱۰ شخصوں میں سے چار یا زیادہ اشخاص کی ایک جماعت کتنی طرح سے منتخب ہوسکتی ہے

۲۴- اگر $ج^{۱۸}_{ر} = ج^{۱۸}_{ر+۲}$ تو $ج^{ر}_{۵}$ کی قیمت دریافت کرو۔

۲۵- کسی ریلوے لائن پر ۱۵ اسٹیشن ہیں، کل ٹکٹوں کی تعداد دریافت کرو تاکہ ہر ایک اسٹیشن پر ایک مسافر کو باقی تمام اسٹیشنوں کے ٹکٹ مل سکیں۔

۲۶- ٹینس کے کھلاڑی ۶ انگریز اور ۵ ہندوستانی ہیں اگر ہر ایک طرف ایک انگریز اور ایک ہندوستانی اکٹھے کھیلیں تو معلوم

کرو کہ ایک ٹینس کی بازی کھیلنے کیلئے انتخاب کتنی طرح سے ہوسکتا ہے

۲۷۔ ۲۵ حروف صحیح اور ۵ حروف علت میں سے کل کتنے الفاظ بن سکتے ہیں جبکہ ہر ایک لفظ میں ۳ حروف علت اور ۲ صحیح ہوں۔

۲۸۔ ایک کتب خانہ میں ۲۰ لاطینی اور ۶ یونانی کتابیں ہیں اگر ان میں سے ۵ کتابیں منتخب کیجائیں جنمیں تین لاطینی اور دو یونانی ہوں تو بتاؤ کہ انکو منتخب کرنے اور ایک الماری کے خانے میں ترتیب دینے کے کل کتنے طریقے ہوسکتے ہیں۔

۲۹۔ کتنی طرح سے ۱۲ اشیا ۴ شخصوں میں برابر برابر تقسیم ہوسکتی ہیں؟

۳۰۔ تین بڑے چھاپے کے حروف، ۵ حروف صحیح اور ۴ حروف علت میں سے ایسے الفاظ بنانے مطلوب ہیں جو بڑے حروف سے شروع ہوں اور جن میں سے ہر ایک میں ۲ حروف علت اور ۳ حروف صحیح شامل ہوں، الفاظ کی تعداد دریافت کرو۔

۳۱۔ کسی ممبری کے انتخاب پر ۱۰، ۱۵، ۲۰ آدمیوں نے بالترتیب تین اضلاع سے اظہار رائے کی درخواست کرنی ہے اگر کل امیدوار ۴۵ ہوں تو معلوم کرو کہ ان کی تقسیم مختلف اضلاع میں کل کتنی طرح سے ہوسکتی ہے۔

۳۲۔ ایک کشتی کے ۸ ملاح ہیں ان میں سے ۲ ایک طرف چپو چلا سکتے ہیں اور ایک ایک طرف، معلوم کرو کہ کشتی میں ملاح کتنی طرح سے ترتیب دئے جاسکتے ہیں

۳۳۔ کتنی طرح سے ۱۰ امتحان کے پرچے اس طرح ترتیب دئے جاسکتے ہیں کہ سب سے اچھا پرچہ سب سے بُرے پرچے

کے ساتھ کبھی اکٹھا نہ ہو۔

۳۴۔ ایک آٹھ چپو کشتی کے ملاحوں کو ایسے ۱۱ اشخاص سے منتخب کرنا ہے جن میں سے تین کشتی کی رہنمائی کر سکتے ہیں مگر چپو نہیں چلا سکتے اور باقی چپو چلا سکتے ہیں مگر رہنمائی نہیں کر سکتے اگر دو آدمی صرف دائیں طرف چپو چلا سکیں تو معلوم کرو کہ کل ملاح کشتی میں کتنی طرح سے ترتیب دئے جا سکتے ہیں۔

۳۵۔ ثابت کرو کہ ث مثبت اور ن منفی علامات جبریہ کو ایک قطار میں ترتیب دینے کے کل طریقے ${}_{ث+۱}ج_{ن}$ ہیں اگر دو منفی علامات کبھی اکٹھی نہ ہوں۔

۳۶۔ اگر ${}_{۵۶}پ_{ر+۶} : {}_{۵۴}پ_{ر+۳} = ۳۰۸۰۰ : ۱$ تو ر کی قیمت دریافت کرو۔

۳۷۔ چھ مختلف رنگ کے جھنڈوں کو ایک دوسرے پر اکٹھا کھڑا کرنے سے کل کتنے مختلف نشان بن سکتے ہیں اگر ان میں سے کوئی سی تعداد ایک وقت اکٹھی کھڑی کی جا سکے۔

۳۸۔ اگر ${}_{۲۸}ج_{۲ر} : {}_{۲۴}ج_{۲ر-۴} = ۲۲۵ : ۱۱$ تو ر کی قیمت دریافت کرو

۳۹۔ اگر لفظ "دستاویز" کے حروف میں سے چار چار حروف لیکر اُن کے مختلف الفاظ بنائے جائیں تو معلوم کرو کہ اُن میں سے کتنے الفاظ میں حرف س واقع ہوگا

۱۶۳۔ اب تک جتنے مسائل ہم نے ثابت کئے اُن میں اشیا مختلف تھیں اس سے پیشتر کہ ہم اُن صورتوں پر غور کریں جن میں اشیا

کے ایک یا ایک سے زیادہ اجتماع متماثل یا متشابہ ہوں، یہ بیان کر دینا ضروری ہوگا کہ کن معانی میں ہم الفاظ **مختلف** اور **متشابہ** کو استعمال کرتے ہیں، اشیا کے مختلف اور غیر متشابہ ہونے سے ہماری یہ مراد ہے کہ دیکھنے میں وہ مختلف ہیں اور ایک دوسری سے بآسانی تمیز ہو سکتی ہیں برعکس اس کے ہم لفظ متماثل یا متشابہ سے ایسی اشیا تعبیر کرتے ہیں جو دیکھنے میں یکساں اور ہر طرح سے مشابہ ہیں اور ایک دوسری سے تمیز نہیں ہوسکتیں۔

۱۶۴۔ فرض کرو کہ ہمیں ایسی بارہ کتابوں کو کسی طاق پر ترتیب دینا ہے جن میں سے ۵ لاطینی ہیں ۴ انگریزی اور باقی مختلف زبانوں میں۔

ہر ایک زبان کی کتابوں میں ایک مشترک خاصیت ہے جسکی وجہ سے وہ سب کی سب ایک ہی جنس میں شمار ہو سکتی ہیں لیکن اگر وہ ایک دوسری سے شناخت ہوسکیں تو ترتیبوں کی تعداد $\underline{|12}$ ہوگی کیونکہ بلحاظ ترتیب کے وہ ایک دوسری سے مختلف ہیں۔

اگر ایک زبان کی کتابیں ایک دوسری سے تمیز نہ ہوسکیں تو اس صورت میں ہمیں ۱۲ اشیا کی ترتیبیں دریافت کرنی چاہئیں جب کہ اُن میں سے ۵ ایک قسم کی ہیں اور ۴ دوسری قسم کی۔ یہ مسئلہ اُن صور جبریہ میں ٹھیک طور پر شامل نہیں ہے جن کی ہم اوپر تحقیق کر چکے ہیں۔

۱۶۵۔ ن اشیا میں سے ف متشابہ اشیا ایک قسم کی ہیں، ق متشابہ اشیا دوسری قسم کی، ر متشابہ اشیا تیسری قسم کی اور باقی سب

مختلف، اگر سب اشیا کی اکٹھی ترتیبیں لگائی جائیں تو اُن کی تعداد دریافت کرو۔

ن اشیا کو ہم ن حروف سے تعبیر کرینگے۔ فرض کرو کہ حرف ا کی تعداد ف ہے، ب کی تعداد ق، اور ج کی تعداد د، اور باقی سب حروف مختلف ہیں۔

فرض کرو کہ مطلوبہ ترتیبوں کی تعداد لا ہے اب اگر ہم ف متشابہ حروف ا کی جگہ ف مختلف حروف رکھ دیں تو لا ترتیبوں میں سے کسی ایک ترتیب سے ہی باقی ماندہ حروف کے مقامات بدلنے کے بغیر ہم |ف نئی ترتیبیں پیدا کرسکتے ہیں۔ اسلئے اگر لا ترتیبوں میں سے ہر ایک میں اس قسم کی تبدیلی کی جائے تو ہمیں لا × |ف ترتیبیں حاصل ہونگی۔

اسی طرح سے اگر ق متشابہ حروف ب کی جگہ ق مختلف حروف رکھ دئے جائیں تو ترتیبوں کی تعداد لا × |ف × |ق ہوگی۔

اسی طرح سے اگر د متشابہ حروف ج کی جگہ د مختلف حروف رکھ دئے جائیں تو اخیر میں ترتیبوں کی تعداد لا × |ف × |ق × |د ہوگی۔

لیکن اب حروف بالکل مختلف ہیں اسلئے وہ آپس میں |ن طرح سے ترتیب دئے جاسکتے ہیں۔

∴ لا |ف × |ق × |د = |ن

یعنی لا = |ن ÷ (|ف |ق |د)

اور یہ ترتیبوں کی تعدادِ مطلوبہ ہے۔

ایسی ہر ایک صورت جس میں سب اشیا مختلف نہ ہوں اسی طرح سے حل ہو سکتی ہے

مثال ۱۔ کتنی مختلف ترتیبیں لفظ "ترترات" سے بن سکتی ہیں۔ جبکہ کل حروف ہر ایک ترتیب میں شامل ہوں۔

یہاں کل سات حروف ہیں جن میں سے چار ت ہیں دو ر اور ایک ا ہے۔ اسلئے ترتیبوں کی تعداد

$$= \frac{7!}{4!\,2!} = \frac{5\times 6\times 7}{2} = 105$$

مثال ۲۔ لفظ "قسطنطنیہ" کے حروف سے کل کتنے مختلف الفاظ بن سکتے ہیں اور اُن میں سے کتنے الفاظ میں دونوں ن متصل ہونگے؟

کل حروف ۸ ہیں جن میں سے دو ط ہیں، دو ن اور باقی مختلف اسلئے الفاظ کی تعداد مطلوبہ $= \frac{8!}{2!\,2!}$

$$= 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 2$$

$$= 5040\times 2 = 10080$$

اگر دونوں ن ہمیشہ اکٹھے رہیں تو ہم اُنہیں ایک حرف خیال کر سکتے ہیں اور ایسا کرنے سے ہمارے پاس صرف ۷ حروف رہیں گے جن میں سے دو ط ہیں اور ان کو آپس میں ترتیب دینے کے مختلف طریقے $= \frac{7!}{2!}$

$$= 2520$$

مثال ۳۔ حاصل ضرب ا۵ س ع۲ ف کے حروف کتنی مختلف

طرح سے اکٹھے ترتیب دئے جا سکتے ہیں۔

کل حروف ۱۱ ہیں جن میں سے پانچ ا ہیں اور چار ع
اسلئے اُنہیں ترتیب دینے کے کل مختلف طریقے $= \frac{۱۱!}{۵!\,۴!}$

$= ۷ \times ۲ \times ۹ \times ۱۰ \times ۱۱$

$= ۱۳۸۶۰$

مثال ۴۔ اگر طاق ہندسے ہمیشہ طاق مقامات پر لکھے جائیں تو معلوم کرو کہ مفصلہ ذیل سات ہندسوں سے کل کتنے مختلف اعداد بن سکتے ہیں۔

۱، ۲، ۳، ۴، ۳، ۲، ۱

طاق ہندسے ۱، ۳، ۳، ۱ ہیں ان کو چار طاق مقامات میں ترتیب دینے کے طریقے $= \frac{۴!}{۲!\,۲!}$ .... (۱)

جفت ہندسوں ۲، ۴، ۲ کو تین جفت مقامات میں ترتیب دینے کے طریقے $= \frac{۳!}{۲!}$ .... (۲)

(۱) کا ہر ایک طریقہ (۲) کے ہر ایک طریقے سے منسلک ہو سکتا ہے

اسلئے اعداد مطلوبہ کی تعداد $= \frac{۴!}{۲!\,۲!} \times \frac{۳!}{۲!} = ۶ \times ۳ = ۱۸$۔

مثال ۵۔ دس لاکھ سے بڑے کتنے اعداد سات ہندسوں ۲، ۳، ۰، ۳، ۴، ۲، ۳ سے بن سکتے ہیں

چونکہ ہر ایک عدد میں کم از کم سات ہندسے ہونے چاہئیں اسلئے ہمیں اوپر کے سب ہندسے اکٹھے استعمال کرنے پڑینگے۔

اب ان سات ہندسوں میں دو ۲ ہیں اور تین ۳ اسلئے انہیں آپس میں ترتیب دینے کے مختلف طریقے = $\frac{|7}{|3\ |2}$ = ۴۲۰
لیکن ان میں وہ ترتیبیں بھی شامل ہیں جن میں بائیں طرف سب سے پہلا ہندسہ صفر ہے چونکہ وہ اعداد مطلوبہ نہیں ہیں اسلئے انہیں خارج کرنا چاہیئے۔

صریحاً صفر سے اس طرح شروع ہونے والی ترتیبوں کی تعداد وہی ہے جو باقی ۶ ہندسوں کو آپس میں ترتیب دینے کی تعداد ہے

اسلئے انکی تعداد = $\frac{|6}{|3\ |2}$ = ۶۰

پس تعداد مطلوبہ = ۴۲۰ - ۶۰ = ۳۶۰

۱۶۶- ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کی ترتیبیں اُس صورت میں دریافت کرو جبکہ ہر ایک شے کسی ایک ترتیب میں ایک مرتبہ، دو مرتبہ، تین مرتبہ، ..... ر مرتبہ تکرار پاسکے۔

اس جگہ ن مختلف اشیا سے ر مقامات پُر کرنے مطلوب ہیں جبکہ کسی ایک ترتیب میں ن اشیا میں سے کسی ایک شے کو ہم جتنی دفعہ چاہیں استعمال کرسکتے ہیں

پہلا مقام ن طرح سے پُر ہوسکتا ہے۔ اور جب یہ کسی ایک طرح سے پُر ہوجائے تو دوسرا بھی ن طرح سے پُر ہوسکتا ہے کیونکہ شرائط سوال سے ایک ہی شے کو دوبارہ استعمال کرنے کی اجازت ہے۔ اسلئے پہلے دو مقامات پُر کرنے کے طریقے ن × ن یا ن^2 ہیں تیسرا مقام ن طرح سے پُر ہوسکتا ہے اور اسلئے پہلے تین

مقامات n^r طریقوں سے پُر ہو سکتے ہیں۔
اسی طرح عمل کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ ہر ایک منزل پر n کا قوت نما پُر کردہ مقامات کی تعداد کے برابر ہے اسلئے r مقامات پُر کرنے کے کل طریقے n^r ہیں

مثال۔ کسی اسکول کے سالانہ جلسہ پر ۵ انعام ۴ لڑکوں کو دیئے جائیں گے۔ اگر ہر ایک لڑکا ایک یا ایک سے زیادہ انعاموں کا مستحق ہو سکے تو معلوم کرو کہ کتنی طرح سے انعام تقسیم ہو سکتے ہیں۔

پانچ انعاموں میں سے کوئی سا انعام ۴ طریقوں سے دیا جاسکتا ہے اور پھر باقی ماندہ انعاموں میں سے کوئی سا ۴ طریقوں سے دیا جا سکتا ہے کیونکہ یہ اُسی لڑکے کو دیا جاسکتا ہے جو پہلے انعام لے چکا ہے۔ اس طرح سے دو انعام 4^2 طریقوں سے اور تین انعام 4^3 طریقوں سے تقسیم ہو سکتے ہیں اور علیٰ ہذا القیاس۔ اسلئے پانچوں انعام 4^5 یعنی ۱۰۲۴ طرح سے تقسیم ہو سکتے ہیں۔

۱۶۷۔ n اشیا میں سے چند یا سب اشیا منتخب کرنے کے کل ممکن طریقے دریافت کرو۔

ایسے انتخابوں میں ہر ایک شے پر دو طرح کا عمل ہو سکتا ہے یعنی وہ لی جاسکتی ہے یا چھوڑی جاسکتی ہے اور چونکہ ایسے طرزِ عمل کے مختلف طریقے آپس میں منسلک ہو سکتے ہیں اس لئے n اشیا پر ایسا عمل کرنے کے کل طریقے

$= 2 \times 2 \times 2 \times \cdots\cdots$ n اجزاءِ ضربی تک

مگر اس میں وہ صورت بھی شامل ہے جس میں تمام اشیا چھوڑ دی گئی

ہیں اور کوئی منتخب نہیں کی گئی اسلئے اگر اسکو خارج کر دیا جائے تو مطلوبہ طریقوں کی تعداد $۲^{ن} - ۱$ ہوگی۔

اس کو بعض اوقات یوں بیان کرتے ہیں کہ ن اشیا کے کل ممکن اجتماعوں کی تعداد" $۲^{ن} - ۱$ ہے

مثال۔ ایک شخص کے ۶ دوست ہیں وہ اُن میں سے ایک یا زیادہ کو کتنی طرح سے مہمان بلا سکتا ہے؟

اُسے اپنے چھ احباب میں سے چند یا سب کے سب منتخب کرنے ہیں۔

اسلئے کل طریقے = $۲^{۶} - ۱ = ۶۳$

اس کی تصدیق اس طرح ہو سکتی ہے

مہمانوں میں سے ایک ایک، دو دو، تین تین، .... بلائے جا سکتے ہیں۔ اسلئے انتخابوں کی کل تعداد = ${}_{۶}ج_{۱} + {}_{۶}ج_{۲} + {}_{۶}ج_{۳} + {}_{۶}ج_{۴} + {}_{۶}ج_{۵} + {}_{۶}ج_{۶}$

$= ۶ + ۱۵ + ۲۰ + ۱۵ + ۶ + ۱ = ۶۳$

۱۶۸۔ ر کی کس قیمت کے لئے ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے اجتماعوں کی تعداد بڑی سے بڑی ہوگی؟

سلسلہ ${}_{ن}ج_{۱}$، ${}_{ن}ج_{۲}$، ${}_{ن}ج_{۳}$، .... ${}_{ن}ج_{ن}$ پر غور کرو

ہمیں یہ معلوم کرنا ہے کہ اس سلسلے کی کون سی رقم سب سے بڑی ہے یا دوسرے الفاظ میں ہمیں یہ معلوم کرنا ہے کہ ۱، ۲، ۳، ..... میں سے کون سی قیمت ر کو دی جائے کہ ${}_{ن}ج_{ر}$ کی قیمت بڑی سے بڑی ہو

$$\text{چونکہ } {}_{ن}ج_{ر} = \frac{ن(ن-۱)(ن-۲) \ldots\ldots\ldots (ن-ر+۲)(ن-ر+۱)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots\ldots\ldots (ر-۱)\, ر}$$

اور $_{ن}ج_{ر-۱} = \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\ldots\ldots(ن-ر+۲)}{۱×۲×۳×\ldots\ldots(ر-۱)}$

اسلئے $_{ن}ج_{ر} = {}_{ن}ج_{ر-۱} × \frac{ن-ر+۱}{ر}$

ضارب جزضربی $\frac{ن-ر+۱}{ر}$ اس صورت میں بھی لکھا جا سکتا ہے یعنی $\frac{ن+۱}{ر}-۱$، اس سے ظاہر ہے کہ جیسے ر کی قیمت بڑھتی ہے ویسے اس جزضربی کی قیمت گھٹتی ہے پس اگر ر کو قیمتیں ۱، ۲، ۳، .... بالترتیب دی جائیں تو $_{ن}ج_{ر}$ کی قیمت متواتر بڑھتی جائے گی جب تک کہ جزضربی $\frac{ن+۱}{ر}-۱$ ایک کے برابر یا ایک سے کم نہ ہو جائے۔

اب $\frac{ن+۱}{ر}-۱ > ۱$

جب تک کہ $\frac{ن+۱}{ر} > ۲$

یعنی $\frac{ن+۱}{۲} > ر$ .... (۱)

اس نسبت غیر مساوی کے موافق ہمیں ر کی بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرنی ہے۔

صورت اوّل اگر ن جفت ہو اور ۲م کے برابر ہو تو

$$\frac{ن+۱}{۲} = \frac{۲م+۱}{۲} = م+\frac{۱}{۲}$$

اب اگر ر کو سب قیمتیں ۱، ۲، ۳، ..... م تک (مع قیمت م کے) یکے بعد دیگرے دی جائیں تو ان قیمتوں کے لئے $\frac{ن+۱}{۲}$ یعنی $م+\frac{۱}{۲}$ ہر ایک صورت میں ر سے بڑا ہے یعنی ر کی ایسی تمام

قیمتوں کے لئے شرائط نسبت (۱) پوری ہوتی ہیں اسلئے ر کو م یعنی $\frac{\text{ن}}{۲}$ کے مساوی رکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ اس صورت میں اجتماعوں کی بڑی سے بڑی تعداد $_{\text{ن}}\text{ج}_{\frac{\text{ن}}{۲}}$ ہے

صورت دوم فرض کرو کہ ن طاق ہے اور ۲م+۱ کے برابر ہے تو

$$\frac{\text{ن}+۱}{۲} = \frac{۲\text{م}+۲}{۲} = \text{م}+۱$$

اب اگر ر کو تمام قیمتیں ۱، ۲، ۳..... م تک (مع قیمت م کے) یکے بعد دیگرے دی جائیں تو ان سب قیمتوں کے لئے $\frac{\text{ن}+۱}{۲}$ یعنی م+۱ ہر ایک صورت میں ر سے بڑا ہے لیکن جب ر=م+۱ تو جزء منہی

$$\frac{\text{ن}-\text{ر}+۱}{\text{ر}} = \frac{۲\text{م}+۱-\text{م}-۱+۱}{\text{م}+۱} = ۱ \quad \text{اور}$$

$$_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{م}+۱} = {}_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{م}} \quad \text{یعنی} \quad _{\text{ن}}\text{ج}_{\frac{\text{ن}+۱}{۲}} = {}_{\text{ن}}\text{ج}_{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}$$

اور اسلئے اجتماعوں کی تعداد اُس وقت بڑی سے بڑی ہو گی جب کہ ن اشیا میں سے $\frac{\text{ن}+۱}{۲}$ ، یا $\frac{\text{ن}-۱}{۲}$ اشیا کے اجتماع بنائے جائیں اور ماحصل دونوں صورتوں میں ایک ہی ہوگا۔

مثال۔ ایک شخص کے دس دوست ہیں وہ اُنہیں اس طرح مہمان بلانا چاہتا ہے کہ ہر ایک دعوت میں مہمانوں کی تعداد ایک ہی ہو اور کسی دو دعوتوں میں وہی مہمان نہ آئیں اگر وہ زیادہ سے زیادہ ایسی دعوتیں دینا چاہے تو معلوم کرو کہ ہر مرتبہ کتنے مہمان بلائے۔

مہمانوں کی مختلف جماعتیں = $_{۱۰}\text{ج}_{\text{ر}}$ جہاں ر مہمانوں کی تعداد ہے

$$_{۱۰}\text{ج}_{\text{ر}} = \frac{۱۰\times۹\times۸\times\ldots\ldots(۱۲-\text{ر})(۱۱-\text{ر})}{۱\times۲\times\ldots\ldots(\text{ر}-۱)\text{ر}}$$

$$ج_{۱۰،ر-۱} = \frac{۱۰×۹×۸× \ldots\ldots (۱۲-ر)}{۱×۲× \ldots\ldots (ر-۱)}$$

$$\frac{ج_{۱۰،ر}}{ج_{۱۰،ر-۱}} = \frac{۱۱-ر}{ر}$$

اب $ج_{۱۰،ر} > ج_{۱۰،ر-۱}$

اگر $۱۱-ر > ر$

یعنی $۱۱ > ۲ر$

یعنی $\frac{۱۱}{۲} > ر$ .... (۱)

پس غیر مساوات (۱) کے موافق ر کی بڑی سے بڑی قیمت ۵ ہے معلوم ہوا کہ اُسے ہر مرتبہ ۵ مہمان بلانے چاہئیں۔

۱۶۹۔ قاعدہ ترتیب اشیا دفعہ ۱۵۶ کی استعانت کے بغیر ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے اجتماعوں کی تعداد دریافت ہوسکتی ہے۔

فرض کرو کہ ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے کل اجتماع $ج_{ن،ر}$ سے تعبیر ہوتے ہیں اور ن حروف ا، ب، ج، د وغیرہ ن اشیاء معینہ کو تعبیر کرتے ہیں۔

حروف ا، ب، ج، د وغیرہ میں سے ا کو علیحدہ کردو اور باقی ن-۱ حروف میں سے ر-۱، ر-۱ اشیا کے $ج_{ن-۱،ر-۱}$ اجتماع بناؤ اب ان سب اجتماعوں کے ساتھ ا کو لکھدو تو معلوم ہوگا کہ ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے ایسے اجتماع جن میں ا شامل ہے $ج_{ن-۱،ر-۱}$ ہیں

اسی طرح سے اُن اجتماعوں کی تعداد جن میں ب شامل ہے ${}_{ن-۱}ج_{ر-۱}$ ہیں اور اسی طرح ن حروف میں سے ہر ایک حرف کے لئے -

اسلئے ن × ${}_{ن-۱}ج_{ر-۱}$ = ر، ر اشیا کے اجتماع جن میں ا شامل ہے + ر، ر اشیا کے اجتماع جن میں ب شامل ہے + ر، ر اشیا کے اجتماع جن میں ج شامل ہے + علیٰ ہذالقیاس

لیکن اس طرح اجتماع بنانے میں ہر ایک اجتماع ر دفعہ مکرر آئیگا مثلاً اجتماع ا ب ج د ...... (جس میں ر حروف ہیں) ایک ایک دفعہ اُن سب اجتماعوں میں واقع ہوگا جن میں ا شامل ہے جن میں ب شامل ہے جن میں ج شامل ہے اور علیٰ ہذالقیاس

پس معلوم ہوا کہ

$${}_{ن}ج_{ر} = {}_{ن-۱}ج_{ر-۱} \times \frac{ن}{ر}$$

ن اور ر کی جگہ بالترتیب ن-۱ اور ر-۱ لکھنے سے

$${}_{ن-۱}ج_{ر-۱} = {}_{ن-۲}ج_{ر-۲} \times \frac{ن-۱}{ر-۱}$$

اسی طرح سے $${}_{ن-۲}ج_{ر-۲} = {}_{ن-۳}ج_{ر-۳} \times \frac{ن-۲}{ر-۲}$$

....

$${}_{ن-ر+۲}ج_{۲} = {}_{ن-ر+۱}ج_{۱} \times \frac{ن-ر+۲}{۲}$$

$${}_{ن-ر+۱}ج_{۱} = ن-ر+۱$$

عمودی سطروں کو آپس میں اکٹھا ضرب دو اور متماثل ارقام کو طرفین

سے خارج کرو تو حاصل ہوگا۔

$$ {}_{ن}ج_{ر} = \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\ldots\ldots(ن-ر+۱)}{ر(ر-۱)(ر-۲)\ldots۱} $$

۱۷۰۔ ثابت کرو کہ $ {}_{ن}ج_{ر} + {}_{ن}ج_{ر-۱} = {}_{ن+۱}ج_{ر} $

$ {}_{ن}ج_{ر-۱} $ سے اُن اجتماعوں کی تعداد تعبیر ہوتی ہے جو ن+۱ اشیا میں سے ر، ر اشیا اکٹھی لینے سے حاصل ہوتے ہیں اور جن میں ایک خاص شے ہمیشہ شامل ہوتی ہے نیز $ {}_{ن}ج_{ر} $ اُن اجتماعوں کی تعداد ہے جو ن+۱ اشیا میں سے ر، ر اشیا منتخب کرنے سے حاصل ہوتے ہیں اور جنہیں وہ خاص شے شامل نہیں ہوتی۔

ان دونوں کا مجموعہ ن+۱ اشیا میں سے ر، ر اشیا کے اجتماعوں کی تعداد کے برابر ہے۔

$$ \therefore \quad {}_{ن}ج_{ر} + {}_{ن}ج_{ر-۱} = {}_{ن+۱}ج_{ر} $$

بطور ایک مثال کے اس نتیجے کو $ {}_{ن}ج_{ر} $ کی قیمت سے ثابت کرو۔

۱۷۱۔ اگر ف + ق + ر + ... اشیا میں سے ف متشابہ اشیا ایک قسم کی ہوں، ق متشابہ اشیا دوسری قسم کی، ر متشابہ اشیا تیسری قسم کی اور علیٰ ہذا القیاس تو ان میں سے چند یا سب کی سب اشیا منتخب کرنے کے کل ممکن طریقے دریافت کرو۔

ایسے انتخابوں میں ف اشیا ف+۱ طرح سے استعمال میں آسکتی ہیں کیونکہ ہم ان میں سے ۰، ۱، ۲، ۳، ...... ف اشیا منتخب کر سکتے ہیں اسی طرح سے ق اشیا ق+۱ طرح سے استعمال

میں آسکتی ہیں، ر اشیا ر+۱ طرح سے اور علیٰ ہٰذا القیاس اسلئے سب اشیا کو استعمال میں لانے کے کل طریقے (ف+۱)(ق+۱)(ر+۱) .... ہیں لیکن ان میں وہ طریقہ بھی شامل ہے جب کوئی شے بھی منتخب نہ کی گئی ہو اس صورت کو خارج کرنے سے کل مطلوبہ طریقوں کی تعداد = (ف+۱)(ق+۱)(ر+۱) .... −۱

۱۷۲- جب کل اشیا مختلف نہ ہوں تو ن اشیا میں سے د، ر اشیا کے اجتماع یا ترتیبیں معلوم کرنے کا عام قاعدہ ذرا پیچیدہ ہوگا لیکن اس کی خاص صورتیں اس طرح حل ہوسکتی ہیں۔

مثال- لفظ "متمنیات" کے حروف سے چار چار حروف کے (۱) اجتماع (۲) ترتیبیں کتنی مختلف طرح سے بن سکتی ہیں۔

یہاں ۵ مختلف اقسام کے ۸ حروف ہیں م، م و ت، ت و ن، ن ی و ا، چار چار حروف کے مجموعے مفصلہ ذیل حروف کو اکٹھا کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

(۱) دو متشابہ حروف ، دو اور متشابہ حروف

(۲) دو متشابہ ، دو مختلف

(۳) چاروں مختلف

(۱) یہ انتخاب ۳ج۲ طرح سے ہوسکتا ہے کیونکہ ۳ جوڑوں م، م و ت، ت و ن، ن میں سے ہمیں صرف ۲ منتخب کرنے ہیں پس اس قسم کے اجتماع ۳ج۲ = ۳

(۲) یہ انتخاب ۳ × ۶ طرح سے ہوسکتا ہے کیونکہ حروف کا صرف ایک جوڑا لینا ہے اور باقی ۴ قسم کے حروف میں سے دو حروف منتخب

کرنے ہیں پس اس صورت میں اجتماعوں کی تعداد ۱۸ ہے ۔
(۳) یہ انتخاب ج طرح سے ہوسکتا ہے کیونکہ ۵ حروف م، ت، ا، ن ہی ۱ا
میں سے ہمیں صرف ۴ حروف منتخب کرنے ہیں ان اجتماعونکی تعداد ۵ ہے
پس کل مطلوبہ اجتماعوں کی تعداد = ۳ + ۱۸ + ۵ = ۲۶
چار چار حروف کی مختلف ترتیبیں معلوم کرنے کے لئے ہمیں مندرجہ بالا اجتماعوں میں سے ہر ایک کو آپسمیں تمام ممکن طریقوں سے ترتیب دینا چاہیئے

(۱) سے $3 \times \frac{|4}{|2 \times |2}$ یا ۱۸ ترتیبیں حاصل ہوتی ہیں

(۲) سے $\frac{|4 \times 18}{|2}$ یا ۲۱۶ " "

(۳) سے $|4 \times 5$ یا ۱۲۰ " "

مطلوبہ ترتیبوں کی تعداد = ۱۸ + ۲۱۶ + ۱۲۰ = ۳۵۴

مدوّر ترتیبیں

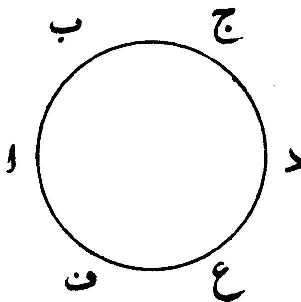
۳۱۷ - اشیا کی ترتیبیں لگاتے وقت اُن کو بالعموم ایک خط مستقیم پر ترتیب دیا ہوا فرض کرتے ہیں ایسی صورت میں ترتیب کا آغاز بھی ہوتا ہے اور انجام بھی اس قسم کی ترتیبوں کو خطی یا عرضی ترتیبیں کہتے ہیں (اب تک ہم نے صرف ایسی ترتیبوں پر غور کیا ہے) لیکن اگر ہم اشیا کو دائرے کے محیط پر بالقرینہ ترتیب دیں تو ترتیب کا نہ آغاز ہے نہ انجام ایسی ترتیب کو ترتیب مدور یا گول ترتیب کہتے ہیں ۔

اگر کسی خط مستقیم پر اشیا ا ب ج د ع ف اور ف ا ب ج د ع کو ترتیب دیں تو یہ دونوں مختلف ترتیبیں ہونگی جیساکہ ذیل کی

غلطی ترتیبوں سے ظاہر ہے

ا	ب	ج	د	ع	ف
ف	ا	ب	ج	د	ع

اور اگر انہی اشیا کو کسی دائرہ کے محیط پر ترتیب دیں تو اس سے جو ترتیبیں پیدا ہونگی اُن کو ہم مختلف نہیں خیال کر سکتے کیونکہ قوسی ترتیب دونوں کے لئے ایک ہے جیسا کہ شکل ذیل سے ظاہر ہے۔



اب اشیا کی جگہ فرض کرو کہ گول میز کے گرد آدمی بیٹھے ہیں اگر ترتیب ا ب ج د ع ف بدلکر ف ا ب ج د ع ہو جائے تو ظاہر ہے کہ حروف کے اضافی مقامات میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوئی صرف سب کا سب نظام میز کے گرد بقدر ایک مقام کے گھوم گیا ہے اس قسم کی حرکت کو روکنے کے لئے جس سے کوئی نئی ترتیب حاصل نہیں ہوتی ہم ایک شخص کو ایک مقام میں متعین کر دیتے ہیں اور باقی اشخاص کو آپس میں مختلف طرح سے ترتیب دیتے ہیں مثلاً اگر ۶ آدمیوں کو

میز کے گرد بٹھانا منظور ہو تو ایک آدمی کی نشست قائم کرکے باقی ۵ کو آپس میں ۵ طرح سے ترتیب دینا چاہیئے۔

۱۷۴- موتیوں کے ہار

اگر ن مختلف موتیوں کو ایک ہار میں پرونا منظور ہو تو اُنہیں مختلف طرح سے آپس میں ترتیب دینے کے طریقے $\frac{1}{2}$ ن-۱ ہونگے

کیونکہ فرض کرو کہ کسی ہار میں چھ موتی ہیں اور ان کی ترتیب گھڑی کی سوئیوں کی موافق سمت میں ا ب ج د ع ف ہے (دیکھو شکل دفعہ سابق)

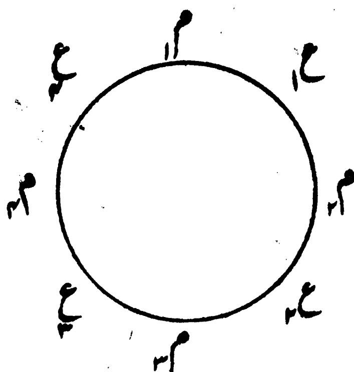
اب اگر ہار کو الٹ دیا جائے اور پہلی ترتیب کو اُسی سمت میں یعنی موافق سمت ساعت پڑھا جائے تو وہ ف ع د ج ب ا ہوگی پس معلوم ہوا کہ دو ترتیبیں جو اشخاص کی صورت میں مختلف تھیں ہار کی حالت میں ایک ہی ہیں۔

اسلیئے ہار کے ن موتیوں کی مختلف ترتیبوں کی تعداد = ن اشخاص کو گول میز کے گرد بٹھانے کی مختلف ترتیبوں کی نصف تعداد کے = $\frac{1}{2}$ ن-۱

مثال ۱- ۴ مرد اور ۴ بچوں کو ایک گول میز کے گرد اسطرح بٹھانے کی کل مختلف ترتیبیں دریافت کرو کہ ہر ایک بچہ دو مردوں کے درمیان ہو۔

ایک مرد کو کسی خاص مقام پر بٹھاؤ اور باقی ۳ کو آپس میں تمام ممکن طریقوں سے ترتیب دو پس مردوں کو بٹھانے کے کل طریقے

= |۳ فرض کرو کہ مردوں کو بٹھانے کا ایک طریقہ شکل ذیل میں مندرج ہے جہاں م = مرد



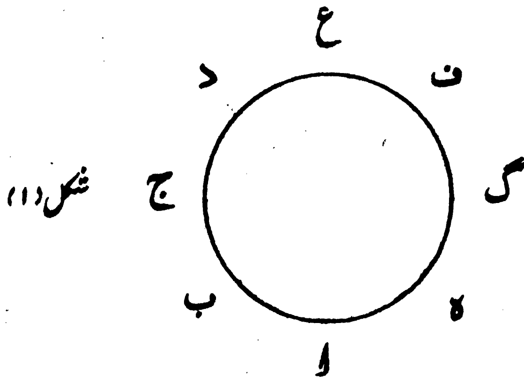
تب صریحاً چار مردوں کے درمیان ۴ مقامات (ع۱، ع۲، ع۳، ع۴) ہیں جو بموجب شرائط سوال چار بچوں کے لئے مخصوص ہیں پس معلوم ہوا کہ مردوں کو بٹھانے کے ایک طریقے کے مقابل بچوں کو بٹھانے کے طریقے |۴ ہیں

پس مطلوبہ طریقوں کی کل تعداد = |۳ × |۴ = ۶ × ۲۴ = ۱۴۴

مثال ۲- کتنی طرح سے ۸ آدمی ایک گول میز کے گرد اس طرح بیٹھ سکتے ہیں کہ کسی دو ترتیبوں میں ان میں سے کسی کے دائیں بائیں وہی پہلو نشین نہ ہوں۔

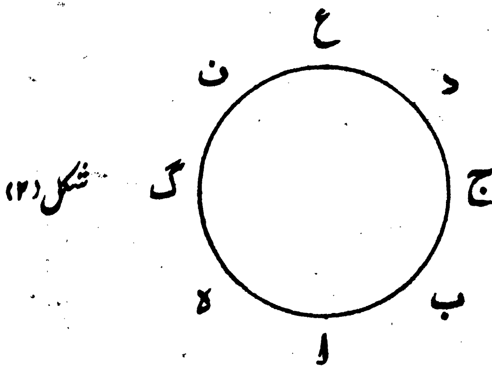
ایک آدمی کو کسی ایک خاص مقام پر بٹھاؤ اور باقی سب کو باہم ترتیب دو ایسا کرنے کے کل طریقے = |۷ = ۵۰۴۰

فرض کرو کہ ایک ترتیب یہ ہے   شکل (۱)



شکل (۱)

اگر ا کو اپنی جگہ سے نہ ہلایا جائے تو صریحاً ۵۰۴۰ ترتیبوں میں ایک اور یہ ہوگی شکل (۲)



شکل (۲)

ظاہر ہے کہ اوپر کی دونوں ترتیبوں میں ۸ آدمیوں میں سے ہر ایک کے وہی پہلو نشین ہیں (مثلاً د کے دائیں بائیں پہلی اور دوسری ترتیب میں ج اور ع ہیں اگرچہ پہلی ترتیب کا دایاں ساتھی دوسری

ترتیب میں بائیں طرف چلا گیا ہے) اور ہم دیکھتے ہیں کہ حروف ب، ج، د، ع، ف، گ، ہ کو خواہ کسی طرح سے گھڑی کی سوئیوں کی موافق سمت میں ترتیب دیا جائے، بعینہٖ اُسی اسلوب سے اُن کو سوئیوں کی مقابل سمت میں ترتیب دیا جا سکتا ہے اور ظاہر ہے کہ اس قسم کی صرف دو ترتیبیں ایسی ہیں جن میں سب کے سب ۸ شخصوں کے وہی پہلو نشین ہیں۔

پس بموجب شرائط سوال ایسی دو ترتیبوں کو صرف ایک ترتیب شمار کرنا چاہیئے اور اسلئے مطلوبہ ترتیبوں کی تعداد $= \frac{1}{2} \times ۵۰۴۰ = ۲۵۲۰$

مثال ۳۔ ایک شخص م + ن دوستوں کو مہمان بلاتا ہے اور م کو ایک گول میز کے گرد بٹھاتا ہے اور ن کو دوسری گول میز کے گرد معلوم کرو کہ آپس میں مہمان کتنی طرح سے ترتیب دئے جا سکتے ہیں۔

م دوستوں کی ایک جماعت منتخب کرتے وقت ہر دفعہ ن دوستوں کی ایک جماعت باقی رہتی ہے پس م اور ن دوستوں کی مختلف جماعتیں

بنانے کے مختلف طریقے $= {}_{م+ن}ج_{م} = \frac{\underline{|م+ن}}{\underline{|م}\ \underline{|ن}}$

اب جماعتیں بنانے کے بعد وہ م دوستوں کو ایک میز کے گرد $\underline{|م-۱}$ طرح سے ترتیب دے سکتا ہے اور ن دوستوں کو دوسری میز کے گرد $\underline{|ن-۱}$ طرح سے۔

اسلئے جماعتیں بنانے کے ہر ایک طریقے کے مقابل مہمانوں کو آپس میں ترتیب دینے کے $\underline{|م-۱} \times \underline{|ن-۱}$ طریقے ہیں

پس مہمانوں کو ترتیب دینے کے کل طریقے $= \frac{\lfloor م+ن}{\lfloor م \ \lfloor ن} \left\{ \lfloor م-۱ \times \lfloor ن-۱ \right\}$

$$= \frac{\lfloor م+ن}{م\ ن}$$

امثلہ نمبری ۱۹

۱۔ ثابت کرو کہ ${}_{ن}پت_{ر} = {}_{ن-۱}پت_{ر} + ر \times {}_{ن-۱}پت_{ر-۱}$

۲۔ ثابت کرو کہ ${}_{ن}ج_{۱} + {}_{ن}ج_{۲} + {}_{ن}ج_{۳} + {}_{ن}ج_{۴} + {}_{ن}ج_{۵} + {}_{ن}ج_{۶} + {}_{ن}ج_{ن} = ۲^{ن}-۱$

۳۔ آٹھ اشیا میں سے ایک یا ایک سے زیادہ اشیا منتخب کرنیکے مختلف طریقے دریافت کرو۔

۴۔ اگر ${}_{ن}پت_{۴} : {}_{ن}ج_{۴} = ۱ : ۵$ تو ن کی قیمت دریافت کرو۔

۵۔ مفصلہ ذیل الفاظ کے حروف سے جو مختلف ترتیبیں بن سکتی ہیں اُن کی تعداد دریافت کرو۔ (۱) دارالترجمہ (۲) ہندوستان (۳) الاستمداد

۶۔ ۱۴ جھنڈیوں سے ایک کمرہ سجانا ہے اگر ان میں ۲ نیلی، ۳ سرخ، ۲ سفید، ۳ سبز، ۲ زرد اور ۲ ارغوانی ہوں تو معلوم کرو کہ وہ کتنی طرح سے اکٹھی لٹکائی جا سکتی ہیں۔

۷۔ دس لاکھ سے بڑے کتنے اعداد ہندسوں ۲، ۳، ۰، ۳، ۴، ۲، ۳ سے بن سکتے ہیں؟

۸۔ کتنی طرح سے ن اشیا ف آدمیوں کو دی جا سکتی ہیں جبکہ ہر ایک آدمی کو کوئی سی تعداد اشیا دی جا سکے۔

۹- کتنی طرح سے پانچ اشیا دو آدمیوں میں تقسیم ہوسکتی ہیں؟

۱۰- اگر ذیل کے جملوں کو مفصل لکھا جائے تو معلوم کرو کہ اُنکے حروف سے کل کتنی مختلف ترتیبیں بن سکتی ہیں (۱) اٙ ب۲ ج۴ (۲) اٙ ب۳ ج۲ د ؟

۱۱- ایک قفل ابجد میں تین حلقے ہیں اور ہر ایک حلقے میں پندرہ مختلف حروف ہیں معلوم کرو کہ کتنی طرح سے قفل کھولنے کی ناکام کوشش ہوسکتی ہے؟

۱۲- پندرہ اضلاع کی کثیر الاضلاع کے تین تین زاویوں کو ملانے سے کل کتنے مثلث بن سکتے ہیں۔

۱۳- کسی کتب خانہ میں ایک کتاب کے ا نسخے ہیں، دو کتابوں میں سے ہر ایک کے ب، تین کتابوں میں سے ہر ایک کے ج اور د کتابوں کا صرف ایک ایک نسخہ ہے اگر یہ سب کی سب کتابیں اکٹھی پڑھنے کے لئے نکالی جائیں تو معلوم کرو کہ وہ کتنی طرح سے تقسیم ہوسکتی ہیں؟

۱۴- آٹھ ہندسوں ۱، ۲، ۳، ۰، ۴، ۵، ۶، ۷ سے کتنے ایسے اعداد بن سکتے ہیں جو ۱۰۰۰۰ سے کم ہوں۔

۱۵- کتنی طرح سے ذیل کے انعام ۲۰ لڑکوں کی ایک جماعت میں تقسیم ہوسکتے ہیں۔ ع.بی کا اول اور دوم، ریاضیات کا اول اور دوم، طبیعات کا اول، اردو کا اوّل؟

۱۶- کتنی طرح سے ۷ آدمی ایک حلقے میں بیٹھ سکتے ہیں اور کتنی طرح سے ۷ انگریز اور ۷ امریکن ایک گول میز کے گرد اسطرح

بیٹھ سکتے ہیں کہ کوئی دو امریکن اکٹھے نہ ہوں ؟

۱۷۔ کتنی طرح سے ۷ مختلف موتی ایک ہار کی شکل میں پروئے جا سکتے ہیں ؟

۱۸۔ کل سات حروف ہیں جن میں سے کچھ ا ہیں اور باقی سب مختلف، اگر ان سب کو اکٹھا ترتیب دیا جائے تو اُن سے کل الفاظ ۲۱۰ بنتے ہیں معلوم کرو کہ ا کتنے ہیں؟

۱۹۔ ایک تھیلی میں سات انگریزی سکے ہیں ساورن، نصف ساورن، کراؤن، فلورن، شلنگ، پنس، فارونگ، کتنی طرح سے کوئی ایک رقم تھیلی میں سے نکالی جا سکتی ہے۔

۲۰۔ ۳ ناریل ۴ سیب اور ۲ نارنگیوں میں سے کل کتنے انتخاب ہو سکتے ہیں اگر ہر ایک قسم کی کم از کم ایک شے منتخب کیجائے۔

۲۱۔ م ن اشیا کو ن برابر حصوں میں تقسیم کرنے کے کل مختلف طریقے دریافت کرو۔

۲۲۔ چار مختلف رنگ کی جھنڈیوں کو ایک دوسرے پر اکٹھا کھڑا کرنے سے کل کتنے نشان بن سکتے ہیں اگر ان میں سے کوئی سی تعداد ایک وقت کھڑی کی جا سکے۔

نیز معلوم کرو کہ ۵ جھنڈیوں سے کتنے نشان بن سکتے ہیں؟

۲۳۔ لفظ "امتداد" کے حروف میں سے تین تین حروف کو اکٹھا ترتیب دینے سے کل کتنے حروف بن سکتے ہیں؟

۲۴۔ ن خطوط مستقیم ایک سطح کو کئی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں اگر ان میں سے نہ تو کوئی دو متوازی ہوں اور نہ کوئی تین

ایک نقطہ میں ملیں تو سطح کے حصوں کی تعداد دریافت کرو۔

۲۵- ایک سطح پر ف نقطے ہیں، ان میں سے کوئی تین ایک خط مستقیم میں نہیں ہیں سوائے ق کے جو سب کے سب ایک ہی خط مستقیم پر واقع ہیں، نقاط کو ملانے سے جو (۱) خطوط مستقیم (۲) مثلثات پیدا ہوں اُن کی تعداد دریافت کرو۔

۲۶- اگر ن مختلف کتابوں میں سے ہر ایک کتاب کے ف نسخے ہوں تو اُن میں سے کل ممکن انتخابوں کی تعداد دریافت کرو۔

۲۷- جملہ س۲ ع۲ پ ر ک ن و ی کے حروف میں سے چار چار حروف اکٹھے لینے سے جتنے اجتماع اور ترتیبیں بن سکیں اُنکی تعداد دریافت کرو۔

۲۸- جملہ ا۳ ن۲ ی۲ ع ک م ٹ و کے حروف میں سے چار چار حروف کی ترتیبوں کی تعداد دریافت کرو

۲۹- اُن سب اعداد کا مجموعہ دریافت کرو جو ۱۰۰۰۰ سے بڑے ہوں اور ان ہندسوں ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ کو استعمال کرنے سے بنیں اور جن میں کوئی ہندسہ مکرر نہ آئے۔

۳۰- ۱۰۰۰۰ سے بڑے اُن سب اعداد کا مجموعہ دریافت کرو جو ہندسوں ۰، ۲، ۴، ۶، ۸ کو استعمال کرنے سے بنیں اور جنہیں سے کسی میں کوئی ہندسہ مکرر نہ آئے۔

۳۱- اگر ف + ق + ر اشیا میں سے ف متشابہ اشیا ایک طرح کی ہوں ق متشابہ اشیا دوسری طرح کی اور باقی مختلف تو ثابت کرو کہ کل اجتماعوں کی تعداد (ف+۱)(ق+۱) ۲^ر-۱ ہے۔

۳۲- ۲ن حروف میں صرف حروف ا اور ب شامل ہیں ثابت کرو کہ ترتیبوں کی تعداد بڑی سے بڑی اُس وقت ہوگی جب حروف ا کی تعداد حروف ب کی تعداد کے برابر ہو۔

۳۳- اگر ن+۱ اعداد ا ، ب ، ج ، د ..... سب مختلف ہوں اور اُن میں سے ہر ایک عدد مفرد ہو تو ثابت کرو کہ جملہ اُب ج د ...... میں مختلف اجزاء ضربی کی تعداد (م+۱) $۲^{ن}$ -۱ ہے۔

باب دوازدہم

استقراء حسابیہ

۱۷۵- اس ترکیب ثبوت کے موافق کسی مسئلہ عامہ کی صداقت اُس کی کسی خاص صورت سے مستنبط ہوتی ہے، سب سے پہلے ہم اس بات کی تصدیق کرتے ہیں کہ مسئلہ مجوزہ چند سادہ صورتوں کے لئے صحیح ہے یا نہیں، اس کے بعد ہم یہ ثابت کرتے ہیں کہ اگر مسئلہ کسی ایک صورت کے لئے درست ہو تو اُس سے اگلی صورت کے لئے بھی لازماً درست ہوگا، جب یہ بات بخوبی قائم ہو جائے تو ہمیں معلوم ہو گیا کہ اوپر کی تصدیق شدہ سادہ صورتوں سے اگلی صورت کے لئے مسئلہ صحیح ہے اور پھر اُس سے اگلی صورت کے لئے اور علیٰ ہذالقیاس، اس طرح سے بعض اوقات ہم ایسے مسائل اور قوانین حسابیہ کی عمومیت ثابت کر سکتے ہیں جن کا ثبوت کسی طریق راست سے ملنا محال ہو۔

امثلہ ذیل سے اس ترکیب ثبوت کی بخوبی توضیح ہوگی

مثال ۱- استقراء حسابیہ سے ثابت کرو کہ سلسلہ

۱+۳+۶+۱۰+۱۵+ وغیرہ کا مجموعہ $\frac{1}{6}$ ن(ن+۱)(ن+۲) ہے

دو رقموں کا مجموعہ صریحاً ۴ ہے نیز جب ن = ۲ تو

$\frac{1}{6}$ ن (ن + ۱) (ن + ۲) = $\frac{1}{6}$ × ۲ × ۳ × ۴ = ۴ = ۴ پس معلوم ہوا کہ مسئلہ صحیح ہے جبکہ ن = ۲

فرض کرو کہ سلسلہ کی ن ویں رقم $ق_ن$ سے تعبیر ہوتی ہے اور ن ارقام کا مجموعہ م ہے۔

تب　م = ۱ + ۳ + ۶ + ۱۰ + ۱۵ + ... + $ق_ن$

نیز　م = ۰ + ۱ + ۳ + ۶ + ۱۰ + ... + $ق_{ن-۱}$ + $ق_ن$

اسلئے تفریق سے

۰ = (۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ... ن رقموں تک) − $ق_ن$

اسلئے $ق_ن$ = ۱ + ۲ + ۳ + ... ن رقموں تک

= $\frac{ن (ن + ۱)}{۲}$

سلسلہ کی ر ویں رقم = $\frac{ر (ر + ۱)}{۲}$

سلسلہ کی (ر + ۱) ویں رقم = $\frac{(ر + ۱)(ر + ۲)}{۲}$ جہاں ر کوئی عدد ہے

اب مان لو کہ مسئلہ صحیح ہے جب ن = ر

یعنی فرض کرو کہ

۱ + ۳ + ۶ + ۱۰ + ۱۵ + ... + $\frac{ر (ر + ۱)}{۲}$ = $\frac{1}{6}$ ر (ر + ۱)(ر + ۲)

تب لازماً

۱ + ۳ + ۶ + ۱۰ + ۱۵ + ... + $\frac{ر (ر + ۱)}{۲}$ + $\frac{(ر + ۱)(ر + ۲)}{۲}$

= $\frac{1}{6}$ ر (ر + ۱)(ر + ۲) + $\frac{(ر + ۱)(ر + ۲)}{۲}$

= $\frac{(ر + ۱)(ر + ۲)}{۶}$ (ر + ۳)

= ۱/۴ (ر + ۱) (ر + ۲) (ر + ۳)

جس سے ظاہر ہے کہ مسئلہ اُس صورت میں بھی صحیح ہے جب ن = ر + ۱
پس ہم نے ثابت کردیا کہ اگر مسئلہ متعدد ارقام کے لئے صحیح ہو خواہ وہ تعداد ارقام کچھ ہی ہو تو وہ اُس تعداد کے لئے بھی صحیح ہوگا جو مجوزہ تعداد سے بقدر ایک کے زیادہ ہے۔

لیکن ہمیں معلوم ہے کہ مسئلہ دو رقموں کے لئے صحیح ہے اس لئے وہ تین کے لئے بھی صحیح ہے، اسلئے چار کے لئے اور علیٰ ہذا القیاس پس معلوم ہوا کہ مسئلہ بالعموم صحیح ہے۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ پہلے ن طبعی اعداد کے مکعبوں کا مجموعہ

{ن (ن + ۱) / ۲}^۲ ہے

[ن (ن + ۱) / ۲]^۲ میں ن کی بجائے عددی قیمتیں ۱ یا ۲ یا ۳ مندرج کرنے سے معلوم ہوگا کہ مسئلہ چند سادہ صورتوں میں صحیح ہے اس سے یہ قیاس پیدا ہوتا ہے کہ شاید یہ تمام صورتوں میں صحیح ہو۔

یہ مان لو کہ مسئلہ ن ارقام کے لئے صحیح ہے یعنی فرض کرو کہ

۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + ... ن رقموں تک = {ن (ن + ۱) / ۲}^۲

طرفین پر (ن + ۱) ویں رقم یعنی (ن + ۱)^۳ زیادہ کرو

∴ ۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + ... (ن + ۱) رقموں تک

= {ن (ن + ۱) / ۲}^۲ + (ن + ۱)^۳

$$= (\text{ن}+1)^2 \left\{ \frac{\text{ن}^2}{4} + \text{ن} + 1 \right\}$$

$$= \frac{(\text{ن}+1)^2(\text{ن}^2+4\text{ن}+4)}{4}$$

$$= \left\{ \frac{(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)}{2} \right\}^2$$

اور اس کی صورت وہی ہے جو ہم نے ن ارقام کے مجموعے کے لئے فرض کی تھی صرف فرق یہ ہے کہ ن کی بجائے ن + ۱ لکھا ہوا ہے، دوسرے الفاظ میں یہ ثابت ہوا کہ اگر یہ نتیجہ کسی خاص تعداد ارقام کے لیئے درست ہو خواہ وہ تعداد ارقام کچھ ہی ہو تو وہ اُسوقت بھی درست ہوگا اگر اُس تعداد کو بقدر ایک کے بڑھا دیا جائے ۔ لیکن ہم جانتے ہیں کہ یہ نتیجہ تین رقموں کے لئے درست ہے اسلئے معلوم ہوا کہ یہ چار رقموں کے لئے بھی درست ہے اسلئے پانچ رقموں کے لئے اور علیٰ ہذا القیاس پس ثابت ہوا کہ یہ نتیجہ بالعموم درست ہے

مثال ۳۔ ن اجزائے ضربی ثنائی (بشکل لا + ا) معلوم ہیں، اُن کا حاصل ضرب دریافت کرو۔

عمل ضرب سے

$$(\text{لا}+\text{ا})(\text{لا}+\text{ب})(\text{لا}+\text{ج}) = \text{لا}^3 + (\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})\,\text{لا}^2$$
$$+ (\text{اب}+\text{اج}+\text{بج})\,\text{لا} + \text{ابج}$$

$$(\text{لا}+\text{ا})(\text{لا}+\text{ب})(\text{لا}+\text{ج})(\text{لا}+\text{د}) = \text{لا}^4 + (\text{ا}+\text{ب}+\text{ج}+\text{د})\,\text{لا}^3$$
$$+ (\text{اب}+\text{اج}+\text{اد}+\text{بج}+\text{بد}+\text{جد})\,\text{لا}^2$$

+ (ا ب ج + ا ب د + ا ج د + ب ج د) لا

+ ا ب ج د

ہم دیکھتے ہیں کہ ان نتائج سے مفصلہ ذیل قوانین صادق آتے ہیں

۱- بائیں طرف کی تعداد ارقام دائیں طرف کے اجزار ضربی کی تعداد سے بقدر ایک کے زیادہ ہے۔

۲- پہلی رقم میں لا کا قوت نما اجزار ضربی کی تعداد کے برابر ہے اور باقی ہر ایک رقم میں لا کا قوت نما رقم ماقبل کے قوت نما سے بقدر ایک کے کم ہے

۳- پہلی رقم کا سر ایک ہے، دوسری رقم کا سر کل حروف ا، ب، ج .... کا مجموعہ ہے، تیسری رقم کا سر انہی حروف میں سے دو دو حروف کے حاصل ضربوں کا مجموعہ ہے، چوتھی رقم کا سر انہی حروف میں سے تین تین حروف کے حاصل ضربوں کا مجموعہ ہے اور علی ہذالقیاس اور آخری رقم کا سر کل حروف کا حاصل ضرب ہے۔

مان لو کہ یہ قوانین ن-۱ اجزار ضربی کے لئے درست ہیں یعنی فرض کرو کہ (لا + ا) (لا + ب) ...... (لا + ھ)

= لا$^{ن-۱}$ + ض$_{۱}$ لا$^{ن-۲}$ + ض$_{۲}$ لا$^{ن-۳}$ + ض$_{۳}$ لا$^{ن-۴}$ + ... + ض$_{ن-۱}$

جہاں ض$_{۱}$ = ا + ب + ج + ... + ھ

ض$_{۲}$ = ا ب + ا ج + ... + ا ھ + ب ج + ب د + ...

ض$_{۳}$ = ا ب ج + ا ب د + ...

....

ض$_{ن-۱}$ = ا ب ج ..... ھ

طرفین کو (لا + ک) میں ضرب دینے سے

(لا + ا) (لا + ب) ۔۔۔ (لا + ھ) (لا + ک)

= لا$^{\text{ن}}$ + (ض$_{1}$ + ک) لا$^{\text{ن}-1}$ + (ض$_{2}$ + ض$_{1}$ ک) لا$^{\text{ن}-2}$

+ (ض$_{3}$ + ض$_{2}$ ک) لا$^{\text{ن}-3}$ + ... + ض$_{\text{ن}-1}$ ک

اب ض$_{1}$ + ک = (ا + ب + ج + ... + ھ) + ک

= کل ن حروف ا، ب، ج، .... ک کا مجموعہ

ض$_{2}$ + ض$_{1}$ ک = ض$_{2}$ + ک (ا + ب + ... ھ)

= ن حروف ا، ب، ج، ...... ک میں سے

دو دو حروف کے حاصلضربوں کا مجموعہ

ض$_{3}$ + ض$_{2}$ ک = ض$_{3}$ + ک (اب + اج + ... + اھ + ب ج + ...)

= ن حروف ا، ب، ج، ...... ک میں سے تین تین

حروف کے حاصل ضربوں کا مجموعہ

ض$_{\text{ن}-1}$ × ک = کل ن حروف ا، ب، ج، ..... ک کا حاصل ضرب

پس معلوم ہوا کہ اگر یہ قوانین اُس صورتیں درست ہوں جبکہ صرف (ن - ۱) اجزائے ضربی کو آپس میں ضرب دی جائے تو وہ ن اجزائے ضربی کی صورت میں بھی درست ثابت ہوتے ہیں، لیکن ہم نے عمل ضرب سے اوپر ثابت کیا ہے کہ وہ چار اجزائے ضربی کے لئے درست ہیں اسلئے وہ پانچ اجزائے ضربی کے لئے بھی درست ہیں اسلئے چھ کے لئے اور علیٰ ہذا القیاس یعنی وہ بالعموم درست ہیں اسلئے

(لا + ا)(لا + ب)(لا + ج) .... (لا + ک)

= لا$^{\text{ن}}$ + م$_{1}$ لا$^{\text{ن}-1}$ + م$_{2}$ لا$^{\text{ن}-2}$ + م$_{3}$ لا$^{\text{ن}-3}$ + ... + م$_{\text{ن}}$

جہاں $م_1$ = کل ن حروف ا، ب، ج، .... ک کا مجموعہ
$م_2$ = ن حروف میں سے دو دو حروف کے حاصل ضربوں کا مجموعہ

- -

$م_ن$ = کل ن حروف کا حاصل ضرب

۱۷۶۔ عمل تقسیم کے متعلق کئی ایسے مسائل ہیں جو استقرار حسابیہ سے بآسانی ثابت ہو سکتے ہیں۔

مثال۔ ثابت کرو کہ ن کی تمام مثبت صحیح قیمتوں کے لئے $لا^ن - ۱$ جملہ لا - ۱ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔

عمل تقسیم سے $\frac{لا^ن - ۱}{لا - ۱} = لا^{ن-۱} + \frac{لا^{ن-۱} - ۱}{لا - ۱}$

اس سے معلوم ہوا کہ اگر $لا^{ن-۱} - ۱$ جملہ لا - ۱ پر پورا تقسیم ہو سکے تو $لا^ن - ۱$ بھی لا - ۱ پر پورا تقسیم ہو سکے گا مگر $لا^۲ - ۱$ جملہ لا - ۱ پر پورا تقسیم ہوتا ہے اسلئے $لا^۳ - ۱$ بھی لا - ۱ پر تقسیم ہو سکتا ہے اسلئے $لا^۴ - ۱$ بھی اور علیٰ ہذا القیاس پس مسئلہ ثابت ہوا

اس باب کی مثالوں سے ظاہر ہے کہ ترکیب استقراء صرف انہی مسائل کے ثابت کرنے میں استعمال ہو سکتی ہے جن میں طبعی اعداد ۱، ۲، ۳، ...... ن کی ترتیب کے موافق متسلسل صورتیں پیدا ہوں

امثلہ نمبری ۲۰

استقراء حسابیہ سے ثابت کرو کہ

۱۔ $۱ + ۳ + ۵ + \cdots\cdots + (۲ن - ۱) = ن^۲$

۲۔ $۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \cdots\cdots + ن^۲$

$= \frac{۱}{۶} ن (ن + ۱)(۲ن + ۱)$

۳۔ $۲ + ۲^۲ + ۲^۳ + \cdots\cdots + ۲^ن = ۲(۲^ن - ۱)$

۴۔ $\frac{۱}{۱ \times ۲} + \frac{۱}{۲ \times ۳} + \frac{۱}{۳ \times ۴} + \cdots\cdots$ ن ارقام تک

$= \frac{ن}{ن + ۱}$

۵۔ اگر ن جفت ہو تو استقرار حسابیہ سے ثابت کرو کہ $لا^ن - ما^ن$ جملہ لا ـ ما پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔

باب سیزدہم

مسئلہ ثنائی

۱۷۷۔ ضرب دینے سے ظاہر ہے کہ

(لا + ا)(لا + ب)(لا + ج)(لا + د) = لا^{4} + (ا + ب + ج + د) لا^{3} + (اب + اج + اد + ب ج + ب د + ج د) لا^{2} + (اب ج + اب د + اج د + ب ج د) لا + اب ج د .... (۱)

مگر سرسری نظر سے ہم اس نتیجہ پر پہنچ سکتے ہیں کیونکہ چار چار حروف کا مکمل حاصل ضرب اُن جزوی حاصل ضربوں کا مجموعہ ہے جو دائیں طرف کے چار اجزائے ضربی میں سے ایک ایک حرف منتخب کرنے اور انکو باہم ضرب دینے سے حاصل ہوتے ہیں اگر ہم مختلف جزوی حاصلضربوں کا بغور ملاحظہ کریں تو معلوم ہوگا کہ

(۱) رقم لا^{4} ہر ایک جزوِ ضربی سے حرف لا لینے سے بنتی ہے

(۲) ارقام جن میں لا^{3} شامل ہے اس طرح بنتی ہیں کہ تمام ممکن طریقوں سے حرف لا کو کسی تین اجزاء ضربی میں سے منتخب کیا جائے اور ساتھ ہی حروف ا، ب، ج، د میں سے ایک حرف کو باقیماندہ جزوِ ضربی سے لیا جائے۔

(۳) ارقام جن میں لا^{2} شامل ہے اس طرح بنتی ہیں کہ حرف لا کو کل ممکن طریقوں سے کسی دو اجزاء ضربی میں سے منتخب کیا جائے

اور ساتھ ہی حروف ا ، ب ، ج ، د میں سے دو حروف کو باقی ماندہ دو اجزائے ضربی سے لیا جائے۔

(۴) ارقام جن میں لا شامل ہے حرف لا کو کسی ایک جزو ضربی سے اور حروف ا ، ب ، ج ، د میں سے تین حروف کو باقی ماندہ اجزائے ضربی سے لینے سے بنتی ہیں۔

(۵) رقم مطلق یعنی وہ رقم جس میں لا شامل نہ ہو کل حروف ا ، ب ، ج ، د کا حاصل ضرب ہے۔

مثال ۱۔ (لا-۲)(لا+۳)(لا-۵)(لا+۹)

=لا^۴+(-۲+۳-۵+۹)لا^۳+(-۶+۱۰-۱۸-۱۵+۲۷-۴۵)لا^۲

+(۳۰-۵۴+۹۰-۱۳۵)لا+۲۷۰

=لا^۴+۵لا^۳-۴۷لا^۲-۶۹لا+۲۷۰

مثال ۲۔ حاصل ضرب (لا-۳)(لا+۵)(لا-۱)(لا+۲)(لا-۸) میں لا^۳ کا سر عددی دریافت کرو۔

ارقام جن میں لا^۳ شامل ہے کسی تین اجزائے ضربی کے حروف "لا" کو باقی ماندہ دو اجزائے ضربی کی دو عددی مقادیر کے ساتھ ضرب دینے سے بنتی ہیں اسلئے سر عددی مطلوب مقادیر -۳، ۵، -۱، ۲، -۸ میں سے دو دو کے حاصل ضرب کے مجموعے کے برابر ہے۔

سر مطلوب = -۱۵+۳-۶+۲۴-۵+۱۰-۴۰-۲+۸-۱۶

= -۳۹

۱۷۸۔ اگر مساوات (۱) دفعہ گزشتہ میں فرض کریں کہ

ا = ب = ج = د تو حاصل ہوگا

(لا + ا)^{۴} = لا^{۴} + ۴ ا لا^{۳} + ۶ ا^{۲} لا^{۲} + ۴ ا^{۳} لا + ا^{۴}

ایک عام نتیجے سے اُس کی خاص صورت مستنبط کرنے کی ترکیب جو اوپر بیان ہوئی اکثر علم ریاضی میں کام آتی ہے کیونکہ کئی مرتبہ ایک مسئلہ عامہ کا ثابت کرنا اُس کی خاص صورتوں کے اثبات سے زیادہ آسان ہوتا ہے دفعہ ذیل میں ہم مسئلہ ثنائی کو اسی طریقے سے ثابت کرینگے۔ مسئلہ مذکورہ کی استعانت سے جملہ ثنائی جس کی صورت عامہ لا + ا ہے کسی مثبت صحیح قوت میں اُٹھایا جا سکتا ہے

۱۷۹۔ اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو جملہ (لا + ا)^{ن} کی صورت تفصیلی دریافت کرو۔

جملہ (لا + ا)(لا + ب)(لا + ج) .... (لا + ک) پر غور کرو

اس میں اجزائے ضربی کی تعداد ن ہے

جملہ مذکورہ کی صورت تفصیلی ن اجزائے ضربی لا + ا، لا + ب، لا + ج، .... و لا + ک کا متواتر حاصل ضرب ہے اور اسمیں ہر ایک رقم کے قوت نماؤں کا مجموعہ ن ہے کیونکہ یہ رقم ن حروف کے باہم ضرب ہونے سے اس طرح حاصل ہوتی ہے کہ مندرجہ بالا ن اجزائے ضربی میں سے ہر ایک جز ضربی سے صرف ایک ایک حرف کو منتخب کیا جائے۔

لا کی سب سے اعلیٰ قوت لا^{ن} ہے اور یہ ن اجزاء ضربی میں سے ہر ایک جز ضربی سے حرف لا لینے اور ان سب کو اکٹھا ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے

ارقام جن میں لا^ن-۱ شامل ہے اس طرح بنتی ہیں :- حرف لا کو کسی ن-۱ اجزاء ضربی سے لو اور حروف ا، ب، ج، د،..... ک میں سے ایک حرف کو باقی ماندہ جز ضربی سے لیکر ان سب حروف کو اکٹھا ضرب دو، اس طرح سے آخری حاصل ضرب میں لا^ن-۱ کا سرحروف ا، ب، ج، د،..... ک کے مجموعے کے برابر ہوگا اِس کو ص~۱~ سے تعبیر کرو۔

ارقام جن میں لا^ن-۲ شامل ہے اس طرح بنتی ہیں :- حرف لا کو کسی ن-۲ اجزاء ضربی سے لو اور حروف ا، ب ج، د،..... ک میں سے دو حروف کو دو باقی ماندہ اجزاء ضربی سے لیکر اُن سب کو اکٹھا ضرب دو اس طرح سے آخری حاصل ضرب میں لا^ن-۲ کا سرحروف ا، ب، ج، د،..... ک میں سے دو دو حروف کے حاصل ضرب کے مجموعے کے برابر ہوگا، اسکو ص~۲~ سے تعبیر کرو۔

اور بالعموم ارقام جن میں لا^ن-ر شامل ہے اس طرح بنتی ہیں :- حرف لا کو کسی ن-ر اجزاء ضربی سے لو اور حروف ا، ب، ج، د،..... ک میں سے ر حروف کو باقی ماندہ ر اجزاء ضربی سے لیکر ان سب کو اکٹھا ضرب دو، اس طرح سے آخری حاصل ضرب میں لا^ن-ر کا سرحروف ا، ب، ج، د،..... ک میں سے ر، ر حروف کے حاصل ضرب کے مجموعے کے برابر ہوگا، اس کو ص~ر~ سے تعبیر کرو۔

آخری حاصل ضرب میں رقم آخر ا ب ج .... ک ہے، اسکو ص~ن~ سے تعبیر کرو۔

اسلئے (لا+ا)(لا+ب)(لا+ج) .... (لا+ک)

$$= لا^{ن} + ص_{۱} لا^{ن-۱} + ص_{۲} لا^{ن-۲} + \cdots\cdots + ص_{ر} لا^{ن-ر} + \cdots + ص_{ن-۱} لا + ص_{ن}$$

$ص_{۱}$ میں رقموں کی تعداد ن ہے، $ص_{۲}$ میں رقموں کی تعداد وہی ہے جو ن اشیا میں سے دو دو اشیا کے اجتماعوں کی تعداد ہے یعنی $_{ن}ج_{۲}$، $ص_{۳}$ میں رقموں کی تعداد $_{ن}ج_{۳}$ ہے اور علیٰ ہذا القیاس

اب فرض کرو کہ حروف ب، ج، ......ک میں سے ہر ایک ا کے برابر ہے۔ اس صورت میں

$ص_{۱} = {}_{ن}ج_{۱}\, ا$، $ص_{۲} = {}_{ن}ج_{۲}\, ا^{۲}$، $ص_{۳} = {}_{ن}ج_{۳}\, ا^{۳}$ اور علیٰ ہذا القیاس، پس

$$(لا+ا)^{ن} = لا^{ن} + {}_{ن}ج_{۱}\, ا\, لا^{ن-۱} + {}_{ن}ج_{۲}\, ا^{۲} لا^{ن-۲} + {}_{ن}ج_{۳}\, ا^{۳} لا^{ن-۳} + \cdots\cdots + {}_{ن}ج_{ن}\, ا^{ن}$$

اور $_{ن}ج_{۱}$، $_{ن}ج_{۲}$ .... کی جگہ ان کی قیمتیں رکھنے سے

$$(لا+ا)^{ن} = لا^{ن} + ن\, ا\, لا^{ن-۱} + \frac{ن(ن-۱)}{۲\times۱} ا^{۲} لا^{ن-۲}$$
$$+ \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۳\times۲\times۱} ا^{۳} لا^{ن-۳} + \cdots\cdots + ا^{ن}$$

اس سلسلہ میں تعداد ارقام ن + ۱ ہے

ضابطۂ مندرجہ بالا کو مسئلہ ثنائی کے نام سے موسوم کرتے ہیں اور بائیں طرف کے سلسلہ کو $(لا+ا)^{ن}$ کی صورت تفصیلی کہتے ہیں۔

نتیجہ صریح۔ ا کی جگہ (-ا) رکھنے سے

$$\{لا+(-ا)\}^{ن} = لا^{ن} + {}_{ن}ج_{۱}\, لا^{ن-۱}(-ا) + {}_{ن}ج_{۲}\, لا^{ن-۲}(-ا)^{۲}$$
$$+ {}_{ن}ج_{۳}\, لا^{ن-۳}(-ا)^{۳} + \cdots\cdots + {}_{ن}ج_{ن}(-ا)^{ن}$$

یعنی $(\text{لا}-\text{ا})^{\text{ن}} = \text{لا}^{\text{ن}} - \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱}\,\text{ا} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۱\times۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲}\,\text{ا}^{۲}$

$$- \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{۱\times۲\times۳}\,\text{لا}^{\text{ن}-۳}\,\text{ا}^{۳} + \cdots\cdots + (-\text{ا})^{\text{ن}}$$

پس معلوم ہوا کہ ارقام یکے بعد دیگرے مثبت اور منفی ہیں اور رقم آخر مثبت ہوگی اگر ن جفت ہو اور منفی ہوگی اگر ن طاق ہو۔

نتیجہ صریح ۲۔ لا کی جگہ ایک اور ا کی جگہ لا رکھنے سے

$$(۱+\text{لا})^{\text{ن}} = ۱ + {}_{\text{ن}}\text{ج}_{۱}\,\text{لا} + {}_{\text{ن}}\text{ج}_{۲}\,\text{لا}^{۲} + {}_{\text{ن}}\text{ج}_{۳}\,\text{لا}^{۳} + \cdots\cdots + {}_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}}$$

$$= ۱ + \text{ن}\,\text{لا} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۱\times۲}\,\text{لا}^{۲} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{۱\times۲\times۳}\,\text{لا}^{۳} + \cdots + \text{لا}^{\text{ن}}$$

اسی طرح سے $(۱-\text{لا})^{\text{ن}}$

$$= ۱ - \text{ن}\,\text{لا} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۱\times۲}\,\text{لا}^{۲} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{۱\times۲\times۳}\,\text{لا}^{۳} + \cdots\cdots + (-\text{لا})^{\text{ن}}$$

نتیجہ صریح ۳۔ چونکہ $(\text{لا}+\text{ا})^{\text{ن}} = \left\{\text{لا}\left(۱+\frac{\text{ا}}{\text{لا}}\right)\right\}^{\text{ن}} = \text{لا}^{\text{ن}}\left(۱+\frac{\text{ا}}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}}$

اسلئے $(\text{لا}+\text{ا})^{\text{ن}} = \text{لا}^{\text{ن}}\left\{۱ + \text{ن}\frac{\text{ا}}{\text{لا}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۱\times۲}\,\frac{\text{ا}^{۲}}{\text{لا}^{۲}}\right.$

$$\left. + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{۱\times۲\times۳}\,\frac{\text{ا}^{۳}}{\text{لا}^{۳}} + \text{وغیرہ}\right\}$$

اسی طرح سے $(\text{لا}-\text{ا})^{\text{ن}} = \text{لا}^{\text{ن}}\left\{۱ - \text{ن}\frac{\text{ا}}{\text{لا}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۱\times۲}\,\frac{\text{ا}^{۲}}{\text{لا}^{۲}}\right.$

$$\left. - \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{۱\times۲\times۳}\,\frac{\text{ا}^{۳}}{\text{لا}^{۳}} + \text{وغیرہ}\right\}$$

۱۸۰۔ مسئلہ ثنائی مثبت صحیح قوت نما کی صورت میں استقراء

حسابیہ سے اس طرح ثابت ہو سکتا ہے ۔

مسئلہ کی صداقت قوت نما ن کے لئے مان لو

یعنی مان لو کہ

$$(لا+ا)^ن = لا^ن + {}_نج_۱\, ا\, لا^{ن-۱} + {}_نج_۲\, ا^۲\, لا^{ن-۲} + \dots + {}_نج_ر\, ا^ر\, لا^{ن-ر} + \dots$$

جہاں $${}_نج_ر = \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\dots(ن-ر+۱)}{|ر}$$

طرفین کو لا + ا میں ضرب دینے سے

$$(لا+ا)^{ن+۱} = لا^{ن+۱} + {}_نج_۱\, ا\, لا^ن + {}_نج_۲\, ا^۲\, لا^{ن-۱} + \dots + {}_نج_ر\, ا^ر\, لا^{ن-ر+۱} + \dots$$

$$+ ا\, لا^ن + {}_نج_۱\, ا^۲\, لا^{ن-۱} + \dots + {}_نج_{ر-۱}\, ا^ر\, لا^{ن-ر+۱} + \dots$$

$$= لا^{ن+۱} + ({}_نج_۱ + ۱)\, ا\, لا^ن + ({}_نج_۲ + {}_نج_۱)\, ا^۲\, لا^{ن-۱} + \dots$$

$$+ ({}_نج_ر + {}_نج_{ر-۱})\, ا^ر\, لا^{ن-ر+۱} + \dots$$

لیکن $${}_نج_ر + {}_نج_{ر-۱}$$

$$= \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\dots(ن-ر+۱)}{|ر} + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\dots(ن-ر+۲)}{|ر-۱}$$

$$= \frac{ن(ن-۱)\dots(ن-ر+۲)}{|ر-۱}\left\{\frac{ن-ر+۱}{ر} + ۱\right\}$$

$$= \frac{ن(ن-۱)\dots(ن-ر+۲)}{|ر-۱} \times \frac{ن+۱}{ر}$$

$$= \frac{(\text{ن}+۱)\,\text{ن}\,(\text{ن}-۱)\,.....\,(\text{ن}-\text{ر}+۲)}{\text{لر}}$$

$$= \text{ج}^{\text{ن}+۱}_{\text{ر}}$$

اسی طرح سے $\text{ج}^{\text{ن}}_{۱} + ۱ = \text{ج}^{\text{ن}+۱}_{۱}$ اور $\text{ج}^{\text{ن}}_{۲} + \text{ج}^{\text{ن}}_{۱} = \text{ج}^{\text{ن}+۱}_{۲}$ اور علیٰ ہذا القیاس

$$\therefore\ (\text{لا}+\text{ا})^{\text{ن}+۱} = \text{لا}^{\text{ن}+۱} + \text{ج}^{\text{ن}+۱}_{۱}\,\text{ا}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ج}^{\text{ن}+۱}_{۲}\,\text{ا}^{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + ...$$

$$+ \text{ج}^{\text{ن}+۱}_{\text{ر}}\,\text{ا}^{\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{ر}+۱} + ...$$

پس معلوم ہوا کہ اگر مسئلہ قوت نما ن کے لئے صحیح ہو تو یہ قوت نما ن + ۱ کے لئے بھی صحیح ہوتا ہے لیکن یہ قوت نما ۲ کے لئے صحیح ہے کیونکہ $(\text{لا}+\text{ا})^{۲} = \text{لا}^{۲} + ۲\,\text{ا}\,\text{لا} + \frac{۲\times۱}{۲\times۱}\,\text{ا}^{۲}$

$$= \text{لا}^{۲} + ۲\,\text{ا}\,\text{لا} + \text{ا}^{۲}$$

اسلئے مسئلہ قوت نما ۳ کے لئے صحیح ہے

اسلئے مسئلہ قوت نما ۴ کے لئے صحیح ہے اور علیٰ ہذا القیاس

ثابت ہوا کہ مسئلہ ثنائی تمام مثبت صحیح قوت نماؤں کیلئے صحیح ہے

۱۸۱ـ مسئلہ ثنائی کا ایک عمدہ مختصر ثبوت یہ بھی ہے

$(\text{لا}+\text{ا})^{\text{ن}} = (\text{لا}+\text{ا})(\text{لا}+\text{ا})(\text{لا}+\text{ا})$ .... ن اجزاء ضربی تک

ظاہر ہے کہ مندرجہ بالا ن اجزاء ضربی کا حاصل ضرب ن درجہ کا جملہ متجانسہ ہے۔

اب ضرور ہے کہ جس رقم میں $\text{لا}^{\text{ن}-\text{ر}}$ شامل ہو اُس میں $\text{ا}^{\text{ر}}$ بھی شامل

ہو اس رقم کا ہمیں سر دریافت کرنا ہے۔

ہر ایک رقم جس میں $\text{لا}^{\text{ن}-\text{ر}}\,\text{ا}^{\text{ر}}$ شامل ہو اس طرح حاصل ہوتی ہے کہ کسی ر اجزاء ضربی سے حرف ا منتخب کیا جائے اور باقی ماندہ ن-ر اجزاء ضربی میں سے حرف لا لیکر ان سب حروف کو اکٹھا ضرب دیا جائے۔

پس معلوم ہوا کہ جن ارقام میں $\text{لا}^{\text{ن}-\text{ر}}\,\text{ا}^{\text{ر}}$ شامل ہے اُن کی تعداد ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے اجتماعوں کی تعداد کے برابر ہے۔ اسلئے $\text{لا}^{\text{ن}-\text{ر}}\,\text{ا}^{\text{ر}}$ کا سر ${}_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}}$ ہے۔ اور ر کو قیمتیں ۰، ۱، ۲، ۳، .... ن بالترتیب دینے سے باقی رقموں کے سر دریافت ہوتے ہیں۔

$$\therefore (\text{لا}+\text{ا})^{\text{ن}} = \text{لا}^{\text{ن}} + {}_{\text{ن}}\text{ج}_{۱}\,\text{ا}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + {}_{\text{ن}}\text{ج}_{۲}\,\text{ا}^{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \cdots\cdots$$

$$+ {}_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}}\,\text{ا}^{\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{ر}} + \cdots\cdots + \text{ا}^{\text{ن}}$$

$$= \text{لا}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{ا}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲\times۱}\,\text{ا}^{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)\cdots(\text{ن}-\text{ر}+۱)\,\text{ا}^{\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{ر}}}{\underline{|\text{ر}}} + \cdots\cdots + \text{ا}^{\text{ن}}$$

مثال ۱۔ $(\text{لا}+\text{ما})^{۶}$ کی صورت تفصیلی دریافت کرو مسئلہ ثنائی کی مدد سے

$$(\text{لا}+\text{ما})^{۶} = \text{لا}^{۶} + {}_{۶}\text{ج}_{۱}\,\text{لا}^{۵}\,\text{ما} + {}_{۶}\text{ج}_{۲}\,\text{لا}^{۴}\,\text{ما}^{۲} + {}_{۶}\text{ج}_{۳}\,\text{لا}^{۳}\,\text{ما}^{۳} + {}_{۶}\text{ج}_{۴}\,\text{لا}^{۲}\,\text{ما}^{۴} + {}_{۶}\text{ج}_{۵}\,\text{لا}\,\text{ما}^{۵} + {}_{۶}\text{ج}_{۶}\,\text{ما}^{۶}$$

اور ${}_{۶}\text{ج}_{۱}$، ${}_{۶}\text{ج}_{۲}$، ${}_{۶}\text{ج}_{۳}$ کی قیمتیں مندرج کرنے سے

= لا^{6} + ۶ لا^{5} ما + ۱۵ لا^{4} ما^{2} + ۲۰ لا^{3} ما^{3} + ۱۵ لا^{2} ما^{4} + ۶ لا ما^{5} + ما^{6}

مثال ۲ - (ا - ۲ لا)^{7} کی صورت تفصیلی دریافت کرو -

(ا - ۲ لا)^{7} = ا^{7} - ج$_{1}$ ا^{6} (۲ لا) + ج$_{2}$ ا^{5} (۲ لا)^{2}

- ج$_{3}$ ا^{4} (۲ لا)^{3} + ... ۸ رقموں تک

اب چونکہ ج$_{ر}$ = ج$_{ن-ر}$ اسلئے اگر صرف ج$_{3}$ تک سر دریافت کئے جائیں تو باقی فوراً لکھے جا سکتے ہیں کیونکہ

ج$_{4}$ = ج$_{3}$ اور ج$_{5}$ = ج$_{2}$ وغیرہ اسلئے

(ا - ۲ لا)^{7} = ا^{7} - ۷ ا^{6} (۲ لا) + $\frac{۷ \times ۶}{۱ \times ۲}$ ا^{5} (۲ لا)^{2}

- $\frac{۷ \times ۶ \times ۵}{۱ \times ۲ \times ۳}$ ا^{4} (۲ لا)^{3} + ...

= ا^{7} - ۷ ا^{6} (۲ لا) + ۲۱ ا^{5} (۲ لا)^{2} - ۳۵ ا^{4} (۲ لا)^{3}

+ ۳۵ ا^{3} (۲ لا)^{4} - ۲۱ ا^{2} (۲ لا)^{5} + ۷ ا (۲ لا)^{6} - (۲ لا)^{7}

= ا^{7} - ۱۴ ا^{6} لا + ۸۴ ا^{5} لا^{2} - ۲۸۰ ا^{4} لا^{3} + ۵۶۰ ا^{3} لا^{4}

- ۶۷۲ ا^{2} لا^{5} + ۴۴۸ ا لا^{6} - ۱۲۸ لا^{7}

مثال ۳ - (ا + $\sqrt{ا^{2} - ۱}$)^{7} + (ا - $\sqrt{ا^{2} - ۱}$)^{7} کی قیمت دریافت کرو

اس مثال میں ایسی دو تفصیلی صورتیں ہیں جن کی ارقام عددی قیمت میں برابر ہیں لیکن دوسری صورتِ تفصیلی میں دوسری، چوتھی، چھٹی،

آٹھویں رقمیں منفی ہیں اور اسلئے پہلی صورت تفصیلی کی رقوم متماثلہ کو نابود کر دیتی ہیں۔

اسلئے مطلوبہ قیمت $= ۲\{\text{ا}^{۷} + ۲۱\,\text{ا}^{۵}(\text{ا}^{۲}-۱) + ۳۵\,\text{ا}^{۳}(\text{ا}^{۲}-۱)^{۲} + ۷\,\text{ا}(\text{ا}^{۲}-۱)^{۳}\}$

$= ۲\,\text{ا}(۶۴\,\text{ا}^{۶} - ۱۱۲\,\text{ا}^{۴} + ۵۶\,\text{ا}^{۲} - ۷)$

مثال ۴۔ $(\tfrac{۱}{۲}\text{لا} - ۲\,\text{ما})^{۷}$ کو پھیلاؤ

$$(\tfrac{۱}{۲}\text{لا} - ۲\,\text{ما})^{۷} = \left\{\left(\frac{\text{لا}}{۲}\right)\left(۱-\frac{۴\,\text{ما}}{\text{لا}}\right)\right\}^{۷} = \left(\frac{\text{لا}}{۲}\right)^{۷}\left(۱-\frac{۴\,\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{۷}$$

$$= \frac{\text{لا}^{۷}}{۱۲۸}\left\{۱ + {}_{۷}\text{ج}_{۱}\left(-\frac{۴\,\text{ما}}{\text{لا}}\right) + {}_{۷}\text{ج}_{۲}\left(-\frac{۴\,\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{۲}\right.$$

$$+ {}_{۷}\text{ج}_{۳}\left(-\frac{۴\,\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{۳} + {}_{۷}\text{ج}_{۴}\left(-\frac{۴\,\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{۴} + {}_{۷}\text{ج}_{۵}\left(-\frac{۴\,\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{۵}$$

$$\left.+ {}_{۷}\text{ج}_{۶}\left(-\frac{۴\,\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{۶} + {}_{۷}\text{ج}_{۷}\left(-\frac{۴\,\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{۷}\right\}$$

$$= \frac{\text{لا}^{۷}}{۱۲۸}\left\{۱ - ۷\left(\frac{۴\,\text{ما}}{\text{لا}}\right) + \frac{۷\times۶}{۱\times۲}\left(\frac{۴\,\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{۲} - \frac{۷\times۶\times۵}{۱\times۲\times۳}\left(\frac{۴\,\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{۳}\right.$$

$$\left.+ \frac{۷\times۶\times۵}{۱\times۲\times۳}\left(\frac{۴\,\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{۴} - \left(\frac{۷\times۶}{۱\times۲}\right)\left(\frac{۴\,\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{۵} + ۷\times\left(\frac{۴\,\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{۶} - \left(\frac{۴\,\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{۷}\right\}$$

$$= \frac{\text{لا}^{۷}}{۱۲۸}\left\{۱ - ۷\times۴\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right) + ۲۱\times۴^{۲}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{۲} - ۳۵\times۴^{۳}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{۳}\right.$$

$$\left.+ ۳۵\times۴^{۴}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{۴} - ۲۱\times۴^{۵}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{۵} + ۷\times۴^{۶}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{۶} - ۴^{۷}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{۷}\right\}$$

$$= \frac{\text{لا}^{۷}}{۱۲۸} - \frac{۷}{۳۲}\text{لا}^{۶}\text{ما} + \frac{۲۱}{۸}\text{لا}^{۵}\text{ما}^{۲} - \frac{۳۵}{۲}\text{لا}^{۴}\text{ما}^{۳} + ۷۰\,\text{لا}^{۳}\text{ما}^{۴}$$

$$- ۱۶۸\,\text{لا}^{۲}\text{ما}^{۵} + ۲۲۴\,\text{لا}\,\text{ما}^{۶} - ۱۲۸\,\text{ما}^{۷}$$

۱۸۲۔ $(\text{لا}+\text{ا})^{\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی میں رقم عامہ دریافت کرو۔

دوسری رقم = $ {}_{\text{ن}}\text{ج}_{۱}\ \text{لا}^{\text{ن}-۱}\ \text{ا}$

تیسری رقم = $ {}_{\text{ن}}\text{ج}_{۲}\ \text{لا}^{\text{ن}-۲}\ \text{ا}^{۲}$

چوتھی رقم = $ {}_{\text{ن}}\text{ج}_{۳}\ \text{لا}^{\text{ن}-۳}\ \text{ا}^{۳}$

پانچویں رقم = $ {}_{\text{ن}}\text{ج}_{۴}\ \text{لا}^{\text{ن}-۴}\ \text{ا}^{۴}$

اور علیٰ ہذا القیاس

اس سے ظاہر ہے کہ ہر ایک رقم میں ج کا عدد آخر اُس رقم کی تعداد سے جو شروع سلسلہ سے اُس رقم تک ہو، بقدر ایک کے کم ہے اور ا کا قوت نما وہی ہے جو ج کا عدد آخر ہے نیز لا اور ا کے قوت نماؤں کا مجموعہ ن ہے۔ اسلئے $(\text{ر}+۱)$ ویں رقم = $ {}_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}}\ \text{لا}^{\text{ن}-\text{ر}}\ \text{ا}^{\text{ر}}$

اس کو سلسلہ کی رقم عامہ کہتے ہیں اور اس کی وجہ یہ ہے کہ اس میں ر کو مناسب عددی قیمتیں دینے سے ہم صورت تفصیلی کی کوئی سی رقم دریافت کر سکتے ہیں

پس رقم عامہ = $(\text{ر}+۱)$ ویں رقم

$$= {}_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}}\ \text{لا}^{\text{ن}-\text{ر}}\ \text{ا}^{\text{ر}}$$

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)\ldots\ldots(\text{ن}-\text{ر}+۱)}{\underline{|\text{ر}}}\ \text{لا}^{\text{ن}-\text{ر}}\ \text{ا}^{\text{ر}}$$

اگر $(\text{لا}-\text{ا})^{\text{ن}}$ کی رقم عامہ مطلوب ہو تو ہمیں ا کی بجائے $(-\text{ا})$ لکھنا

چاہیئے ۔

پس $(\text{لا} - \text{ا})^{\text{ن}}$ کی رقم عامہ

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)\ldots\ldots(\text{ن}-\text{ر}+۱)}{\lfloor\underline{\text{ر}}}\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{ر}}(-\text{ا})^{\text{ر}}$$

$$= (-۱)^{\text{ر}} \times \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)\ldots(\text{ن}-\text{ر}+۱)}{\lfloor\underline{\text{ر}}}\,\text{ا}^{\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{ر}}$$

اگر ہم مسئلہ ثنائی کی صورت تفصیلی میں $\text{ق}_{\text{ر}}$ سے ر ویں رقم تعبیر کریں تو ظاہر ہے کہ رقم $\text{ق}_{\text{ر}+۱}$ میں $\text{ا}^{\text{ر}}$ شامل ہوگا نیز یہ صورت تفصیلی بلحاظ ا اور لا کے ایک جملہ متجانسہ ہے یعنی اس کی ہر ایک رقم کے قوت نماؤں کا مجموعہ ن ہے پس معلوم ہوا کہ جس رقم میں $\text{ا}^{\text{ر}}$ شامل ہوتا ہے اُس میں $\text{لا}^{\text{ن}-\text{ر}}$ بھی شامل ہوگا

اسلئے $\text{ق}_{\text{ر}+۱} = {}_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}}\,\text{ا}^{\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{ر}}$

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)\ldots(\text{ن}-\text{ر}+۱)}{\lfloor\underline{\text{ر}}}\,\text{ا}^{\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{ر}}$$

اور $\text{ق}_{\text{ر}} = \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)\ldots(\text{ن}-\text{ر}+۲)}{\lfloor\underline{\text{ر}-۱}}\,\text{ا}^{\text{ر}-۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{ر}+۱}$

اسلئے $\frac{\text{ق}_{\text{ر}+۱}}{\text{ق}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+۱}{\text{ر}}\left(\frac{\text{ا}}{\text{لا}}\right)$

یعنی $\text{ق}_{\text{ر}+۱} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+۱}{\text{ر}}\left(\frac{\text{ا}}{\text{لا}}\right) \times \text{ق}_{\text{ر}}$

جس سے ہمیں دو متصل ارقام کا باہمی تعلق معلوم ہوتا ہے، نیز ظاہر ہے کہ ہم کسی رقم کو اسکی رقم ما قبل سے بآسانی حاصل کر سکتے ہیں

مثال ۱۔ $(ا + ۲ لا^۳)^{۱۷}$ کی پانچویں رقم دریافت کرو

رقم مطلوبہ $= {}_{۱۷}ج_{۴}\ ا^{۱۳} \times (۲ لا^۳)^۴$

$= \frac{۱۴ \times ۱۵ \times ۱۶ \times ۱۷}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} \times ۱۶\ ا^{۱۳} لا^{۱۲}$

$= ۳۸۰۸۰\ ا^{۱۳} لا^{۱۲}$

مثال ۲۔ $(ا - لا)^{۵۰}$ کی ۴۹ ویں رقم دریافت کرو۔

رقم مطلوبہ $= {}_{۵۰}ج_{۴۸}\ ا^۲ (-لا)^{۴۸}$

$= {}_{۵۰}ج_{۲}\ ا^۲ (-لا)^{۴۸}$

$= \frac{۴۹ \times ۵۰}{۲ \times ۱} ا^۲ (-لا)^{۴۸}$

$= ۱۲۲۵\ ا^۲ لا^{۴۸}$

مثال ۳۔ $(ما^۲ + \frac{س^۳}{ما})^۵$ کی صورت تفصیلی میں ما کا سر دریافت کرو

فرض کرو جملہ مذکورہ کے پھیلاؤ کی $(ر + ۱)$ ویں رقم میں ما واقع ہوتا ہے۔

چونکہ $(ر+۱)$ ویں رقم $= {}_{۵}ج_{ر} (ما^۲)^{۵-ر} (\frac{س^۳}{ما})^ر$

$= {}_{۵}ج_{ر}\ س^{۳ر}\ ما^{۱۰-۳ر}$

اور اگر اس میں ما شامل ہو تو ضرور ہے کہ

$۱۰ - ۳ر = ۱$ یعنی $ر = ۳$

اسلیئے سر مطلوب $= {}_{۵}ج_{ر} \times س^{۳ر}$

$= ج_{۳} \times س^{۳\times۳}$

$= ج_{۳} \times س^{۹}$

$= ۱۰\ س^{۹}$

مثال ۴ ۔ $(لا^{۲} - ۲\,لا)^{۱۰}$ کی صورت تفصیلی میں $لا^{۱۶}$ کا سر دریافت کرو

اب $(لا^{۲} - ۲\,لا)^{۱۰} = لا^{۲۰}\left(۱ - \frac{۲}{لا}\right)^{۱۰}$

اور چونکہ $\left(۱ - \frac{۲}{لا}\right)^{۱۰}$ کی صورت تفصیلی کی ہر ایک رقم کو $لا^{۲۰}$ سے ضرب دینی پڑتی ہے اس لئے ہمیں اس صورت تفصیلی میں اُس رقم کا سر دریافت کرنا ہے جس میں $\frac{۱}{لا^{۴}}$ شامل ہو ۔

اسلئے سر مطلوب $= ج_{۴}^{۱۰}\ (-۲)^{۴}$

$= \frac{۷ \times ۸ \times ۹ \times ۱۰}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} \times ۱۶$

$= ۳۳۶۰$

مثال ۵ ۔ $\left(لا - \frac{۱}{لا^{۲}}\right)^{۳ن}$ کی صورت تفصیلی میں وہ رقم دریافت کرو جس میں لا شامل نہ ہو ۔

فرض کرو کہ (ر+۱) ویں رقم میں لا شامل نہیں ہوتا

تب چونکہ (ر+۱) ویں رقم

$= ج_{ر}^{۳ن} \times لا^{۳ن-ر} \times \left(-\frac{۱}{لا^{۲}}\right)^{ر}$

$= ج_{ر}^{۳ن} \times (-۱)^{ر} \times لا^{۳ن-۳ر}$

اسلئے لازماً $۳ن - ۳ر = ۰$ اور اسلئے $ر = ن$

پس رقم مطلوبہ $= ج_{ر}^{٣ن} \times (-١)^{ر}$

$= ج_{ن}^{٣ن} \times (-١)^{ن}$

$= (-١)^{ن} \times \frac{\lfloor ٣ن}{\lfloor ن \lfloor ٢ن}$

مثال ۶۔ $(لا^{٢} + \frac{١}{لا^{٣}})^{ن}$ کی صورت تفصیلی میں $لا^{ر}$ کا سر دریافت کرو۔

فرض کرو کہ صورت تفصیلی کی (ع + ۱) ویں رقم میں $لا^{ر}$ واقع ہوتا ہے۔

تب (ع + ۱) ویں رقم $= ج_{ع}^{ن} (لا^{٢})^{ن-ع} (\frac{١}{لا^{٣}})^{ع}$

$= ج_{ع}^{ن} لا^{٢ن-٥ع}$

لیکن جیسا ہم نے فرض کیا کہ اس رقم میں $لا^{ر}$ شامل ہوتا ہے اسلئے

$٢ن - ٥ع = ر$ یا $ع = \frac{٢ن-ر}{٥}$

پس سر مطلوب $= ج_{ع}^{ن} = ج_{\frac{٢ن-ر}{٥}}^{ن}$

$= \frac{\lfloor ن}{\lfloor \frac{١}{٥}(٢ن-ر) \lfloor \frac{١}{٥}(٣ن+ر)}$

اگر $\frac{٢ن-ر}{٥}$ مثبت صحیح عدد نہ ہو تو صورت تفصیلی میں ایسی کوئی رقم نہ ہوگی جس میں $لا^{ر}$ شامل ہو۔

امثلہ نمبری ۲۱

ذیل کے ثنائی جملوں کو پھیلاؤ

۱- $(لا - ۳)^{۵}$ ۲- $(۳لا + ۲ما)^{۴}$

۳- $(۲لا - ما)^{۵}$ ۴- $(۱ - ۳ا^{۲})^{۶}$

۵- $(لا^{۲} + لا)^{۵}$ ۶- $(۱ - لاما)^{۷}$

۷- $\left(۲ - \frac{۳لا^{۲}}{۲}\right)^{۴}$ ۸- $\left(۳ا - \frac{۲}{۳}\right)^{۶}$

۹- $\left(۱ + \frac{لا}{۲}\right)^{۷}$ ۱۰- $\left(\frac{۲}{۳}لا - \frac{۳}{۲لا}\right)^{۶}$

۱۱- $\left(\frac{۱}{۲} + ا\right)^{۹}$ ۱۲- $\left(۱ - \frac{۱}{لا}\right)^{۱۰}$

۱۳- $(ا+لا)^{ن} = ا^{ن} +$ (ایسی ارقام جن میں جزضربی ن شامل ہے) $+ لا^{ن}$

اس میں فرض کرو کہ ن = ۰ تو $(ا+لا)^{۰} = ا^{۰} + ۰ + لا^{۰}$ یعنی ۱ = ۱ + ۱، معلوم کرو کہ غلطی کہاں ہے؟

ذیل کے جملوں کی ارقام مطلوبہ کو لکھو اور مختصر کرو۔

۱۴- $(لا - ۵)^{۱۳}$ کی چوتھی رقم

۱۵- $(۱ - ۲لا)^{۱۲}$ کی دسویں رقم

۱۶- $(۲لا - ۱)^{۱۳}$ کی بارھویں رقم

۱۷- $(۵لا + ۸ما)^{۳۰}$ کی ۲۸ ویں رقم

۱۸- $\left(\frac{ا}{۳} + ۹ب\right)^{۱۰}$ کی چوتھی رقم

۱۹- $\left(۲ا - \frac{ب}{۳}\right)^{۸}$ کی پانچویں رقم

۲۰- $\left(\frac{۴لا}{۵} - \frac{۵}{۲لا}\right)^{۹}$ کی ساتویں رقم

۲۱۔ $\left(\frac{\text{لا}^{\frac{3}{2}}}{\text{ا}^{\frac{1}{2}}} - \frac{\text{ما}^{\frac{5}{2}}}{\text{ب}^{\frac{3}{2}}}\right)^{8}$ کی پانچویں رقم

ذیل کے جملوں کی قیمتیں دریافت کرو

۲۲۔ $(\text{لا}+\sqrt{2})^{4} + (\text{لا}-\sqrt{2})^{4}$

۲۳۔ $(\sqrt{\text{لا}^2-\text{ا}^2}+\text{لا})^{5} - (\sqrt{\text{لا}^2-\text{ا}^2}-\text{لا})^{5}$

۲۴۔ $(\sqrt{2}+1)^{6} - (\sqrt{2}-1)^{6}$

۲۵۔ $(2-\sqrt{1-\text{لا}})^{6} + (2+\sqrt{1-\text{لا}})^{6}$

۲۶۔ $\left(\frac{\text{ا}}{\text{لا}} + \frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)^{10}$ کی درمیانی رقم دریافت کرو

۲۷۔ $\left(1 - \frac{\text{لا}^2}{2}\right)^{14}$ کی درمیانی رقم دریافت کرو

۲۸۔ $\left(3\text{ا} - \frac{\text{ا}^3}{6}\right)^{9}$ کی دو درمیانی رقمیں دریافت کرو

۲۹۔ $\left(\text{لا}^2 + \frac{3\text{ا}}{\text{لا}}\right)^{15}$ میں لا^{18} کا سر دریافت کرو۔

۳۰۔ $(\text{ا}\,\text{لا}^4 - \text{ب}\,\text{لا})^{9}$ میں لا^{18} کا سر دریافت کرو

۳۱۔ $\left(\text{لا}^4 - \frac{1}{\text{لا}^3}\right)^{15}$ میں لا^{32} اور لا^{-17} کے سر دریافت کرو

۳۲۔ $\left(9\text{لا} - \frac{1}{3\sqrt{\text{لا}}}\right)^{18}$ کی ۱۳ ویں رقم دریافت کرو

۳۳۔ $\left(\frac{3}{2}\text{لا}^2 - \frac{1}{3\text{لا}}\right)^{9}$ کی وہ رقم دریافت کرو جس میں لا شامل نہ ہو

۳۴۔ اگر $\left(\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی میں $\text{لا}^{\text{ل}}$ واقع ہو تو اس کا سر دریافت کرو۔

۳۵۔ $\left(\text{لا}^2 - \frac{1}{\text{لا}}\right)^{2\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی میں وہ رقم دریافت کرو جس میں لا شامل نہ ہو۔

۳۶۔ اگر $\left(\text{لا}^2 + \frac{1}{\text{لا}}\right)^{2\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی میں $\text{لا}^{\text{ع}}$ واقع ہو تو ثابت کرو کہ اس کا سر $= \dfrac{\lfloor 2\text{ن}}{\lfloor \frac{1}{3}(4\text{ن}-\text{ع}) \; \lfloor \frac{1}{3}(2\text{ن}+\text{ع})}$

۱۸۳- $(۱+لا)^{ن}$ کی صورت تفصیلی میں شروع اور اخیر سے متساوی الفصل رقموں کے سر برابر ہوتے ہیں

شروع سے (ر+۱) ویں رقم کا سر = $_{ن}ج_{ر}$

ظاہر ہے کہ اخیر سے (ر+۱) ویں رقم کے پہلے ن+۱-(ر+۱) یا ن-ر رقمیں ہونگی اسلئے اخیر سے (ر+۱) ویں رقم شروع سے (ن-ر+۱) ویں رقم ہوگی اور اس کا سر $_{ن}ج_{ن-ر}$ ہوگا۔

اب چونکہ $_{ن}ج_{ن-ر} = {}_{ن}ج_{ر}$ اسلئے مسئلہ ثابت ہوا

۱۸۴- $(۱+لا)^{ن}$ کی صورت تفصیلی میں سب سے بڑا سر دریافت کرو۔

$(۱+لا)^{ن}$ کی رقم عامہ کا سر $_{ن}ج_{ر}$ ہے اور ہمیں یہ معلوم کرنا ہے کہ ر کی کس قیمت کے لئے اس کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہوگی۔

دفعہ ۱۶۸ میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ جب ن جفت ہو تو سب سے بڑا سر $_{ن}ج_{\frac{ن}{۲}}$ ہے اور جب ن طاق ہو تو سب سے بڑا سر $_{ن}ج_{\frac{ن-۱}{۲}}$ یا $_{ن}ج_{\frac{ن+۱}{۲}}$ ہے اور یہ دونوں سر آپس میں برابر ہیں۔

۱۸۵- $(لا+ا)^{ن}$ کی صورت تفصیلی میں سب سے بڑی رقم دریافت کرو۔

$$(لا+ا)^{ن} = لا^{ن}\left(۱+\frac{ا}{لا}\right)^{ن}$$

چونکہ $لا^{ن}$ جملہ $\left(۱+\frac{ا}{لا}\right)^{ن}$ کی ہر ایک رقم سے ضرب کھاتا ہے اسلئے کافی ہوگا کہ ہم صرف جملہ $\left(۱+\frac{ا}{لا}\right)^{ن}$ کی صورت تفصیلی میں

بڑی سے بڑی رقم دریافت کریں۔

اگر $\text{ق}_{\text{ر}}$ اور $\text{ق}_{\text{ر}+1}$ اس جملہ کی ر ویں اور (ر+۱) ویں رقموں کو بالترتیب تعبیر کریں تو $\text{ق}_{\text{ر}+1} = \text{ق}_{\text{ر}} \times \frac{\text{ن}-\text{ر}+1}{\text{ر}} \times \left(\frac{\text{ا}}{\text{لا}}\right)$

$$= \text{ق}_{\text{ر}} \times \left(\frac{\text{ن}+1}{\text{ر}} - 1\right) \frac{\text{ا}}{\text{لا}}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ جیسے ر بڑھتا ہے ویسے جزِ ضربی $\left(\frac{\text{ن}+1}{\text{ر}} - 1\right)$ گھٹتا ہے اس سے معلوم ہوا کہ (ر+۱) ویں رقم ر ویں رقم سے ہمیشہ بڑی نہیں ہو سکتی، لیکن اُس وقت تک ضرور بڑی رہتی ہے جب تک کہ $\left(\frac{\text{ن}+1}{\text{ر}} - 1\right) \frac{\text{ا}}{\text{لا}}$ ایک کے برابر یا ایک سے کم نہ ہو جائے

اب $\left(\frac{\text{ن}+1}{\text{ر}} - 1\right) \frac{\text{ا}}{\text{لا}} > 1$

جب تک کہ $\left(\frac{\text{ن}+1}{\text{ر}} - 1\right) > \frac{\text{لا}}{\text{ا}}$

یعنی $\frac{\text{ن}+1}{\text{ر}} > \frac{\text{لا}}{\text{ا}} + 1$

یا $\frac{\text{ن}+1}{1+\frac{\text{لا}}{\text{ا}}} > \text{ر}$ .... (۱)

اگر $\frac{\text{ن}+1}{1+\frac{\text{لا}}{\text{ا}}}$ صحیح عدد ہو تو اس کو ع سے تعبیر کرو

اب اگر ر = ع تو ضارب جزِ ضربی $\frac{\text{ن}-\text{ر}+1}{\text{ر}}\left(\frac{\text{ا}}{\text{لا}}\right)$ ایک کے برابر ہو جاتا ہے اور (ع + ۱) ویں رقم ع ویں رقم کے برابر ہے

اور یہی دو رقمیں باقی سب سے بڑی ہیں۔

اگر $\frac{ن+1}{\frac{1}{لا}+1}$ صحیح عدد نہ ہو تو اس کے صحیح حصہ کو ک سے تعبیر کرو اب ر کی بڑی سے بڑی قیمت جو نسبت غیر مساوی (۱) کے مطابق ہے صریحاً ک ہے پس معلوم ہوا کہ (ک + ۱) ویں رقم سب سے بڑی ہے۔

چونکہ ہمیں سب سے بڑی عددی رقم مطلوب ہے اسلئے جملہ $(لا - ا)^ن$ کے لئے بھی اوپر کا ثبوت کافی ہوگا پس کسی مثال حسابیہ میں جملہ ثنائی کی دوسری رقم کی علامت کا خیال رکھنا ضروری نہیں ہے بہتر ہوگا کہ ہر ایک مثال بغیر قاعدہ عامہ کی مدد کے نکالی جائے۔

مثال ۱۔ اگر $لا = \frac{1}{۳}$ تو $(ا + ۴ لا)^۸$ کے پھیلاؤ میں سب سے بڑی رقم دریافت کرو۔

ر ویں اور (ر+۱) ویں رقموں کو بالترتیب $ق_ر$ اور $ق_{ر+۱}$ سے تعبیر کرو تب

$$ق_{ر+۱} = \frac{۸ - ر + ۱}{ر} \times ۴ لا \times ق_ر$$

$$= \frac{۹ - ر}{ر} \times \frac{۴}{۳} \times ق_ر$$

اسلئے $ق_{ر+۱} > ق_ر$

جب تک کہ $\frac{۹ - ر}{ر} \times \frac{۴}{۳} > ۱$

یعنی $\text{۳۶} - \text{۴}\,\text{ر} > \text{۳}\,\text{ر}$

یا $\text{۳۶} > \text{۷}\,\text{ر}$

اس نسبت غیر مساوی کے مطابق ر کی بڑی سے بڑی قیمت ۵ ہے پس سب سے بڑی چھٹی رقم ہوئی اور اس کی قیمت

$$= {}^{\text{۹}}\text{ج}_{\text{۴}} \times \left(\frac{\text{۴}}{\text{۳}}\right)^{\text{۵}} = {}^{\text{۹}}\text{ج}_{\text{۵}} \times \left(\frac{\text{۴}}{\text{۳}}\right)^{\text{۵}}$$

$$= \frac{\text{۵۷۳۴۴}}{\text{۲۴۳}}$$

مثال ۲ - اگر $\text{لا} = \frac{\text{۱}}{\text{۴}}$ تو $(\text{۲} + \text{۳}\,\text{لا})^{\text{۹}}$ کی صورت تفصیلی میں بڑی سے بڑی رقم دریافت کرو۔

$$(\text{۲} + \text{۳}\,\text{لا})^{\text{۹}} = \text{۲}^{\text{۹}}\left(\text{۱} + \frac{\text{۳}\,\text{لا}}{\text{۲}}\right)^{\text{۹}}$$

اسلئے اگر $\text{ق}_{\text{ر}}$ سے ر ویں رقم تعبیر کریں تو

$$\text{ق}_{\text{ر}+\text{۱}} = \frac{\text{۹} \times \text{۸} \times \ldots\ldots (\text{۹} - \text{ر} + \text{۱})}{\underline{|\text{ر}}} \times \left(\frac{\text{۳}\,\text{لا}}{\text{۲}}\right)^{\text{ر}} \times \text{۲}^{\text{۹}}$$

$$= \frac{\text{۱۰} - \text{ر}}{\text{ر}} \times \frac{\text{۳}\,\text{لا}}{\text{۲}} \times \text{ق}_{\text{ر}}$$

اسلئے $\text{ق}_{\text{ر}+\text{۱}} > \text{ق}_{\text{ر}}$

جب تک کہ $\frac{\text{۱۰} - \text{ر}}{\text{ر}} \times \frac{\text{۳}\,\text{لا}}{\text{۲}} > \text{۱}$

یعنی $\frac{\text{۱۰} - \text{ر}}{\text{ر}} \times \frac{\text{۳}}{\text{۸}} > \text{۱}$

یا $\frac{\text{۳۰}}{\text{۱۱}} > \text{ر}$

اس نسبت غیر مساوی کے موافق ر کی بڑی سے بڑی قیمت

۲ ہے اسلئے معلوم ہوا کہ تیسری رقم سب سے بڑی ہے اور اسکی

قیمت $= ۲^۹ \times \frac{۸ \times ۹}{۲ \times ۱} \times \left(\frac{۳لا}{۲}\right)^۲ = ۲^۹ \times \frac{۸ \times ۹}{۲ \times ۱} \times \frac{۳^۲}{۲^۲}$

$= \frac{۸۱ \times ۲^۹}{۲^۴} = ۲۵۹۲$

مثال ۳- اگر لا = ۱ تو $(۳ - ۲لا)^۹$ کی صورت تفصیلی میں سب سے بڑی رقم دریافت کرو۔

$$(۳ - ۲لا)^۹ = ۳^۹\left(۱ - \frac{۲لا}{۳}\right)^۹$$

پس $\left(۱ - \frac{۲لا}{۳}\right)^۹$ کی صورت تفصیلی پر ہی غور کرنا کافی ہوگا

اس جگہ بلحاظ عددی قیمت کے $ق_{ر+۱} = \frac{۹-ر+۱}{ر} \times \frac{۲لا}{۳} \times ق_ر$

$= \frac{۱۰-ر}{ر} \times \frac{۲}{۳} \times ق_ر$

اسلئے $ق_ر < ق_{ر+۱}$

جب تک کہ $۱ < \frac{۱۰-ر}{ر} \times \frac{۲}{۳}$

یعنی $۵ر < ۲۰$

اسلئے تین تک ر کی سب قیمتوں کے لئے $ق_ر < ق_{ر+۱}$

لیکن اگر ر = ۴ تو $ق_{ر+۱} = ق_ر$ اور یہی سب سے بڑی رقمیں ہیں پس معلوم ہوا کہ چوتھی اور پانچویں رقمیں عددی قیمت میں مساوی ہیں اور باقی سب رقموں سے بڑی ہیں اور انکی قیمت

$= ۳^۹ \times ج^۹_۳ \times \left(\frac{۲}{۳}\right)^۳$

$= ۳^۶ \times ۸۴ \times ۸ = ۴۸۹۸۸۸$

۱۸۶- $(۱+لا)^ن$ کی صورت تفصیلی میں ارقام کے سروں کا مجموعہ دریافت کرو

مساوات متماثلہ $(۱+لا)^ن = ۱ + ج_۱ لا + ج_۲ لا^۲ + ج_۳ لا^۳ + \dots\dots + ج_ن لا^ن$
میں لا کو ایک کے مساوی رکھنے سے

$$۲^ن = ۱ + ج_۱ + ج_۲ + ج_۳ + \dots\dots + ج_ن$$

اس میں $_نج_ر$ کی جگہ $ج_ر$ اختصاراً لکھا گیا ہے

نتیجہ صریح - $ج_۱ + ج_۲ + ج_۳ + \dots\dots + ج_ن = ۲^ن - ۱$
یعنی "ن اشیا کے کل اجتماعوں کی تعداد" $۲^ن - ۱$ ہے [دفعہ ۱۶۷]

۱۸۷- ثابت کرو کہ $(۱+لا)^ن$ کی صورت تفصیلی میں جفت سروں کا مجموعہ طاق سروں کے مجموعہ کے برابر ہے -

$$(۱+لا)^ن = ۱ + ج_۱ لا + ج_۲ لا^۲ + ج_۳ لا^۳ + \dots\dots + ج_ن لا^ن$$

یہ ایک مساوات متماثلہ ہے اس میں فرض کرو کہ لا = -۱، پس

$$۰ = ۱ - ج_۱ + ج_۲ - ج_۳ + ج_۴ - ج_۵ + \dots\dots$$

اسلئے $۱ + ج_۲ + ج_۴ + ج_۶ + \dots\dots = ج_۱ + ج_۳ + ج_۵ + \dots\dots$

$= \frac{۱}{۲}$ (سب سروں کا مجموعہ)

$= ۲^{ن-۱}$

مثال ۱- $ج_۰^۲ + ج_۱^۲ + ج_۲^۲ + \dots\dots + ج_ن^۲$ کی قیمت دریافت کرو

$$(۱+لا)^ن = ج_۰ + ج_۱ لا + ج_۲ لا^۲ + ج_۳ لا^۳ + \dots\dots + ج_ن لا^ن$$

$$(لا+۱)^{ن} = ج_{.} لا^{ن} + ج_{۱} لا^{ن-۱} + ج_{۲} لا^{ن-۲} + \cdots\cdots + ج_{ن}$$

اسلئے ضرب دینے سے $ج_{.}^{۲} + ج_{۱}^{۲} + ج_{۲}^{۲} + \cdots\cdots + ج_{ن}^{۲}$

= رقم $لا^{ن}$ کا سر حاصل ضرب $(۱+لا)^{ن}(لا+۱)^{ن}$ میں یعنی $(۱+لا)^{۲ن}$ کی صورت تفصیلی میں۔

اسلئے $ج_{.}^{۲} + ج_{۱}^{۲} + ج_{۲}^{۲} + \cdots\cdots + ج_{ن}^{۲} = \dfrac{\underline{|۲ن}}{\underline{|ن}\ \underline{|ن}}$

مثال ۲۔

اگر $(۱+لا)^{ن} = ج_{.} + ج_{۱} لا + ج_{۲} لا^{۲} + \cdots\cdots + ج_{ن} لا^{ن}$

تو ذیل کے جملوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

$ج_{.} + ۲ج_{۱} + ۳ج_{۲} + ۴ج_{۳} + \cdots\cdots + (ن+۱)ج_{ن}$ ..... (۱)

$ج_{۱}^{۲} + ۲ج_{۲}^{۲} + ۳ج_{۳}^{۲} + \cdots\cdots + ن ج_{ن}^{۲}$ .... (۲)

سلسلہ (۱) $= ج_{.} + ج_{۱} + ج_{۲} + \cdots + ج_{ن}$

$+ (ج_{۱} + ۲ج_{۲} + ۳ج_{۳} + \cdots + ن ج_{ن})$

$$= ۲^{ن} + ن\left\{۱ + (ن-۱) + \frac{(ن-۱)(ن-۲)}{۲\times۱} + \cdots\cdots + ۱\right\}$$

$$= ۲^{ن} + ن(۱+۱)^{ن-۱} = ۲^{ن} + ن \times ۲^{ن-۱}$$

سلسلہ (۲) کی قیمت معلوم کرنے کے لئے اس طرح عمل کرو

$ج_{۱} لا + ۲ج_{۲} لا^{۲} + ۳ج_{۳} لا^{۳} + \cdots\cdots + ن ج_{ن} لا^{ن}$

$$= ن لا\left\{۱ + (ن-۱)لا + \frac{(ن-۱)(ن-۲)}{۲\times۱} لا^{۲} + \cdots + لا^{ن-۱}\right\}$$

$$= ن لا(۱+لا)^{ن-۱}$$

اب لا کو $\frac{1}{\text{لا}}$ میں تبدیل کرنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{\text{ج}_1}{\text{لا}} + \frac{2\,\text{ج}_2}{\text{لا}^2} + \frac{3\,\text{ج}_3}{\text{لا}^3} + \cdots\cdots + \frac{\text{ن}\,\text{ج}_{\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{ن}}} = \frac{\text{ن}}{\text{لا}}\left(1+\frac{1}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}-1} \cdots (3)$$

نیز $\text{ج}_0 + \text{ج}_1\,\text{لا} + \text{ج}_2\,\text{لا}^2 + \cdots\cdots + \text{ج}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}} = (1+\text{لا})^{\text{ن}} \cdots\cdots (4)$

اب اگر تعلقات (۳) اور (۴) میں دائیں طرف کے دونوں سلسلوں کو آپس میں اکٹھا ضرب دیدیا جائے تو معلوم ہوگا کہ اس حاصل ضرب کی رقم مطلق یعنی ایسی رقم جس میں لا موجود نہو سلسلہ مطلوبہ (۲) ہے

اسلئے سلسلہ (۲) $= \frac{\text{ن}}{\text{لا}}(1+\text{لا})^{\text{ن}}\left(1+\frac{1}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}-1}$ کی اُس رقم کے جس میں لا شامل نہ ہو۔

$= \frac{\text{ن}}{\text{لا}^{\text{ن}}}(1+\text{لا})^{2\text{ن}-1}$ کی اُس رقم کے جسمیں لا شامل نہ ہو

$= \text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر جملہ $\text{ن}\,(1+\text{لا})^{2\text{ن}-1}$ میں

$$= \text{ن} \times {}_{2\text{ن}-1}\text{ج}_{\text{ن}}$$

$$= \frac{\underline{|2\text{ن}-1}}{\underline{|\text{ن}-1}\;\underline{|\text{ن}-1}}$$

مثال ۳۔ $\text{ا} - (\text{ا}+\text{ب})\,\text{ن} + (\text{ا}+2\text{ب})\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{1\times 2}$

$- (\text{ا}+3\text{ب})\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{1\times2\times3} +$ وغیرہ کی قیمت دریافت کرو

جملہ معلومہ $= \text{ا}\left\{1 - \text{ن} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{1\times2} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{1\times2\times3} + \cdots\right\}$

$- \text{ب}\left\{\text{ن} - \text{ن}(\text{ن}-1) + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{1\times2} - \cdots\cdots\right\}$

= ا (۱-۱)ن - ب ن (۱-۱)ن-۱ = ۰

۱۸۸- جن جملوں میں دو سے زیادہ رقمیں ہوں اُن کی تفصیلی صورتیں مسئلہ ثنائی کی استعانت سے بآسانی حاصل ہوسکتی ہیں-

مثال- (لا۲ + ۲ لا - ۱)۳ کو پھیلاؤ

اگر ۲ لا - ۱ کو ایک رقم خیال کریں تو جملہ کی صورت تفصیلی ہوگی

(لا۲)۳ + ۳ (لا۲)۲ (۲ لا - ۱) + ۳ لا۲ (۲ لا - ۱)۲ + (۲ لا - ۱)۳

اختصار اور تحویل کے بعد

= لا۶ + ۶ لا۵ + ۹ لا۴ - ۴ لا۳ - ۹ لا۲ + ۶ لا - ۱

۱۸۹- متفرق مثالیں

مثال ۱- (۹۹۹ء)۷ کی تقریبی قیمتیں دریافت کرو

(۹۹۹ء)۷ = (۹۹۹/۱۰۰۰)۷ = (۱ - ۱/۱۰۳)۷

= ۱ - ۷/۱۰۳ + (۷×۶)/(۱×۲) × ۱/۱۰۶ - (۷×۶×۵)/(۱×۲×۳) × ۱/۱۰۹ + ...

= ۱ - ۰۰۷ء + ۰۰۰۰۲۱ء - ۰۰۰۰۰۰۰۳۵ء + ...

= ۱ - ۰۰۷ء یعنی ۹۹۳۰ء چار مرتبہ کے اعشاریہ تک

یا = ۹۹۳۰۲۱۰ء سات مرتبہ کے اعشاریہ تک

مثال ۲- (۱ - لا)۴ (۱ + لا)۹ کی صورت تفصیلی میں لا۷ کا سر دریافت کرو-

لا۷ کا سر (۱ - لا)۴ (۱ + لا)۹ میں

= لا۷ کا سر (۱ - ۴ لا + ۶ لا۲ - ۴ لا۳ + لا۴) (۱ + لا)۹ میں

= لا^۷ کا سر جملہ (۱ + لا)^۹ میں

− ۴ × {لا^۶ کا سر جملہ (۱ + لا)^۹ میں}

+ ۶ × {لا^۵ 〃 〃}

− ۴ × {لا^۴ 〃 〃}

+ لا^۳ 〃 〃

$$\frac{۶\times۷\times۸\times۹}{۴\times۳\times۲\times۱}\times۶+\frac{۷\times۸\times۹}{۳\times۲\times۱}\times۴-\frac{۸\times۹}{۲\times۱}=$$

$$\frac{۷\times۸\times۹}{۳\times۲\times۱}+\frac{۶\times۷\times۸\times۹}{۴\times۳\times۲\times۱}\times۴-$$

$$۸۴+\frac{۶\times۷\times۸\times۹\times۲}{۴\times۳\times۲\times۱}+۷\times۸\times۳\times۲-۳۶=$$

$$۳۶=۳۳۶-۳۷۲=۲۵۲+۳۳۶-۱۲۰=$$

مثال ۳۔ اگر ایک جملہ ثنائی کی صورت تفصیلی میں ۶ ویں، ۷ ویں، ۸ ویں، ۹ ویں، رقمیں بالترتیب ا، ب، ج، د ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ب^۲-اج}{ج^۲-ب\,د}=\frac{۴ا}{۳ج}$$

فرض کرو کہ مجوزہ جملہ ثنائی $(لا+ما)^ن$ ہے

تب چونکہ $\frac{ق_{ر+۱}}{ق_ر}=\frac{ن-ر+۱}{ر}\times\frac{ما}{لا}$

اسلئے لازماً

(۱) $\frac{ب}{ا}=\frac{ق_۷}{ق_۶}=\frac{ن-۶+۱}{۶}\times\frac{ما}{لا}$

$=\frac{ن-۵}{۶}\times\frac{ما}{لا}$

$$(۲)\quad \frac{\text{ج}}{\text{ب}} = \frac{\text{ق}_{۸}}{\text{ق}_{۷}} = \frac{\text{ن} - ۷ + ۱}{۷} \times \frac{\text{ا}}{\text{لا}}$$

$$= \frac{\text{ن} - ۶}{۷} \times \frac{\text{ا}}{\text{لا}}$$

$$(۳)\quad \frac{\text{د}}{\text{ج}} = \frac{\text{ق}_{۹}}{\text{ق}_{۸}} = \frac{\text{ن} - ۸ + ۱}{۸} \times \frac{\text{ا}}{\text{لا}}$$

$$= \frac{\text{ن} - ۷}{۸} \times \frac{\text{ا}}{\text{لا}}$$

(۱) سے $۶ \times \frac{\text{ب}}{\text{ا}} = (\text{ن} - ۵) \frac{\text{ا}}{\text{لا}}$

(۲) " $۷ \times \frac{\text{ج}}{\text{ب}} = (\text{ن} - ۶) \frac{\text{ا}}{\text{لا}}$

(۳) " $۸ \times \frac{\text{د}}{\text{ج}} = (\text{ن} - ۷) \frac{\text{ا}}{\text{لا}}$

اسلئے $\frac{۶\text{ب}}{\text{ا}} - \frac{۷\text{ج}}{\text{ب}} = \frac{\text{ا}}{\text{لا}} = \frac{۷\text{ج}}{\text{ب}} - \frac{۸\text{د}}{\text{ج}}$

یا $۶\text{ب}^۲\text{ج} - ۷\text{اج}^۲ = ۷\text{اج}^۲ - ۸\text{ابد}$

یا $۳\text{ب}^۲\text{ج} = ۷\text{اج}^۲ - ۴\text{ابد}$

یا $۳\text{ج}(\text{ب}^۲ - \text{اج}) = ۴\text{ا}(\text{ج}^۲ - \text{بد})$

$\therefore \frac{\text{ب}^۲ - \text{اج}}{\text{ج}^۲ - \text{بد}} = \frac{۴\text{ا}}{۳\text{ج}}$

امثلہ نمبری ۲۲

۱- $(۱ - ۲\text{لا})^۳(۱ + \text{لا})^۶$ کی صورت تفصیلی میں $\text{لا}^۹$ کا سر دریافت کرو۔

۲- $(۱ + \text{لا})^۳(۱ - \text{لا})^۶$ " " " $\text{لا}^۵$ " " "

۳۔ $(۱+لا+لا^۲)(۱-۲لا)^۷$ کی صورت تفصیلی میں $لا^۵$ کا سر دریافت کرو۔

۴۔ $(۱+۲لا)^۳(۱+۳لا)^۴$ " " " $لا^۳$ " "

۵۔ ثابت کرو کہ $(لا+\frac{۱}{لا})^{۲۰} = لا^{۲۰}+\frac{۱}{لا^{۲۰}}+{}_{۲۰}ج_{۱}(لا^{۱۸}+\frac{۱}{لا^{۱۸}})$

$+{}_{۲۰}ج_{۲}(لا^{۱۶}+\frac{۱}{لا^{۱۶}})+\ldots\ldots$ اور اس سلسلے کی آخری رقم دریافت کرو۔

مندرجہ ذیل کی قیمتیں دریافت کرو

۶۔ $(۱٫۰۵)^۲$ کی دو مرتبہ کے اعشاریہ تک

۷۔ $(۱٫۰۰۲)^۳$ کی تین مرتبہ کے اعشاریہ تک

۸۔ $(۱٫۰۰۲)^۶$ کی پانچ مرتبہ کے اعشاریہ تک

۹۔ $(۱٫۰۰۰۵)^۷$ کی چھ مرتبہ کے اعشاریہ تک

ذیل کی ہر ایک تفصیلی صورت میں دریافت کرو کہ سب سے بڑی رقم کونسی ہے۔

۱۰۔ $(۲لا-۳ما)^{۲۸}$ جب $لا=۹$ اور $ما=۴$

۱۱۔ $(۲ا+ب)^{۱۴}$ جب $ا=۴$ اور $ب=۵$

۱۲۔ $(۳+۲لا)^{۱۵}$ جب $لا=\frac{۵}{۲}$

ذیل کی تفصیلی صورتوں میں سب سے بڑی رقم کی قیمت دریافت کرو

۱۳۔ $(۱+لا)^ن$ جب کہ $لا=\frac{۲}{۳}$ اور $ن=۶$

۱۴۔ $(ا+لا)^ن$ جب کہ $ا=\frac{۱}{۲}$، $لا=\frac{۱}{۳}$ اور $ن=۹$

۱۵۔ ثابت کرو کہ $(۱+لا)^{۲ن}$ کی درمیانی رقم کا سر $(۱+لا)^{۲ن-۱}$ کی دو درمیانی رقموں کے سروں کے مجموعے کے برابر ہے۔

۱۶- اگر $(\text{لا}+\text{ا})^{\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی میں طاق رقموں کا مجموعہ م_{1} ہو اور جفت رقموں کا مجموعہ م_{2}، تو ثابت کرو کہ

$$\text{م}_{1}^{2}-\text{م}_{2}^{2}=(\text{لا}^{2}-\text{ا}^{2})^{\text{ن}}$$

۱۷- $(\text{لا}+\text{ما})^{\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی میں دوسری، تیسری، چوتھی رقمیں بالترتیب ۲۴۰، ۷۲۰ اور ۱۰۸۰ ہیں لا، ما، ن کی قیمتیں دریافت کرو۔

۱۸- $(1+2\,\text{لا}-\text{لا}^{2})^{4}$ کی صورت تفصیلی دریافت کرو

۱۹- $(3\,\text{لا}^{2}-2\,\text{ا}\,\text{لا}+3\,\text{ا}^{2})^{3}$ کی صورت تفصیلی دریافت کرو

۲۰- $(\text{لا}+\text{ا})^{\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی میں اخیر سے ر ویں رقم دریافت کرو۔

۲۱- $\left(\text{لا}-\frac{1}{\text{لا}}\right)^{2\text{ن}+1}$ کی صورت تفصیلی میں اخیر سے (ع+۲) ویں رقم دریافت کرو۔

۲۲- $(1+\text{لا})^{43}$ کی صورت تفصیلی میں (۲ر+۱) ویں اور (ر+۲) ویں رقمیں برابر ہیں، ر کی قیمت دریافت کرو

۲۳- $(1+\text{لا})^{2\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی میں ۳ر ویں اور (ر+۲) ویں رقموں کے سر برابر ہیں، ر اور ن کا باہمی ربط دریافت کرو۔

۲۴- ثابت کرو کہ $(1+\text{لا})^{2\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی میں درمیانی رقم

$$=\frac{1\times3\times5\times\ldots\ldots(2\text{ن}-1)}{\underline{|\text{ن}}}\times2^{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}}$$

۲۵- $(2\,\text{لا}+3\,\text{ما})^{\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی میں سروں کا مجموعہ

دریافت کرو۔

۲۶۔ $(۵ا - ۴ب)^{ن}$ کی صورت تفصیلی میں سروں کا مجموعہ دریافت کرو۔

اگر ن مثبت صحیح عدد ہو اور $(۱ + لا)^{ن}$ کی صورت تفصیلی میں رقموں کے سر $ج_۰، ج_۱، ج_۲، \ldots\ldots ج_ن$ ہوں تو ثابت کرو کہ

۲۷۔ $ج_۱ + ۲ج_۲ + ۳ج_۳ + \cdots\cdots + ن ج_ن = ن \times ۲^{ن-۱}$

۲۸۔ $ج_۰ + \frac{ج_۱}{۲} + \frac{ج_۲}{۳} + \cdots\cdots + \frac{ج_ن}{ن+۱} = \frac{۲^{ن+۱} - ۱}{ن+۱}$

۲۹۔ $ج_۰ ج_۱ + ج_۱ ج_۲ + ج_۲ ج_۳ + \cdots + ج_{ن-۱} ج_ن = \frac{|\underline{۲ن}}{|\underline{ن-۱}\ |\underline{ن+۱}}$

۳۰۔ $\frac{ج_۱}{ج_۰} + \frac{۲ج_۲}{ج_۱} + \frac{۳ج_۳}{ج_۲} + \cdots\cdots + \frac{ن ج_ن}{ج_{ن-۱}} = \frac{ن(ن+۱)}{۲}$

۳۱۔ $(ج_۰ + ج_۱)(ج_۱ + ج_۲)\cdots\cdots(ج_{ن-۱} + ج_ن)$

$= \frac{ج_۱ ج_۲ ج_۳ \cdots\cdots ج_ن (ن+۱)^{ن}}{|\underline{ن}}$

۳۲۔ $۲ج_۰ + \frac{۲^۲ ج_۱}{۲} + \frac{۲^۳ ج_۲}{۳} + \frac{۲^۴ ج_۳}{۴} + \cdots\cdots + \frac{۲^{ن+۱} ج_ن}{ن+۱}$

$= \frac{۳^{ن+۱} - ۱}{ن+۱}$

۳۳۔ $ج_۰ ج_ر + ج_۱ ج_{ر+۱} + ج_۲ ج_{ر+۲} + \cdots\cdots + ج_{ن-ر} ج_ن$

$= \frac{|\underline{۲ن}}{|\underline{ن-ر}\ |\underline{ن+ر}}$

۳۴۔ $\text{ج}_0 - \frac{1}{2}\text{ج}_1 + \frac{1}{3}\text{ج}_2 - \frac{1}{4}\text{ج}_3 + \cdots + (-1)^{\text{ن}} \frac{\text{ج}_{\text{ن}}}{\text{ن}+1}$

$$= \frac{1}{\text{ن}+1}$$

۳۵۔ $\text{ج}_0،\ \text{ج}_1،\ \text{ج}_2،\ \text{ج}_3،\ \ldots\ldots\ \text{ج}_{\text{ن}}$ میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کا مجموعہ $= 2^{2\text{ن}-1} - \frac{\lfloor 2\text{ن}}{2 \lfloor \text{ن} \lfloor \text{ن}}$

۳۶۔ سلسلہ $1 + {}_{\text{ن}}\text{ج}_2\, \text{لا}^2 + {}_{\text{ن}}\text{ج}_4\, \text{لا}^4 + \ldots\ldots$ کو جمع کرو

۳۷۔ $1 + {}_{\text{ن}}\text{ج}_1 \frac{\text{لا}}{1+\text{لا}} + {}_{\text{ن}}\text{ج}_2 \left(\frac{\text{لا}}{1+\text{لا}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\text{لا}}{1+\text{لا}}\right)^{\text{ن}}$

کو مختصر کرو۔

سلسلوں کا اتساع اور استدقاق

۱۹۰۔ اگر کسی سلسلہ مقادیر میں رقموں کی تعداد محدود ہو تو اسکو سلسلہ متناہیہ کہتے ہیں اور اگر رقموں کی تعداد غیر محدود ہو تو اسکو سلسلہ غیر متناہیہ کہتے ہیں۔

اتساع اور استدقاق کی بحث میں بالعموم کسی سلسلہ ارقام کو ہم اس طرح تعبیر کریں گے۔

$$\text{ص}_1 + \text{ص}_2 + \text{ص}_3 + \ldots\ldots\ldots + \text{ص}_{\text{ن}} + \ldots\ldots\ldots$$

اب فرض کرو کہ ن رقموں کا ایک سلسلہ دیا ہوا ہے اس سلسلہ کا مجموعہ ایک جملہ ن کا ہوگا۔ اگر ن کو لا انتہا بڑھایا جائے تو یہ مجموعہ یا تو کسی خاص مقدار محدود کے قریب آتا جائیگا یا لا انتہا بڑا ہوگا۔

جب کسی سلسلہ غیر متناہی میں پہلی ن رقموں کا مجموعہ

کسی مقدار محدود سے تعداداً بڑھ نہ سکے خواہ ن کتنا ہی بڑا کیوں نہ ہو تو ایسے سلسلہ کو مستدق کہتے ہیں۔

اگر کسی سلسلہ غیر متناہی میں ن کو کافی طور پر بڑھانے سے پہلی ن رقموں کا مجموعہ ہر ایک مقدار محدود سے بڑھ سکے تو ایسے سلسلے کو متسع کہتے ہیں۔

اگر ہم کسی سلسلہ کی پہلی ن رقموں کا مجموعہ دریافت کرسکیں تو اس سے ہمیں بآسانی معلوم ہو سکیگا کہ سلسلہ مستدق ہے یا متسع، کیونکہ ن کو کافی بڑھانے سے صورت اول میں سلسلہ کا مجموعہ ہمیشہ محدود رہیگا اور صورت دوم میں لا انتہا زیادہ ہوگا مثلاً سلسلہ

$$ ١ + لا + لا^٢ + لا^٣ + \ldots\ldots $$

کی ن ارقام کا مجموعہ $= \frac{١ - لا^ن}{١ - لا}$

اگر تعداداً لا ایک سے چھوٹا ہو تو ن کے لا انتہا بڑھنے سے یہ مجموعہ ایک محدود مقدار $\frac{١}{١ - لا}$ کے قریب آتا جائیگا اور اس صورت میں سلسلہ مستدق ہوگا۔

اب اگر تعداداً لا ایک سے بڑا ہو تو پہلی ن رقموں کا مجموعہ $\frac{لا^ن - ١}{لا - ١}$ ہوگا۔ اور ن کو کافی طور پر بڑھانے سے ہم اس مجموعہ کو ہر ایک مقدار محدود کی نسبت بڑا بنا سکتے ہیں۔ پس معلوم ہوا کہ اس صورت میں سلسلہ مجوزہ متسع ہے۔

اگر لا = ١ تو پہلی ن رقموں کا مجموعہ = ن، اسلئے سلسلہ مجوزہ متسع ہے۔

اگر لا = -١ تو سلسلہ کی صورت یہ ہوگی۔

$$1-1+1-1+1-1+\dots\dots$$

اس میں جفت تعداد ارقام کا مجموعہ صفر ہے اور طاق تعداد کا مجموعہ ایک ہے اس لئے سلسلہ کی قیمت صفر اور ایک کے درمیان جنبش کرتی ہے اس قسم کے سلسلے کو اہتزازی کہتے ہیں

اکثر اوقات ایسی صورتیں پیش آتی ہیں جہاں سلسلہ کی پہلی ن رقموں کا مجموعہ دریافت کرنے کی بظاہر کوئی صورت نہیں ہوتی ایسی حالتوں میں ہمیں چند ایسے قوانین جبریہ معلوم ہونے چاہئیں جن کی مدد سے ن رقموں کا مجموعہ دریافت کرنے کے بغیر ہم معلوم کر سکیں کہ کوئی سلسلہ مفروضہ مستدق ہے یا متسع۔

۱۹۱۔ اگر کسی سلسلہ غیر متناہی کی رقمیں یکے بعد دیگرے مثبت اور منفی ہوں تو وہ مستدق ہوگا اگر اس کی ہر ایک رقم اپنی رقم ماقبل سے تعداداً کم ہو۔

فرض کرو کہ سلسلہ مجوزہ

$$\text{ص}_1-\text{ص}_2+\text{ص}_3-\text{ص}_4+\text{ص}_5-\text{ص}_6+\dots\dots \text{ ہے}$$

بموجب شرائط سوال $\text{ص}_1 > \text{ص}_2 > \text{ص}_3 > \text{ص}_4 \dots$

فرض کرو کہ رقموں کی کسی تعداد کا مجموعہ م سے تعبیر ہوتا ہے۔
سلسلہ مجوزہ اس طرح بھی لکھا جا سکتا ہے

$$(\text{ص}_1-\text{ص}_2)+(\text{ص}_3-\text{ص}_4)+(\text{ص}_5-\text{ص}_6)+\dots\dots$$

جس سے ظاہر ہے کہ م ایک مثبت مقدار ہے کیونکہ خطوط قوسی کے اندر جو جملے ہیں وہ سب کے سب مثبت ہیں۔

اس سلسلہ کو ہم صورت ذیل میں بھی لکھ سکتے ہیں یعنی

ص۱ - (ص۲ - ص۳) - (ص۴ - ص۵) - ....

جس سے ظاہر ہے کہ م ہمیشہ ص۱ سے کم رہتا ہے خواہ تعداد ارقام کچھ ہی لی جائے۔ ثابت ہوا کہ سلسلہ مجوزہ مستدق ہے۔

مثلاً سلسلہ ۱ - ۱/۲ + ۱/۳ - ۱/۴ + ۱/۵ - ۱/۶ + ...

مستدق ہے۔ لوکارثمی سلسلوں کے باب میں ہم دیکھیں گے کہ اس کا مجموعہ لوک ۲ ہے۔

نیز سلسلہ ۲/۱ - ۳/۲ + ۴/۳ - ۵/۴ + ۶/۵ - ۷/۶ + ...

میں ہر ایک رقم تعداداً اپنی رقم ماقبل سے کم ہے اسلئے سلسلہ مستدق ہے لیکن سلسلہ مندرجہ بالا دو سلسلوں کا حاصل جمع ہے اور وہ سلسلے یہ ہیں

۱ - ۱/۲ + ۱/۳ - ۱/۴ + ۱/۵ - ۱/۶ + ... (۱)

اور ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ... (۲)

اب سلسلہ (۱) کا مجموعہ لوک ۲ ہے اور سلسلہ (۲) میں اگر تعداد ارقام جفت ہو تو مجموعہ صفر ہوتا ہے اور اگر طاق ہو تو ایک پس معلوم ہوا کہ سلسلہ مجوزہ مستدق ہے اور اگر جفت تعداد ارقام لی جائے تو اس کا مجموعہ لوک ۲ کے قریب قریب آتا جاتا ہے اور اگر طاق تعداد لی جائے تو مجموعہ ۱ + لوک ۲ کے قریب آتا جاتا ہے۔

۱۹۲- اگر ایک سلسلہ غیر متناہی میں کسی رقم معینہ سے شروع ہو کر اُس کے بعد کی تمام رقمیں ایسی ہوں کہ ہر ایک رقم کی نسبت اپنی رقم ماقبل سے ایک ایسی مقدار سے تعداداً کم

ہو جو خود بلحاظ عددی قیمت کے ایک سے کم ہے۔ تو سلسلہ مستدق ہوگا

فرض کرو کہ سلسلہ مجوزہ $\text{صہ}_{\text{۱}} + \text{صہ}_{\text{۲}} + \text{صہ}_{\text{۳}} + \text{صہ}_{\text{۴}} + \ldots\ldots$

ہے جس میں $\text{صہ}_{\text{۱}}$ رقم معینہ ہے اور م ان رقموں کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے۔

$$\text{م} = \text{صہ}_{\text{۱}} + \text{صہ}_{\text{۲}} + \text{صہ}_{\text{۳}} + \text{صہ}_{\text{۴}} + \ldots\ldots$$

$$= \text{صہ}_{\text{۱}}\left\{\text{۱} + \frac{\text{صہ}_{\text{۲}}}{\text{صہ}_{\text{۱}}} + \frac{\text{صہ}_{\text{۳}}}{\text{صہ}_{\text{۲}}} \times \frac{\text{صہ}_{\text{۲}}}{\text{صہ}_{\text{۱}}} + \frac{\text{صہ}_{\text{۴}}}{\text{صہ}_{\text{۳}}} \times \frac{\text{صہ}_{\text{۳}}}{\text{صہ}_{\text{۲}}} \times \frac{\text{صہ}_{\text{۲}}}{\text{صہ}_{\text{۱}}} + \ldots\ldots\right\}$$

اب بموجب شرائط سوال $\frac{\text{صہ}_{\text{۲}}}{\text{صہ}_{\text{۱}}}$، $\frac{\text{صہ}_{\text{۳}}}{\text{صہ}_{\text{۲}}}$، $\frac{\text{صہ}_{\text{۴}}}{\text{صہ}_{\text{۳}}}$، ....

میں سے ہر ایک نسبت ک سے کم ہے جہاں ک ایک ایسی مقدار ہے جو خود ایک سے کم ہے۔

اسلئے $\text{م} < \text{صہ}_{\text{۱}}(\text{۱} + \text{ک} + \text{ک}^{\text{۲}} + \text{ک}^{\text{۳}} + \ldots\ldots)$

یعنی $\text{م} < \frac{\text{صہ}_{\text{۱}}}{\text{۱} - \text{ک}}$

اسلئے ثابت ہوا کہ سلسلہ مستدق ہے دعویٰ مذکورہ بالا میں طالب علم کو الفاظ "کسی رقم معینہ سے شروع ہوکر اُس کے بعد" کی ضرورت پر خاص توجہ کرنی چاہیئے۔

سلسلہ ذیل پر غور کرو

$$\text{۱} + \text{۲}\,\text{لا} + \text{۳}\,\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۴}\,\text{لا}^{\text{۳}} + \ldots\ldots + \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{۱}} + \ldots\ldots$$

یہاں $\frac{\text{صہ}_{\text{ن}}}{\text{صہ}_{\text{ن}-\text{۱}}} = \frac{\text{ن}\,\text{لا}}{\text{ن}-\text{۱}} = \left(\text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{ن}-\text{۱}}\right)\text{لا}$

اب ن کو کافی طور پر بڑھانے سے ہم اس نسبت کو لا کے اتنا

قریب لا سکتے ہیں جتنا چاہیں اور اگر ایسا کریں تو آخرکار ہر ایک رقم کی نسبت اپنی رقم ماقبل سے لا ہوگی ۔ پس اگر لا $>$ ۱ تو سلسلہ مستدق ہوگا ۔

لیکن نسبت $\frac{ص_ن}{ص_{ن-۱}}$ ایک سے کم نہیں ہوسکتی جب تک کہ $\frac{ن لا}{ن-۱}$ ایک سے کم نہ ہو یعنی جب تک کہ ن بڑا نہ ہو $\frac{۱}{۱-لا}$ سے ۔ یہ ایک ایسے مستدق سلسلہ کی مثال ہے جس میں رقمیں کسی خاص مقام تک بڑھتی ہیں مگر اس کے بعد گھٹنی شروع ہوتی ہیں مثلاً

اگر لا = $\frac{۹۹}{۱۰۰}$ تو $\frac{۱}{۱-لا}$ = ۱۰۰

اور رقمیں گھٹنی شروع نہیں ہوتیں جب تک کہ ۱۰۰ ویں رقم کی نوبت نہ آجائے

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ سلسلہ ۱ + $\frac{۱}{۲}$ + $\frac{۱}{۳}$ + $\frac{۱}{۴}$ + ... متسع ہے ۔

پہلی رقم = ۱

دوسری رقم = $\frac{۱}{۲}$

اگلی دو رقموں کا مجموعہ $>$ $\frac{۲}{۴}$

اگلی ۴ رقموں کا مجموعہ $>$ $\frac{۴}{۸}$ [کیونکہ سب سے چھوٹی رقم $\frac{۱}{۸}$ ہے]

اگلی ۸ رقموں کا مجموعہ $>$ $\frac{۸}{۱۶}$ اور علیٰ ہذا القیاس

اسلیے سلسلہ مجوزہ $>$ ۱ + $\frac{۱}{۲}$ + $\frac{۱}{۲}$ + $\frac{۱}{۲}$ + ... لاتناہی تک

اسلیے سلسلہ متسع ہے

مثال ۲- ایک سلسلے کی ن ویں رقم $\frac{(\text{ن}+1)\,\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ن}^2}$ ہے۔ معلوم کرو کہ سلسلہ مستدق ہے یا متبع ؟

اس جگہ $\frac{\text{ص}_{\text{ن}}}{\text{ص}_{\text{ن}-1}} = \frac{(\text{ن}+1)\,\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ن}^2} \div \frac{\text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}}{(\text{ن}-1)^2}$

$= \frac{(\text{ن}+1)(\text{ن}-1)^2}{\text{ن}^3}\,\text{لا}$

اسلئے اگر ن غیر متناہی ہو تو حد $\frac{\text{ص}_{\text{ن}}}{\text{ص}_{\text{ن}-1}} = \text{لا}$

پس اگر $\text{لا} < 1$ تو سلسلہ مستدق ہے

اگر $\text{لا} > 1$ تو سلسلہ متبع ہے

اگر $\text{لا} = 1$ تو حد $\frac{\text{ص}_{\text{ن}}}{\text{ص}_{\text{ن}-1}} = 1$ اس صورت میں مزید تحقیق کی ضرورت ہوگی۔

مثال ۳- معلوم کرو کہ سلسلہ $1^2 + 2^2\,\text{لا} + 3^2\,\text{لا}^2 + 4^2\,\text{لا}^3 + \dots\dots$ مستدق ہے یا متبع ؟

اس جگہ حد $\frac{\text{ص}_{\text{ن}}}{\text{ص}_{\text{ن}-1}} =$ حد $\frac{\text{ن}^2\,\text{لا}^{\text{ن}-1}}{(\text{ن}-1)^2\,\text{لا}^{\text{ن}-2}} = \text{لا}$ جب ن غیر متناہی ہو

پس اگر $\text{لا} < 1$ تو سلسلہ مستدق ہے

اور اگر $\text{لا} > 1$ تو سلسلہ متبع ہے

اگر $\text{لا} = 1$ تو سلسلہ کی صورت یہ ہوگی $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots\dots$ جو صریحاً متبع ہے

مثال ۴- سلسلہ $\text{ا} + (\text{ا}+\text{ف})\,\text{ب} + (\text{ا}+2\text{ف})\,\text{ب}^2 + \dots\dots$

$+ \{\text{ا} + (\text{ن}-1)\,\text{ف}\}\,\text{ب}^{\text{ن}-1} + \dots\dots$

یں $\text{حد}\ \frac{\text{ص}_{\text{ن}}}{\text{ص}_{\text{ن}-۱}} = \text{حد}\ \frac{۱+(\text{ن}-۱)\text{ف}}{۱+(\text{ن}-۲)\text{ف}} \times \text{ب} = \text{ب}$

جب ن غیر متناہی ہو

اسلئے اگر $\text{ب} < ۱$ تو سلسلہ متدق ہے اور مجموعہ محدود ہے

امثلہ نمبری ۲۳

ثابت کرو کہ ذیل کے سلسلے متدق ہیں۔

۱- $\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۲^۳ \times ۳} - \frac{۱}{۲^۴ \times ۴} + \dots\dots$

۲- $۱ + ۱ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} + \frac{۱}{۵!} + \dots\dots$

۳- $۱ + \text{لا} + \frac{\text{لا}^۲}{۲!} + \frac{\text{لا}^۳}{۳!} + \frac{\text{لا}^۴}{۴!} + \dots\dots$ لا کی محدود قیمتوں کے لئے

۴- $۱ + ۲\,\text{لا} + ۳\,\text{لا}^۲ + ۴\,\text{لا}^۳ + ۵\,\text{لا}^۴ + \dots\dots$ اگر لا تعداداً ایک سے کم ہو

۵- ثابت کرو کہ اگر $\text{ع} > ۱$ تو سلسلہ

$\frac{۱}{۱^{\text{ع}}} + \frac{۱}{۲^{\text{ع}}} + \frac{۱}{۳^{\text{ع}}} + \frac{۱}{۴^{\text{ع}}} + \dots\dots$ متدق ہے

معلوم کرو کہ ذیل کے سلسلے متدق ہیں یا متبع؟

۶- $\frac{۱}{۱\times۲} + \frac{۱}{۲\times۳} + \frac{۱}{۳\times۴} + \frac{۱}{۴\times۵} + \dots\dots$

۷- $\frac{۱}{\text{لا}\ \text{ما}} - \frac{۱}{(\text{لا}+۱)(\text{ما}+۱)} + \frac{۱}{(\text{لا}+۲)(\text{ما}+۲)} - \frac{۱}{(\text{لا}+۳)(\text{ما}+۳)} + \dots$

۸- $\sqrt{\frac{۱}{۲}} + \sqrt{\frac{۲}{۳}} + \sqrt{\frac{۳}{۴}} + \sqrt{\frac{۴}{۵}} + \ldots\ldots$

۹- $۱ + ۳\text{لا} + ۵\text{لا}^{۲} + ۷\text{لا}^{۳} + ۹\text{لا}^{۴} + \ldots\ldots$

۱۰ $۱ + \frac{۲^{۲}}{\underline{|۲}} + \frac{۳^{۳}}{\underline{|۳}} + \frac{۴^{۴}}{\underline{|۴}} + \ldots\ldots$

۱۱- $\frac{\text{لا}}{۱ \times ۲} + \frac{\text{لا}^{۲}}{۳ \times ۴} + \frac{\text{لا}^{۳}}{۵ \times ۶} + \frac{\text{لا}^{۴}}{۷ \times ۸} + \ldots\ldots$

۱۹۳- مسئلہ ثنائی کی صورت تفصیلی جب قوت نما مثبت صحیح عدد نہ ہو۔

اب تک ہم نے مسئلہ ثنائی کی اُس صورت پر غور کیا ہے جسمیں قوت نما مثبت صحیح عدد تھا، اب ہم ن کی کسی قیمت کے لئے اس کی صداقت کا امتحان کریں گے۔ یعنی جملہ $(۱+\text{لا})^{\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی اُس حالت میں دریافت کرینگے جب قوت نما ن منفی ہو یا کسر واجب۔

اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو صورت تفصیلی ایک خاص حد پر آکے ختم ہو گی کیونکہ اس کے سروں میں اجزا ضربی ن، ن-۱، ن-۲، .... شامل ہیں پس جس وقت ہم ایسے سر پر پہنچیں گے جو نابود ہوتا ہو تو اُس وقت سلسلہ بھی ختم ہو جائیگا لیکن اگر ن منفی یا مکسور ہو تو سلسلہ ارقام ہمیشہ تک جاری رہے گا اب ایسی صورت میں سب سے اول ہم اس نتیجہ اعظم کو ثابت کرینگے کہ "منفی اور مکسور قوت نما کی صورت میں مسئلہ ثنائی کا پھیلاؤ ہمیشہ مستدق ہوگا اگر لا تعداداً ایک

سے کم ہو" بعض حالتوں میں جب لا = ۱ یا لا = -۱ تو بھی سلسلہ متدق ہوگا لیکن فی الحال ایسی صورتوں پر غور کرنے کی ضرورت نہیں۔

ثابت کرو کہ مسئلہ ثنائی قوت نما کی تمام منفی اور کسری قیمتوں کے لئے متدق ہوگا اگر لا تعداداً ایک سے کم ہو
جملہ $(\text{۱} + \text{لا})^{\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی میں اگر $\text{ص}_{\text{ر}+\text{۱}}$ اور $\text{ص}_{\text{ر}}$ سے $(\text{ر}+\text{۱})$ ویں اور ر ویں رقمیں تعبیر کی جائیں تو

$$\frac{\text{ص}_{\text{ر}+\text{۱}}}{\text{ص}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن} - \text{ر} + \text{۱}}{\text{ر}} \times \text{لا} = \left(\frac{\text{ن}+\text{۱}}{\text{ر}} - \text{۱}\right) \text{لا}$$

ظاہر ہے کہ جیسے ر بڑھتا ہے ویسے $\frac{\text{ن}+\text{۱}}{\text{ر}}$ تعداداً گھٹتا ہے خواہ ن کی کچھ ہی قیمت ہو
اسلئے جیسے ر بڑھتا جائیگا ویسے جملہ $\left(\frac{\text{ن}+\text{۱}}{\text{ر}} - \text{۱}\right)$ بتدریج قیمت -۱ کے قریب قریب آتا جائے گا۔
اسلئے جب ر غیر متناہی ہوگا تو نسبت $\left(\frac{\text{ن}+\text{۱}}{\text{ر}} - \text{۱}\right)$ لا متواتر (-لا) کے قریب قریب آتی جائے گی اور آخرکار تعداداً ایک ایسی مقدار سے کم ہوگی جو خود بلحاظ عددی قیمت کے ایک سے کم ہے۔
اسلئے معلوم ہوا کہ اس صورت میں سلسلہ متدق ہے۔

۱۹۴- فرض کرو کہ ن کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو مثبت، منفی یا مکسور ج (ن) سلسلہ ذیل کو تعبیر کرتا ہے یعنی

$$\text{ج}(\text{ن}) = \text{۱} + \text{ن}\,\text{لا} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-\text{۱})}{|\underline{\text{۲}}}\,\text{لا}^{\text{۲}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-\text{۱})(\text{ن}-\text{۲})}{|\underline{\text{۳}}}\,\text{لا}^{\text{۳}} + \ldots\ldots$$

ذیل کی دفعات کے مطالعہ سے پیشتر طالب علم کو چاہیئے کہ ن کی چند خاص خاص قیمتوں کے لئے جملات ذیل کی تفصیلی صورتوں کو مشق کے طور پر لکھے مثلاً

ج(۷)، ج(۸)، ج(-۲)، ج(-۳)، ج($\frac{۱}{۲}$)، ج(م+ن) وغیرہ

ہم اوپر ثابت کر چکے ہیں کہ اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو

ج(ن) = $(۱+\text{لا})^{\text{ن}}$ اب ہم ثابت کریں گے کہ

ج($\frac{\text{ر}}{\text{س}}$) = $(۱+\text{لا})^{\frac{\text{ر}}{\text{س}}}$ جہاں ر اور س مثبت صحیح عدد ہیں

اور ج(-ن) = $(۱+\text{لا})^{-\text{ن}}$ جہاں ن مثبت (صحیح یا مکسور) ہے

۱۹۵- اگر ا اور ب مثبت صحیح عدد ہوں اور ا+ب > ر

تو $_{\text{ا+ب}}\text{ج}_{\text{ر}} = {}_{\text{ا}}\text{ج}_{\text{ر}} + {}_{\text{ا}}\text{ج}_{\text{ر}-۱} \times {}_{\text{ب}}\text{ج}_{۱} + {}_{\text{ا}}\text{ج}_{\text{ر}-۲} \times {}_{\text{ب}}\text{ج}_{۲} + \ldots\ldots + {}_{\text{ب}}\text{ج}_{\text{ر}}$

جہاں ع اشیا میں سے ر، ر اشیا کے اجتماع $_{\text{ع}}\text{ج}_{\text{ر}}$ سے تعبیر ہوتے ہیں۔

اب چونکہ ا اور ب دونوں مثبت صحیح عدد ہیں اسلئے مسئلہ ثنائی کی مدد سے

$(۱+\text{لا})^{\text{ا}} = ۱ + {}_{\text{ا}}\text{ج}_{۱}\,\text{لا} + {}_{\text{ا}}\text{ج}_{۲}\,\text{لا}^{۲} + {}_{\text{ا}}\text{ج}_{۳}\,\text{لا}^{۳} + \ldots\ldots + {}_{\text{ا}}\text{ج}_{\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ر}} + \ldots\ldots + \text{لا}^{\text{ا}}$

اور $(۱+\text{لا})^{\text{ب}} = ۱ + {}_{\text{ب}}\text{ج}_{۱}\,\text{لا} + {}_{\text{ب}}\text{ج}_{۲}\,\text{لا}^{۲} + {}_{\text{ب}}\text{ج}_{۳}\,\text{لا}^{۳} + \ldots\ldots + {}_{\text{ب}}\text{ج}_{\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ر}} + \ldots\ldots + \text{لا}^{\text{ب}}$

∴ ضرب دینے سے $(۱+\text{لا})^{\text{ا+ب}}$ = مندرجہ بالا متناہی سلسلوں کا حاصل ضرب۔

اس میں دونوں طرف $\text{لا}^{\text{ر}}$ کے سر آپس میں برابر ہیں یعنی

$$ {}_{\text{ا+ب}}\text{ج}_{\text{ر}} = {}_{\text{ا}}\text{ج}_{\text{ر}} + {}_{\text{ا}}\text{ج}_{\text{ر-۱}}\;{}_{\text{ب}}\text{ج}_{\text{۱}} + {}_{\text{ا}}\text{ج}_{\text{ر-۲}}\;{}_{\text{ب}}\text{ج}_{\text{۲}} + \dots\dots + {}_{\text{ب}}\text{ج}_{\text{ر}} $$

مسئلہ واندر ماند

۱۹۶ - فرض کرو کہ $\text{ا}_{\text{ر}}$ حاصل ضرب $\text{ا}(\text{ا}-۱)(\text{ا}-۲)\dots\dots(\text{ا}-\text{ر}+۱)$ کو تعبیر کرتا ہے خواہ ا کی کچھ ہی قیمت ہو صحیح، مکسور، مثبت یا منفی۔

اگر ا مثبت صحیح عدد ہو تو $\dfrac{\text{ا}_{\text{ر}}}{\underline{|\text{ر}}} = \dfrac{\text{ا}(\text{ا}-۱)(\text{ا}-۲)\dots\dots(\text{ا}-\text{ر}+۱)}{\underline{|\text{ر}}} = {}_{\text{ا}}\text{ج}_{\text{ر}}$

یعنی ا اشیا میں سے ر، ر اشیا کے کل اجتماع

اب ہم مسئلہ واندر ماند ثابت کرینگے اور وہ یہ ہے۔

اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو اور ا اور ب کی قیمتیں کچھ ہی ہوں تو

$$ (\text{ا}+\text{ب})_{\text{ن}} = \text{ا}_{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{ا}_{\text{ن-۱}}\,\text{ب}_{۱} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\underline{|۲}}\,\text{ا}_{\text{ن-۲}}\,\text{ب}_{۲} + \dots\dots + \text{ب}_{\text{ن}} $$

ہم دفعہ گزشتہ میں ثابت کر چکے ہیں کہ اگر ا اور ب دو مثبت صحیح عدد ہوں اور ا + ب > ن تو

$$ {}_{\text{ا+ب}}\text{ج}_{\text{ن}} = {}_{\text{ا}}\text{ج}_{\text{ن}} + {}_{\text{ا}}\text{ج}_{\text{ن-۱}}\;{}_{\text{ب}}\text{ج}_{۱} + {}_{\text{ا}}\text{ج}_{\text{ن-۲}}\;{}_{\text{ب}}\text{ج}_{۲} + \dots\dots + {}_{۲}\text{ج}_{\text{ن}} $$

یعنی بموجب طریق کتابت مندرجہ بالا۔

$$ \frac{(\text{ا}+\text{ب})_{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}} = \frac{\text{ا}_{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}} + \frac{\text{ا}_{\text{ن-۱}}}{\underline{|\text{ن}-۱}} \times \frac{\text{ب}_{۱}}{\underline{|۱}} + \frac{\text{ا}_{\text{ن-۲}}}{\underline{|\text{ن}-۲}} \times \frac{\text{ب}_{۲}}{\underline{|۲}} + \dots\dots\dots + \frac{\text{ب}_{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}} $$

طرفین کو ا ن میں ضرب دینے سے حاصل ہوگا

$$(\text{ا}+\text{ب})^{\text{ن}} = \text{ا}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{ا}^{\text{ن}-۱}\,\text{ب}^{۱} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲!}\,\text{ا}^{\text{ن}-۲}\,\text{ب}^{۲} + \cdots + \text{ب}^{\text{ن}} \quad \cdots\cdots (۱)$$

طرفین مساوات کا درجہ بلحاظ ا اور ب کے ن ہے اور ہم جانتے ہیں کہ یہ نتیجہ ا اور ب کی تمام مثبت صحیح قیمتوں کے لئے درست ہے اب ہم اس کو ا اور ب کی تمام ممکن قیمتوں کے لئے ثابت کریں گے۔

اگر ا کوئی خاص عدد صحیح ن سے بڑا ہو تو طرفین مساوات ب کی ہر ایک قیمت کے لئے برابر ہونگی یعنی مساوات مذکورہ ب کی اتنی قیمتوں کے لئے درست ہوگی جو تعداد میں ن سے زیادہ ہیں پس معلوم ہوا کہ مساوات ا کی اُس مختص قیمت کے لئے اور ب کی کسی قیمت کے لئے درست ہے۔

اسی طرح سے ثابت ہو سکتا ہے کہ مساوات ب کی کسی خاص قیمت کے لئے اور ا کی اتنی قیمتوں کے لئے جو تعداد میں ن سے زیادہ ہیں صحیح ہے، پس معلوم ہوا کہ یہ مساوات ب کی کسی خاص قیمت کے لئے اور ا کی کسی قیمت کے لئے صحیح ہے۔

پس یہ مساوات ا کی تمام قیمتوں کے لئے اور ب کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہوئی۔

۱۹۷- مسئلہ ثنائی کا ثبوت کسی قوت نما کیلئے

فرض کرو کہ ج (م) سے سلسلہ

$$1+\frac{\text{م}\,\text{لا}}{\lfloor 1}+\frac{\text{م}^2\text{لا}^2}{\lfloor 2}+\frac{\text{م}^3\text{لا}^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$$

تعبیر ہوتا ہے یعنی

$$\text{ج}(\text{م})\equiv 1+\frac{\text{م}\,\text{لا}}{\lfloor 1}+\frac{\text{م}^2\text{لا}^2}{\lfloor 2}+\frac{\text{م}^3\text{لا}^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots+\frac{\text{م}^{\text{ر}}\text{لا}^{\text{ر}}}{\lfloor \text{ر}}+\cdots\cdots$$

$$\text{ج}(\text{ن})\equiv 1+\frac{\text{ن}\,\text{لا}}{\lfloor 1}+\frac{\text{ن}^2\text{لا}^2}{\lfloor 2}+\frac{\text{ن}^3\text{لا}^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots+\frac{\text{ن}^{\text{ر}}\text{لا}^{\text{ر}}}{\lfloor \text{ر}}+\cdots\cdots$$

اور $\text{ج}(\text{م}+\text{ن})\equiv 1+\frac{(\text{م}+\text{ن})\text{لا}}{\lfloor 1}+\frac{(\text{م}+\text{ن})^2\text{لا}^2}{\lfloor 2}+\cdots\cdots+\frac{(\text{م}+\text{ن})^{\text{ر}}\text{لا}^{\text{ر}}}{\lfloor \text{ر}}+\cdots\cdots$

حاصل ضرب ج (م) × ج (ن) میں $\text{لا}^{\text{ر}}$ کا سر

$$=\frac{\text{م}^{\text{ر}}}{\lfloor \text{ر}}+\frac{\text{م}^{\text{ر}-1}}{\lfloor \text{ر}-1}\times\frac{\text{ن}}{\lfloor 1}+\frac{\text{م}^{\text{ر}-2}}{\lfloor \text{ر}-2}\times\frac{\text{ن}^2}{\lfloor 2}+\cdots\cdots+\frac{\text{ن}^{\text{ر}}}{\lfloor \text{ر}}$$

$$=\frac{1}{\lfloor \text{ر}}\left[\text{م}^{\text{ر}}+\text{ر}\,\text{م}^{\text{ر}-1}\text{ن}+\frac{\text{ر}(\text{ر}-1)}{\lfloor 2}\text{م}^{\text{ر}-2}\text{ن}^2+\cdots\cdots+\text{ن}^{\text{ر}}\right]$$

$$=\frac{1}{\lfloor \text{ر}}(\text{م}+\text{ن})^{\text{ر}}$$ [بذریعہ مسئلہ واندرماند]

= $\text{لا}^{\text{ر}}$ کا سر جملہ ج (م + ن) میں

یعنی ثابت ہوا کہ حاصل ضرب ج (م) × ج (ن) میں لا کی کسی قوت کا سر = جملہ ج (م + ن) میں لا کی اُسی قوت کا سر

اسلئے م اور ن کی تمام قیمتوں کے لئے

$$\text{ج}(\text{م})\times\text{ج}(\text{ن})=\text{ج}(\text{م}+\text{ن})$$

کیونکہ اگر لا بلحاظ عددی قیمت کے ایک سے کم ہو تو تینوں سلسلے

مستدق ہوتے ہیں اور اسی طرح سے

$$\text{ج}(\text{م}) \times \text{ج}(\text{ن}) \times \text{ج}(\text{ف}) = \text{ج}(\text{م}+\text{ن}) \times \text{ج}(\text{ف})$$

$= \text{ج}(\text{م}+\text{ن}+\text{ف})$ اور علیٰ ہذالقیاس

$$\therefore \text{ج}(\text{م}) \times \text{ج}(\text{ن}) \times \text{ج}(\text{ف}) \times \ldots = \text{ج}(\text{م}+\text{ن}+\text{ف}+\ldots)$$

اس مساوات میں فرض کرو کہ

$\text{م} = \text{ن} = \text{ف} = \ldots = \frac{\text{ر}}{\text{س}}$ جہاں ر اور س مثبت صحیح عدد ہیں اور فرض کرو کہ ایسی مقادیر کی تعداد س ہے۔

$\therefore \text{ج}\left(\frac{\text{ر}}{\text{س}}\right) \times \text{ج}\left(\frac{\text{ر}}{\text{س}}\right) \times \ldots$ س اجزاء ضربی تک

$= \text{ج}\left(\frac{\text{ر}}{\text{س}} + \frac{\text{ر}}{\text{س}} + \frac{\text{ر}}{\text{س}} + \ldots\right.$ س رقموں تک $\left.\right)$

$\therefore \left[\text{ج}\left(\frac{\text{ر}}{\text{س}}\right)\right]^{\text{س}} = \text{ج}(\text{ر}) = (1+\text{لا})^{\text{ر}}$ کیونکہ ر مثبت عدد ہے

$$\therefore (1+\text{لا})^{\frac{\text{ر}}{\text{س}}} = \text{ج}\left(\frac{\text{ر}}{\text{س}}\right) = 1 + \frac{\text{ر}}{\text{س}}\,\text{لا} + \frac{\frac{\text{ر}}{\text{س}}\left(\frac{\text{ر}}{\text{س}}-1\right)}{\lfloor 2} \text{لا}^2 + \ldots$$

اور یہ صورت تفصیلی مسئلہ ثنائی کے کسری قوت نما کے لئے ہے۔

اب اگر منفی قوت نما کے لئے مسئلہ ثابت کرنا ہو تو حاصل ضرب $\text{ج}(\text{م}) \times \text{ج}(\text{ن})$ میں ن کی بجائے $(-\text{م})$ رکھو، تب

$$\text{ج}(\text{م}) \times \text{ج}(-\text{م}) = \text{ج}(\text{م}-\text{م}) = \text{ج}(0) = 1$$

$$\therefore \text{ج}(-\text{م}) = \frac{1}{\text{ج}(\text{م})} = \frac{1}{(1+\text{لا})^{\text{م}}} = (1+\text{لا})^{-\text{م}}$$

$$\therefore (1-\text{لا})^{-\text{م}} = \text{ج}(-\text{م}) = 1 + (-\text{م})\,\text{لا} + \frac{(-\text{م})(-\text{م}-1)}{\lfloor 2} \text{لا}^2 + \ldots$$

۱۹۸- مسئلہ ثنائی کسی قوت کا کیلئے (یولر کا ثبوت)

خواہ ن کی کچھ ہی قیمت ہو مثبت، منفی، صحیح یا مکسور فرض کرو کہ ج (م) سلسلہ ذیل کو تعبیر کرتا ہے

$$1 + \text{م}\,\text{لا} + \frac{\text{م}(\text{م}-1)}{1\times 2}\text{لا}^2 + \frac{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)}{1\times 2\times 3}\text{لا}^3 + \dots\dots$$

$$\text{پس ج}(\text{م}) \equiv 1 + \text{م}\,\text{لا} + \frac{\text{م}(\text{م}-1)}{1\times 2}\text{لا}^2 + \frac{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)}{1\times 2\times 3}\text{لا}^3 + \dots\dots$$

$$\text{اور ج}(\text{ن}) \equiv 1 + \text{ن}\,\text{لا} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{1\times 2}\text{لا}^2 + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{1\times 2\times 3}\text{لا}^3 + \dots\dots$$

اگر ہم ان سلسلوں کو اکٹھا ضرب دیں تو حاصل ضرب ایک ایسا سلسلہ لا کی قواء متصاعدہ میں ہوگا جس کے سروں کی ترکیب اور صورت غیر متبدل ہوگی خواہ م اور ن کچھ ہی ہوں۔

اس حاصل ضرب کی یہ غیر متبدل صورت معلوم کرنے کے لئے ہم م اور ن کو وہ قیمتیں دے سکتے ہیں جن سے عمل میں سہولت ہو

پس فرض کرو کہ م اور ن مثبت صحیح عدد ہیں اس صورت میں ج (م) صورت تفصیلی جملہ $(1+\text{لا})^{\text{م}}$ کی ہوگی اور ج (ن) صورت تفصیلی $(1+\text{لا})^{\text{ن}}$ کی، اسلئے

$$\text{ج}(\text{م}) \times \text{ج}(\text{ن}) = (1+\text{لا})^{\text{م}} \times (1+\text{لا})^{\text{ن}} = (1+\text{لا})^{\text{م}+\text{ن}}$$

لیکن اگر م اور ن مثبت صحیح عدد ہوں تو $(1+\text{لا})^{\text{م}+\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی ہوگی

۱ + (م + ن) لا + ((م+ن)(م+ن−۱) / ۱×۲) لا² + ... (۱)

پس معلوم ہوا کہ تمام حالتوں میں حاصل ضرب ج (م) × ج (ن) کی صورت تفصیلی (۱) ہوگی خواہ م اور ن کی قیمتیں کچھ ہی ہوں اور سابق طریق کتابت کے موافق ہم اس کو ج (م + ن) سے تعبیر کرسکتے ہیں اسلئے م اور ن کی تمام قیمتوں کے لئے

ج (م) × ج (ن) = ج (م + ن)

نیز ج (م) × ج (ن) × ج (ف) = ج (م + ن) × ج (ف)

= ج (م + ن + ف)

اسی طرح عمل کرنے سے ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ

ج (م) × ج (ن) × ج (ف) .... س اجزاء ضربی تک

= ج (م + ن + ف + ... س رقموں تک)

فرض کرو کہ ان میں سے ہرایک مقدار ر/س کے برابر ہے جہاں ر اور س دونوں مثبت صحیح عدد ہیں۔

∴ {ج (ر/س)}^س = ج (ر)

لیکن چونکہ ر مثبت صحیح عدد ہے اسلئے ج (ر) = (۱ + لا)^ر

∴ (۱ + لا)^ر = {ج (ر/س)}^س

∴ (۱ + لا)^(ر/س) = ج (ر/س)

لیکن ج $(\frac{ر}{س})$ سلسلہ ذیل کو تعبیر کرتا ہے۔

$$1 + \frac{ر}{س} لا + \frac{\frac{ر}{س}(\frac{ر}{س}-1)}{1\times 2} لا^2 + \ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore (1+لا)^{\frac{ر}{س}} = 1 + \frac{ر}{س} لا + \frac{\frac{ر}{س}(\frac{ر}{س}-1)}{1\times 2} لا^2 + \ldots\ldots\ldots$$

جس سے مسئلہ ثنائی کسری قوت نما کے لئے ثابت ہوا۔

اب اگر قوت نما منفی ہو تو اس طرح عمل کرو۔

یہ ثابت ہو چکا ہے کہ م اور ن کی سب قیمتوں کے لئے

$$ج(م) \times ج(ن) = ج(م+ن)$$

اس میں م کی بجائے (-ن) رکھو (جہاں ن مقدار مثبت ہے) تو حاصل ہوگا۔

$$ج(-ن) \times ج(ن) = ج(-ن+ن) = ج(0) = 1$$

چونکہ سلسلہ کی سب ارقام سوائے پہلی رقم کے نابود ہوتی ہیں

$$\therefore \frac{1}{ج(ن)} = ج(-ن)$$

لیکن ن کی کسی مثبت قیمت کے لئے ج (ن) $= (1+لا)^ن$

$$\therefore \frac{1}{(1+لا)^ن} = ج(-ن)$$

یا $(1+لا)^{-ن} = ج(-ن)$

$$لیکن\ ج(-ن) \equiv 1 + (-ن) لا + \frac{(-ن)(-ن-1)}{1\times 2} لا^2 + \ldots\ldots$$

اسلئے $(۱+لا)^{-ن} = ۱ + (-ن)لا + \frac{(-ن)(-ن-۱)}{۱\times۲}لا^{۲} + \dots\dots$

جس سے مسئلہ ثنائی منفی قوت نما کے لئے بھی ثابت ہوا۔
پس یہ مسئلہ بالعموم قوت نما کی مثبت، منفی، مکسور، سب قیمتوں کے لئے ثابت ہوا۔

۱۹۹۔ مسئلہ ثنائی کا ثبوت جو دفعہ گزشتہ میں دیا گیا ہے وہ پورا تشفی بخش نہیں، اس میں غالباً طالب علم کو کئی مشکلات پیش آئینگی۔ اس جگہ ہم فقط ایک بات کا ذکر کئے دیتے ہیں جملہ ج (م) میں اگر م مثبت صحیح عدد ہو تو تعداد ارقام محدود ہوتی ہے ورنہ باقی سب حالتوں میں غیر محدود، اسلئے یہ تحقیق کرنا ضروری ہے کہ مساوات متماثلہ ج(م)×ج(ن) = ج (م + ن) کا پورا پورا مفہوم کیا ہے اور اس کے صحیح ہونے کیلئے کن کن شرائط اور قیود کا خاص طور پر خیال رکھنا چاہیئے۔
ہم ثابت کر چکے ہیں کہ اگر لا $<$ ۱ تو ج (م)، ج (ن)، ج (م + ن) تینوں سلسلے متدق ہیں اور ج (م + ن) حاصلضرب ج (م) × ج (ن) کا حسابی قائم مقام ہے لیکن جب لا $>$ ۱ تو مذکورہ بالا سب سلسلے منتشر ہو نگے اور انکے متعلق اس صورت میں ہم صرف یہی بیان کر سکتے ہیں کہ اگر سلسلہ ج (م) کو سلسلہ ج (ن) سے ضرب دیدیجائے تو حاصل ضرب کی پہلی (ر) ارقام جملہ ج (م + ن) کی پہلی (ر) ارقام کے متماثل ہونگی خواہ (ر) کی کوئی محدود قیمت ہو

مثال ۱۔ $(۱-لا)^{\frac{۳}{۴}}$ کو چار رقموں تک پھیلاؤ

$$(۱ - لا)^{\frac{۳}{۲}} = ۱ + \frac{۳}{۲}(-لا) + \frac{\frac{۳}{۲}\left(\frac{۳}{۲} - ۱\right)}{۱ \times ۲}(-لا)^{۲}$$

$$+ \frac{\frac{۳}{۲}\left(\frac{۳}{۲} - ۱\right)\left(\frac{۳}{۲} - ۲\right)}{۱ \times ۲ \times ۳}(-لا)^{۳} + \ldots\ldots$$

$$= ۱ - \frac{۳}{۲}لا + \frac{۳}{۸}لا^{۲} + \frac{۱}{۱۶}لا^{۳} + \ldots\ldots$$

مثال ۲- جملہ $(۲ + ۳لا)^{-۴}$ کو چار رقموں تک پھیلاؤ

$$(۲ + ۳لا)^{-۴} = ۲^{-۴}\left(۱ + \frac{۳لا}{۲}\right)^{-۴}$$

$$= \frac{۱}{۲^{۴}}\left\{۱ + (-۴)\left(\frac{۳لا}{۲}\right) + \frac{(-۴)(-۵)}{۱ \times ۲}\left(\frac{۳لا}{۲}\right)^{۲}\right.$$

$$\left. + \frac{(-۴)(-۵)(-۶)}{۱ \times ۲ \times ۳}\left(\frac{۳لا}{۲}\right)^{۳} + \ldots\ldots\right\}$$

$$= \frac{۱}{۱۶}\left(۱ - ۶لا + \frac{۳۵}{۲}لا^{۲} - \frac{۱۳۵}{۲}لا^{۳} + \ldots\ldots\right)$$

مثال ۳- جملہ $\sqrt{ا^{۲} - لا^{۲}}$ کو چار رقموں تک پھیلاؤ

$$\sqrt{ا^{۲} - لا^{۲}} = (ا^{۲} - لا^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$$

$$= ا\left(۱ - \frac{لا^{۲}}{ا^{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

$$= ا\left\{۱ + \frac{۱}{۲}\left(-\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}}\right) + \frac{\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲} - ۱\right)}{۱ \times ۲}\left(-\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}}\right)^{۲}\right.$$

$$\left. + \frac{\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲} - ۱\right)\left(\frac{۱}{۲} - ۲\right)}{۱ \times ۲ \times ۳}\left(-\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}}\right)^{۳} + \text{وغیرہ}\right\}$$

$$= ا\left\{۱ - \frac{۱}{۲} \times \frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} - \frac{۱}{۸} \times \frac{لا^{۴}}{ا^{۴}} - \frac{۱}{۱۶} \times \frac{لا^{۶}}{ا^{۶}} - \ldots\ldots\right\}$$

۲۰۰- رقم عامہ دریافت کرنے کے لئے اب ہمیں ضابطہ
$\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)........(ن-ر+۱)}{\lfloor ر}$ لا^{ر} استعمال کرنا
چاہیئے کیونکہ رمز $_{ن}ج_{ر}$ اُس صورت میں بالکل بے معنی ہے
جب ن منفی یا مکسور ہو۔
نیز رقم عامہ کا سر کبھی معدوم نہیں ہو سکتا جب تک کہ
شمار کنندہ کے اجزاء ضربی میں سے کوئی ایک صفر کے برابر نہ ہو
اسلئے سلسلہ ر دیں رقم پر ختم ہوگا اگر ن- ر+۱ = ۰
یعنی جب ر = ن + ۱، لیکن چونکہ ر ایک مثبت عدد ہے
اسلئے یہ مساوات ناممکن ہو گی سوائے اُس صورت کے جبکہ قوت نما
ن مثبت صحیح عدد ہو، پس معلوم ہوا کہ مسئلہ ثنائی کی صورت تفصیلی
میں (ن+۱) ارقام ہوں گی اگر ن مثبت صحیح عدد ہو لیکن
باقی سب صورتوں میں رقموں کی تعداد غیر متناہی ہوگی۔
مثال ۱- $(۱+لا)^{\frac{۱}{۲}}$ کی صورت تفصیلی میں رقم عامہ دریافت کرو

$$(ر+۱)\text{ویں رقم} = \frac{\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}-۱)(\frac{۱}{۲}-۲)........(\frac{۱}{۲}-ر+۱)}{\lfloor ر} لا^{ر}$$

$$= \frac{۱(-۱)(-۳)(-۵)........(-۲ر+۳)}{۲^{ر}\lfloor ر} لا^{ر}$$

شمار کنندہ میں اجزاء ضربی کی تعداد ر ہے اور ان میں سے ر-۱
منفی ہیں۔ اسلئے اگر -۱ کو ہر ایک جز ضربی سے لیکر علیحدہ اکٹھا
کیا جائے تو جملہ مندرجہ بالا اس طرح لکھا جا سکتا

ہے۔

$$(-1)^{\text{ر}-1}\frac{1\times3\times5\,......\,(2\text{ر}-3)}{2^{\text{ر}}\,\lfloor\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$$

مثال ۲۔ $(1-\text{ن لا})^{\frac{1}{\text{ن}}}$ کی صورت تفصیلی میں رقم عامہ دریافت کرو

(ر+۱) ویں رقم $=\frac{\frac{1}{\text{ن}}(\frac{1}{\text{ن}}-1)(\frac{1}{\text{ن}}-2)\,......\,(\frac{1}{\text{ن}}-\text{ر}+1)}{\lfloor\text{ر}}(-\text{ن لا})^{\text{ر}}$

$$=\frac{1(1-\text{ن})(1-2\text{ن})\,......\,(1-\overline{\text{ر}-1}\times\text{ن})}{\text{ن}^{\text{ر}}\,\lfloor\text{ر}}(-1)^{\text{ر}}\,\text{ن}^{\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$$

$$=(-1)^{\text{ر}}\frac{1(1-\text{ن})(1-2\text{ن})\,......\,(1-\overline{\text{ر}-1}\times\text{ن})}{\lfloor\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$$

$$=(-1)^{\text{ر}}(-1)^{\text{ر}-1}\frac{(\text{ن}-1)(2\text{ن}-1)\,......\,(\overline{\text{ر}-1}\times\text{ن}-1)}{\lfloor\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$$

$$=-\frac{(\text{ن}-1)(2\text{ن}-1)\,......\,(\overline{\text{ر}-1}\times\text{ن}-1)}{\lfloor\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$$

کیونکہ $(-1)^{\text{ر}}(-1)^{\text{ر}-1}=(-1)^{2\text{ر}-1}=-1$

مثال ۳۔ $(1-\text{لا})^{-3}$ کی صورت تفصیلی میں رقم عامہ دریافت کرو

(ر+۱) ویں رقم $=\frac{(-3)(-4)(-5)\,......\,(-3-\text{ر}+1)}{\lfloor\text{ر}}(-\text{لا})^{\text{ر}}$

$$=(-1)^{\text{ر}}\frac{3\times4\times5\,......\,(\text{ر}+2)}{\lfloor\text{ر}}(-1)^{\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$$

$$=(-1)^{2\text{ر}}\frac{3\times4\times5\,.....\,(\text{ر}+2)}{1\times2\times3\times.....\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$$

$= \frac{(ر+۱)(ر+۲)}{۱\times۲}$ لا^{ر} [شمار کنندہ اور نسب نما سے متماثل اجزاء ضربی کو دور کرنے سے]

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ لا^{ر} کا سر (۱+لا)$^{\frac{۵}{۳}}$ کی صورت تفصیلی میں

$\frac{۱۰}{۳^{ر}} \times \frac{۱\times۴\times۷\times\cdots\cdots(۳ر-۸)}{\underline{|ر}} \times (-۱)^{ر-۲}$ ہے

چونکہ (ر+۱) ویں رقم میں لا^{ر} واقع ہوتا ہے

اسلئے سر مطلوب $= \frac{\frac{۵}{۳}(\frac{۵}{۳}-۱)(\frac{۵}{۳}-۲)\cdots\cdots(\frac{۵}{۳}-ر+۱)}{\underline{|ر}}$

$= \frac{۵\times۲\times(-۱)\times(-۴)\times(-۷)\cdots\cdots(-۳ر+۸)}{۳^{ر}\underline{|ر}}$

$= (-۱)^{ر-۲} \times \frac{۵\times۲\times۱\times۴\times۷\times\cdots\cdots(۳ر-۸)}{۳^{ر}\underline{|ر}}$

(∵ شمار کنندہ کے ر اجزاء ضربی میں سے صرف ۲ مثبت ہیں اور باقی سب منفی)

$= \frac{۱۰}{۳^{ر}} \times \frac{۱\times۴\times۷\times\cdots\cdots(۳ر-۸)}{\underline{|ر}} \times (-۱)^{ر-۲}$

امثلہ نمبری ۲۴

ذیل کے جملوں کو چار رقموں تک پھیلاؤ

۱۔ $(۱+لا)^{\frac{۱}{۲}}$ ۔ ۲۔ $(۱+لا)^{\frac{۳}{۲}}$ ۔ ۳۔ $(۱-لا)^{\frac{۲}{۵}}$

۴۔ $(۱+لا^{۲})^{-۲}$ ۔ ۵۔ $(۱-۳لا)^{\frac{۱}{۳}}$ ۔ ۶۔ $(۱-۳لا)^{-\frac{۱}{۲}}$

۷- $(۱+۲لا)^{-\frac{۱}{۲}}$ ۸- $(۱+\frac{لا}{۴})^{-۳}$ ۹- $(۱+\frac{۲لا}{۳})^{\frac{۳}{۴}}$

۱۰- $(۱+\frac{۱}{۲}ا)^{-۴}$ ۱۱- $(۲+لا)^{-۳}$ ۱۲- $(۹+۲لا)^{\frac{۱}{۲}}$

۱۳- $(۸+۱۲ا)^{\frac{۲}{۳}}$ ۱۴- $(۹-۶لا)^{-\frac{۳}{۲}}$ ۱۵- $(۴ا-۸لا)^{-\frac{۱}{۲}}$

لکھو اور مختصر کرو

۱۶- $(۱+۲لا)^{-\frac{۱}{۲}}$ کی آٹھویں رقم

۱۷- $(۱-۲لا^{۳})^{\frac{۱۱}{۲}}$ کی گیارھویں رقم

۱۸- $(۱+۳ا^{۲})^{\frac{۱۶}{۳}}$ کی دسویں رقم

۱۹- $(۳ا-۲ب)^{۱۶}$ کی پانچویں رقم

۲۰- $(۱-لا)^{-۲}$ کی (ر+۱) ویں رقم

۲۱- $(۱-لا)^{-۴}$ کی (ر+۱) ویں رقم

۲۲- $(۱+لا)^{\frac{۱}{۲}}$ کی (ر+۱) ویں رقم

۲۳- $(۱+لا)^{\frac{۱۱}{۳}}$ کی (ر+۱) ویں رقم

۲۴- $(۲^{۱۰}-۲^{۶}لا)^{\frac{۱۳}{۲}}$ کی چودھویں رقم

۲۵- $(۳^{۸}+۶^{۲}لا)^{\frac{۱۱}{۴}}$ کی ساتویں رقم

۲۶- ثابت کرو کہ $لا^{ر}$ کا سر $(۱-۴لا)^{-\frac{۱}{۲}}$ کی صورت تفصیلی میں $\frac{\underline{|۲ر}}{(\underline{|ر})^{۲}}$ ہے

۲۷- $\frac{۱-لا}{(۱+لا)^{۲}}$ کی صورت تفصیلی میں $لا^{ر}$ کا سر دریافت کرو

۲۸- $\frac{۳-لا}{(۱-لا)^{۳}}$ کی .... $لا^{ر}$ ....

۲۹- $(۱+لا)^{\frac{۳}{۲}}$ کی صورت تفصیلی میں پہلی منفی رقم کونسی ہے؟

۳۰۔ $(\text{۱}-\text{۳لا})^{\frac{\text{۷}}{\text{۲}}}$ کی کتنی رقمیں مثبت ہیں؟

۳۱۔ $\frac{\text{۱}}{\text{۱}+\text{۵لا}}$ کو لا کی قوا ء صعودی اور نزولی کے موافق پھیلاؤ

۲۰۱۔ $(\text{۱}-\text{لا})^{-\text{۳}}$ کی صورت تفصیلی میں پہلے ن+۱ سروں کا مجموعہ دریافت کرو۔

$$(\text{۱}-\text{لا})^{-\text{۳}} = \text{۱}+\text{۳لا}+\frac{\text{۳}\times\text{۴}}{\text{۱}\times\text{۲}}\text{لا}^{\text{۲}}+\frac{\text{۴}\times\text{۵}}{\text{۱}\times\text{۲}}\text{لا}^{\text{۳}}+\dots\dots$$

$$+\frac{(\text{ن}+\text{۱})(\text{ن}+\text{۲})}{\text{۱}\times\text{۲}}\text{لا}^{\text{ن}}+\dots\dots$$

$$(\text{۱}-\text{لا})^{-\text{۱}} = \text{۱}+\text{لا}+\text{لا}^{\text{۲}}+\text{لا}^{\text{۳}}+\dots\dots+\text{لا}^{\text{ن}}+\dots\dots$$

اب بائیں طرف کے دونوں سلسلوں کو اکٹھا ضرب دینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر

$$\text{۱}+\text{۳}+\frac{\text{۳}\times\text{۴}}{\text{۱}\times\text{۲}}+\dots\dots+\frac{(\text{ن}+\text{۱})(\text{ن}+\text{۲})}{\text{۱}\times\text{۲}}$$ ہے

∴ مجموعہ مطلوبہ = $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر $(\text{۱}-\text{لا})^{-\text{۴}}$ کی صورت تفصیلی میں

$$=\frac{(\text{ن}+\text{۱})(\text{ن}+\text{۲})(\text{ن}+\text{۳})}{\text{۱}\times\text{۲}\times\text{۳}}$$

۲۰۲۔ ظاہر ہے کہ مسئلہ ثنائی کی مدد سے ہم $(\text{لا}+\text{ما})^{\text{ن}}$ کو ہمیشہ پھیلا سکتے ہیں کیونکہ یہ جملہ ذیل کی صورتوں میں سے کسی ایک میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\text{لا}^{\text{ن}}\left(\text{۱}+\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}} \text{ یا } \text{ما}^{\text{ن}}\left(\text{۱}+\frac{\text{لا}}{\text{ما}}\right)^{\text{ن}}$$

اور اگر لا > یا < ما تو ہم صورت اول یا دوم کو بالترتیب

استعمال کر سکتے ہیں ۔

۲۰۳ ۔ $(۱-لا)^{-ن}$ کے پھیلاؤ میں رقم عامہ کی نہایت سادی صورت دریافت کرو ۔

$$(ر+۱) \text{ ویں رقم} = \frac{(-ن)(-ن-۱)(-ن-۲)\ldots\ldots(-ن-ر+۱)}{\lfloor ر}(-لا)^{ر}$$

$$= (-۱)^{ر}\frac{ن(ن+۱)(ن+۲)\ldots\ldots(ن+ر-۱)}{\lfloor ر}(-۱)^{ر}لا^{ر}$$

$$= (-۱)^{۲ر}\frac{ن(ن+۱)(ن+۲)\ldots\ldots(ن+ر-۱)}{\lfloor ر}لا^{ر}$$

$$= \frac{ن(ن+۱)(ن+۲)\ldots\ldots(ن+ر-۱)}{\lfloor ر}لا^{ر}$$

اس سے ظاہر ہے کہ $(۱-لا)^{-ن}$ کی صورت تفصیلی میں ہر ایک رقم مثبت ہے ۔

اگرچہ کسی جملہ ثنائی کی رقم عامہ قاعدہ دفعہ ۲۰۰ کی مدد سے بھی معلوم ہوسکتی ہے مگر عام استعمال میں بہتر ہوگا کہ ہمیشہ اُن تمام حالتوں میں رقم عامہ کی شکل مندرجہ بالا استعمال کیجائے جب قوت نما منفی ہو اور شکل

$$\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\ldots\ldots(ن-ر+۱)}{\lfloor ر}لا^{ر}$$

استعمال کی جائے جب قوت نما مثبت ہو ۔

مثال ۔ $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۱-۳لا}}$ کی صورت تفصیلی میں رقم عامہ دریافت کرو

$$\frac{1}{\sqrt[3]{۱-۳لا}}=(۱-۳لا)^{-\frac{۱}{۳}}$$

$$(ر+۱) \text{ ویں رقم} = \frac{\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۳}+۱)(\frac{۱}{۳}+۲)\ldots\ldots(\frac{۱}{۳}+ر-۱)}{\lfloor ر}(۳لا)^{ر}$$

$$=\frac{۱\times۴\times۷\times\ldots\ldots(۳ر-۲)}{۳^{ر}\lfloor ر}۳^{ر}لا^{ر}$$

$$=\frac{۱\times۴\times۷\times\ldots\ldots(۳ر-۲)}{\lfloor ر}لا^{ر}$$

اگر جملہ مجوزہ $(۱+۳لا)^{-\frac{۱}{۳}}$ ہوتا تو بھی اس کی رقم عامہ دریافت کرنے میں یہی قاعدہ استعمال کرتے فقط ۳ لا کی جگہ – ۳ لا رکھنا پڑتا۔

اس بات کو یاد رکھنا چاہیئے کہ جملہ $(۱-لا)^{-ن}$ کی صورت تفصیلی میں سب ارقام مثبت ہوتی ہیں۔

نیز $(۱-لا)^{-۱}=۱+لا+لا^{۲}+لا^{۳}+\ldots\ldots+لا^{ر}+\ldots\ldots$

$(۱-لا)^{-۲}=۱+۲لا+۳لا^{۲}+۴لا^{۳}+\ldots\ldots+(ر+۱)لا^{ر}+\ldots\ldots$

$(۱-لا)^{-۳}=۱+۳لا+۶لا^{۲}+۱۰لا^{۳}+\ldots\ldots+\frac{(ر+۱)(ر+۲)}{۱\times۲}لا^{ر}+\ldots\ldots$

۲۰۴۔ جملہ $(۱+لا)^{ن}$ کی صورت تفصیلی میں بڑی سے بڑی رقم دریافت کرنے کی پوری تحقیقات اُس صورت میں جبکہ ن کی قیمت پر کوئی قید نہ ہو دفعہ ۲۰۸ میں کی جائے گی۔ تاہم کسی مثال حسابیہ کے حل کرنے میں طالب علم کو ترکیب دفعہ ۱۸۵ استعمال کرنے میں کوئی دقت نہ ہوگی۔

مثال۔ جملہ $(۱+لا)^{-ن}$ کی صورت تفصیلی میں بڑی سے بڑی رقم دریافت کرو جبکہ لا $=\frac{۲}{۳}$ اور ن $=۲۰$

اگر ق ر سے ر ویں رقم تعبیر کیجائے تو

$$ق_{ر+۱} = \frac{ن + ر - ۱}{ر} \times لا \times ق_ر \quad \text{تعداداً}$$

$$= \frac{۱۹ + ر}{ر} \times \frac{۲}{۳} \times ق_ر$$

$$\therefore \quad ق_{ر+۱} > ق_ر$$

جب تک کہ

$$\frac{۲(۱۹ + ر)}{۳ ر} > ۱$$

یعنی

$$۳۸ > ر$$

اسلئے ۳۷ تک ر کی تمام قیمتوں کے لئے $ق_{ر+۱} > ق_ر$

لیکن اگر ر = ۳۸ تو $ق_{ر+۱} = ق_ر$ اور یہی سب سے بڑی رقمیں ہیں

پس ۳۸ ویں اور ۳۹ ویں رقمیں بلحاظ عددی قیمت کے آپسمیں برابر ہیں اور باقی سب رقموں سے بڑی ہیں۔

تقربات

۲۰۵۔ اگر عہ کوئی چھوٹی کسر واجب ہو تو $عہ^۲$ ایک چھوٹی کسر عہ کی ہوگی پس اگر عہ نہایت ہی قلیل ہو تو تقریبی حسابات میں $عہ^۲$ بمقابلہ عہ کے یا $عہ^۳$ بمقابلہ $عہ^۲$ کے نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ اگر معمولی تقرب مطلوب ہو تو ہم ایک سے اعلیٰ عہ کی سب قوتوں کو خارج کر سکتے ہیں اگر اس سے اچھا تقرب منظور ہو تو ایسی رقموں کو رکھ سکتے ہیں جن میں $عہ^۲$ شامل ہو اور اس سے اعلیٰ قوتوں کو خارج کر سکتے ہیں اور اسی طرح

اپنے نتائج کے مطلوبہ درجۂ درستی کے مطابق ہر حالت میں عمل کر سکتے ہیں ۔

(۱ + عہ)^{۲} = ۱ + ۲ عہ + عہ^{۲}

∴ اگر (۱ + عہ)^{۲} کی تقریبی قیمت درکار ہو تو ہم اسے ۱ + ۲ عہ خیال کر سکتے ہیں ۔

(۱ + عہ)^{۳} = ۱ + ۳ عہ + ۳ عہ^{۲} + عہ^{۳}

اسلئے ۱ + ۳ عہ تقریبی قیمت (۱ + عہ)^{۳} کی خیال کی جاسکتی ہے
اس سے اچھا تقرب ۱ + ۳ عہ + ۳ عہ^{۲} ہے

اسی طرح سے (۱ + عہ)^{ن} = ۱ + ن عہ + $\frac{ن(ن-۱)}{۲×۱}$ عہ^{۲} + ...

= ۱ + ن عہ (تخمیناً) جہاں عہ ایک چھوٹی کسر واجب ہے

نیز جب عہ اور بہ دو چھوٹی کسریں ہوں تو

(۱ + عہ)^{م} (۱ + بہ)^{ن} = (۱ + م عہ) (۱ + ن بہ) (تقریباً)

= ۱ + م عہ + ن بہ (تقریباً)

اگر حاصل ضرب م ن عہ بہ کو نظر انداز کر دیا جائے جو عہ اور بہ کے مقابلہ میں قلیل ہے

مثال ۱۔ (۱ + ۳ لا)$^{\frac{۱}{۲}}$ (۱ − ۲ لا)$^{-\frac{۱}{۳}}$ کی صورت تفصیلی میں پہلی تین رقمیں دریافت کرو ۔

ان ثنائی جملوں کو ارقام (لا^{۲}) تک پھیلاؤ تو حاصل ہوگا

(۱ + $\frac{۳}{۲}$ لا − $\frac{۹}{۸}$ لا^{۲} ....) (۱ + $\frac{۲}{۳}$ لا + $\frac{۸}{۹}$ لا^{۲} + ...)

$$= ۱ + \text{لا}\left(\frac{۳}{۲} + \frac{۲}{۳}\right) + \text{لا}^{۲}\left(\frac{۸}{۹} + \frac{۳}{۲} \times \frac{۲}{۳} - \frac{۹}{۸}\right) + \dots\dots\dots$$

$$= ۱ + \frac{۱۳}{۶}\,\text{لا} + \frac{۵۵}{۷۲}\,\text{لا}^{۲}$$

اگر اس مثال میں لا = ۰۰۲ء یعنی $\text{لا}^{۲}$ = ۰۰۰۰۰۴ء تو ہم دیکھتے ہیں کہ تیسری رقم ایک ایسی کسر اعشاریہ ہے جس میں حصہ اعشاریہ پانچ صفروں سے شروع ہوتا ہے اسلئے اگر جملہ معلومہ کی عددی قیمت پانچ مرتبہ کے اعشاریہ تک مطلوب ہو تو $۱ + \frac{۱۳}{۶}\,\text{لا}$ میں لا کی جگہ ۰۰۲ء رکھنا اور جس رقم میں $\text{لا}^{۲}$ شامل ہے اس کا نظر انداز کرنا کافی ہوگا۔

مثال ۲۔ اگر لا اتنا چھوٹا ہو کہ اس کا مربع اور اعلیٰ قوتیں نظر انداز کی جاسکیں تو $\dfrac{\left(۱ + \frac{۲}{۳}\,\text{لا}\right)^{-۵} + \sqrt{۴ + ۲\,\text{لا}}}{\sqrt{(۴ + \text{لا})^{۳}}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

چونکہ بموجب شرائط سوال $\text{لا}^{۲}$ اور اس سے اعلیٰ قوتیں نظر انداز کی جاسکتی ہیں اسلئے ہر ایک جملہ ثنائی کی صورت تفصیلی میں صرف پہلی دو رقمیں لینا کافی ہوگا۔

$$\text{پس جملہ} = \frac{\left(۱ + \frac{۲}{۳}\,\text{لا}\right)^{-۵} + ۲\left(۱ + \frac{\text{لا}}{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}}{۸\left(۱ + \frac{\text{لا}}{۴}\right)^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$= \frac{\left(۱ - \frac{۱۰}{۳}\,\text{لا}\right) + ۲\left(۱ + \frac{۱}{۴}\,\text{لا}\right)}{۸\left(۱ + \frac{۳}{۸}\,\text{لا}\right)}$$

$$= \frac{۱}{۸}\left(۳ - \frac{۱۷}{۶}\,\text{لا}\right)\left(۱ + \frac{۳}{۸}\,\text{لا}\right)^{-۱}$$

اپنے نتائج کے مطلوبہ درجۂ درستی کے مطابق ہر حالت میں عمل کر سکتے ہیں ۔

$$(\text{۱}+\text{عہ})^{\text{۲}} = \text{۱} + \text{۲}\,\text{عہ} + \text{عہ}^{\text{۲}}$$

∴ اگر $(\text{۱}+\text{عہ})^{\text{۲}}$ کی تقریبی قیمت درکار ہو تو ہم اسے ۱ + ۲ عہ خیال کر سکتے ہیں ۔

$$(\text{۱}+\text{عہ})^{\text{۳}} = \text{۱} + \text{۳}\,\text{عہ} + \text{۳}\,\text{عہ}^{\text{۲}} + \text{عہ}^{\text{۳}}$$

اسلئے ۱ + ۳ عہ تقریبی قیمت $(\text{۱}+\text{عہ})^{\text{۳}}$ کی خیال کی جا سکتی ہے
اس سے اچھا تقرب $\text{۱} + \text{۳}\,\text{عہ} + \text{۳}\,\text{عہ}^{\text{۲}}$ ہے

اسی طرح سے $(\text{۱}+\text{عہ})^{\text{ن}} = \text{۱} + \text{ن}\,\text{عہ} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-\text{۱})}{\text{۲}\times\text{۱}}\,\text{عہ}^{\text{۲}} + \dots\dots$

$= \text{۱} + \text{ن}\,\text{عہ}$ (تخمیناً) جہاں عہ ایک چھوٹی کسر واجب ہے

نیز جب عہ اور بہ دو چھوٹی کسریں ہوں تو

$$(\text{۱}+\text{عہ})^{\text{م}}(\text{۱}+\text{بہ})^{\text{ن}} = (\text{۱}+\text{م}\,\text{عہ})(\text{۱}+\text{ن}\,\text{بہ}) \quad \text{(تقریباً)}$$

$$= \text{۱} + \text{م}\,\text{عہ} + \text{ن}\,\text{بہ} \quad \text{(تقریباً)}$$

اگر حاصل ضرب م ن عہ بہ کو نظر انداز کر دیا جائے جو عہ اور بہ کے مقابلہ میں قلیل ہے

مثال ۱۔ $(\text{۱}+\text{۳}\,\text{لا})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}(\text{۱}-\text{۲}\,\text{لا})^{-\frac{\text{۱}}{\text{۳}}}$ کی صورت تفصیلی میں پہلی تین رقمیں دریافت کرو ۔

ان ثنائی جملوں کو ارقام $(\text{لا}^{\text{۲}})$ تک پھیلاؤ تو حاصل ہوگا

$$\left(\text{۱} + \frac{\text{۳}}{\text{۲}}\,\text{لا} - \frac{\text{۹}}{\text{۸}}\,\text{لا}^{\text{۲}} - \dots\dots\right)\left(\text{۱} + \frac{\text{۲}}{\text{۳}}\,\text{لا} + \frac{\text{۸}}{\text{۹}}\,\text{لا}^{\text{۲}} + \dots\dots\right)$$

$$= 1 + \text{لا}\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right) + \text{لا}^2\left(\frac{8}{9}+\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}-\frac{9}{8}\right)+ \ldots\ldots\ldots$$

$$= 1 + \frac{13}{6}\,\text{لا} + \frac{55}{72}\,\text{لا}^2$$

اگر اس مثال میں لا = ۰۰۲ء یعنی لا^2 = ۰۰۰۰۰۴ء تو ہم دیکھتے ہیں کہ تیسری رقم ایک ایسی کسر اعشاریہ ہے جس میں حصہ اعشاریہ پانچ صفروں سے شروع ہوتا ہے اسلئے اگر جملہ معلومہ کی عددی قیمت پانچ مرتبہ کے اعشاریہ تک مطلوب ہو تو $1 + \frac{13}{6}\,\text{لا}$ میں لا کی جگہ ۰۰۲ء رکھنا اور جس رقم میں لا^2 شامل ہے اس کا نظر انداز کرنا کافی ہوگا۔

مثال ۲۔ اگر لا اتنا چھوٹا ہو کہ اس کا مربع اور اعلیٰ قوتیں نظر انداز کی جا سکیں تو $\dfrac{\left(1+\frac{2}{3}\,\text{لا}\right)^{-5} + \sqrt{4+2\,\text{لا}}}{\sqrt{(4+\text{لا})^3}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

چونکہ بموجب شرائط سوال لا^2 اور اس سے اعلیٰ قوتیں نظر انداز کی جا سکتی ہیں اسلئے ہر ایک جملہ ثنائی کی صورت تفصیلی میں صرف پہلی دو رقمیں لینا کافی ہوگا۔

$$\text{پس جملہ} = \frac{\left(1+\frac{2}{3}\,\text{لا}\right)^{-5} + 2\left(1+\frac{\text{لا}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{8\left(1+\frac{\text{لا}}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{10}{3}\,\text{لا}\right) + 2\left(1+\frac{1}{4}\,\text{لا}\right)}{8\left(1+\frac{3}{8}\,\text{لا}\right)}$$

$$= \frac{1}{8}\left(3-\frac{17}{6}\,\text{لا}\right)\left(1+\frac{3}{8}\,\text{لا}\right)^{-1}$$

$= \frac{۱}{۸}(۳ - \frac{۱۷}{۶} لا)(۱ - \frac{۳}{۸} لا)$

$= \frac{۱}{۸}(۳ - \frac{۹۵}{۲۴} لا)$ اگر اُس رقم کو نظر انداز کیا جائے جس میں $لا^۲$ شامل ہوتا ہے۔

مثال ۳۔ اگر لا بمقابلہ ایک کے چھوٹا ہو تو $\frac{(۲+۳لا)^{\frac{۱}{۲}}(۸+۵لا)^{\frac{۲}{۳}}}{(۱-لا)^{\frac{۱}{۲}}+(۴-۳لا)^{\frac{۱}{۲}}}$ کی تقریبی قیمت دریافت کرو

$جملہ = \frac{۲^{\frac{۱}{۲}}(۱+\frac{۳}{۲}لا)^{\frac{۱}{۲}} \times ۸^{\frac{۲}{۳}}(۱+\frac{۵}{۸}لا)^{\frac{۲}{۳}}}{۱-\frac{۱}{۲}لا + ۴^{\frac{۱}{۲}}(۱-\frac{۳}{۴}لا)^{\frac{۱}{۲}}}$

$= \frac{۴\sqrt{۲}(۱+\frac{۳}{۴}لا)(۱+\frac{۵}{۱۲}لا)}{۱-\frac{۱}{۲}لا+۲(۱-\frac{۳}{۸}لا)}$

$= \frac{۴\sqrt{۲}(۱+\frac{۷}{۶}لا)}{۳-لا} = \frac{۴\sqrt{۲}(۱+\frac{۷}{۶}لا)}{۳(۱-\frac{لا}{۳})}$

$= \frac{۴}{۳}\sqrt{۲}(۱+\frac{۷}{۶}لا)(۱-\frac{لا}{۳})^{-۱} = \frac{۴}{۳}\sqrt{۲}(۱+\frac{۷}{۶}لا)(۱+\frac{لا}{۳})$

$= \frac{۴}{۳}\sqrt{۲}(۱+\frac{۳}{۲}لا)$ تخمیناً

مثال ۴۔ ایک شاقول کا طول ل فٹ ہے اور اس کے اہتزاز سکنڈ ظاہر کرتے ہیں، اگر اس کے طول کو ایک فیصدی زیادہ کر دیا جائے تو معلوم کرو کہ ۲۴ گھنٹے میں شاقول کتنے اہتزاز کم ظاہر کریگا، اہتزاز کا وقت سکنڈوں میں $= \pi\sqrt{\frac{ل}{۳۲}}$
طول کے بڑھ جانے کے بعد اگر شاقول کے ایک اہتزاز کا

وقت سکنڈوں میں ت ہو تو

$$ت = \pi \sqrt{\frac{ل}{۳۲} \times \frac{۱۰۱}{۱۰۰}}$$

لیکن $۱ = \pi \sqrt{\frac{ل}{۳۲}}$ (کیونکہ اصلی شاقول کے ایک اہتزاز کا وقت ایک سکنڈ ہے)

اسلئے تقسیم سے $ت = \sqrt{۱ + \frac{۱}{۱۰۰}}$

اہتزازوں کی کل تعداد ۲۴ گھنٹے میں

= سکنڈوں کی تعداد ۲۴ گھنٹے میں ÷ ایک اہتزاز کا وقت

$$= \frac{۶۰ \times ۶۰ \times ۲۴}{\left(۱ + \frac{۱}{۱۰۰}\right)^{\frac{۱}{۲}}} = ۸۶۴۰۰ \left(۱ + \frac{۱}{۱۰۰}\right)^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$= ۸۶۴۰۰\left(۱ - \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۱۰۰}\right) \text{تخمیناً} = ۸۶۴۰۰\left(۱ - \frac{۱}{۲۰۰}\right) = ۸۶۴۰۰ - ۴۳۲$$

اصلی حالت میں شاقول کے اہتزاز ۸۶۴۰۰ تھے۔

اسلئے اہتزازات کی مطلوبہ تعداد جو ۲۴ گھنٹے میں شاقول نے کم ظاہر کی = ۴۳۲

مثال ۵۔ $\frac{۱}{\sqrt{۴۷}}$ کی قیمت چار مرتبہ کے اعشاریہ تک دریافت کرو

$$\frac{۱}{\sqrt{۴۷}} = (۴۷)^{-\frac{۱}{۲}} = (۷^۲ - ۲)^{-\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۷}\left(۱ - \frac{۲}{۷^۲}\right)^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$= \frac{۱}{۷}\left(۱ + \frac{۱}{۷^۲} + \frac{۳}{۲} \times \frac{۱}{۷^۴} + \frac{۵}{۲} \times \frac{۱}{۷^۶} + \ldots\ldots\right)$$

$$= \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۷^۳} + \frac{۳}{۲} \times \frac{۱}{۷^۵} + \frac{۵}{۲} \times \frac{۱}{۷^۷} + \ldots\ldots$$

مختلف رقموں کی قیمتیں معلوم کرنے کے لئے ہمیں یوں عمل کرنا چاہیئے

$7\overline{)1}$

$7\overline{)\,.142857}\ \ldots\ldots = \frac{1}{7}$

$7\overline{)\,.020408}$

$7\overline{)\,.002915}\ \ldots\ldots = \frac{1}{7^3}$

$7\overline{)\,.000416}$

$.000059\ \ldots\ldots = \frac{1}{7^5}$

اور ہم دیکھتے ہیں کہ رقم $\frac{5}{2} \times \frac{1}{7^7}$ ایسی کسر اعشاریہ ہے جو پانچ صفروں سے شروع ہوتی ہے۔

$\therefore \frac{1}{\sqrt{47}} = .142857 + .002915 + .000088$

$= .14586$ اور یہ نتیجہ کم از کم چار مرتبہ کے اعشاریہ تک صحیح ہے۔

مثال ٦۔ ١٢٦ کا جزر الکعب پانچ مرتبہ کے اعشاریہ تک نکالو

$(126)^{\frac{1}{3}} = (5^3+1)^{\frac{1}{3}}$

$= 5\left(1+\frac{1}{5^3}\right)^{\frac{1}{3}}$

$= 5\left(1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5^3} - \frac{1}{5^6} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{5^9} \times \frac{5}{81} - \ldots\ldots\right)$

$= 5 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5^2} - \frac{1}{9} \times \frac{1}{5^5} + \frac{1}{81} \times \frac{1}{5^7} - \ldots\ldots$

$= 5 + \frac{1}{3} \times \frac{2^2}{10^2} - \frac{1}{9} \times \frac{2^5}{10^5} + \frac{1}{81} \times \frac{2^7}{10^7} - \ldots\ldots$

$= 5 + \frac{.04}{3} - \frac{.00032}{9} + \frac{.0000128}{81} - \ldots\ldots$

$= 5 + .013333\ldots - .000035\ldots + \ldots\ldots$

$= ۵٫۰۱۳۲۹$ پانچ مرتبہ کے اعشاریہ تک۔

۲۰۶۔ تقریبی تقسیم ۵۷۵۸ کو ۹۹۷ پر تقسیم کرو

$$۵۷۵۸ \div ۹۹۷ = ۵۷۵۸ \div (۱۰۰۰ - ۳)$$

$$= ۵۷۵۸ \div ۱۰۰۰ (۱ - \frac{۳}{۱۰۰۰}) = ۵٫۷۵۸ (۱ - \frac{۳}{۱۰۰۰})^{-۱}$$

$$= ۵٫۷۵۸ \times (۱ + \frac{۳}{۱۰۰۰}) \text{ تقریباً } = ۵٫۷۵۸ + (۵٫۷۵۸ \text{ کا } \frac{۳}{۱۰۰۰})$$

$$= ۵٫۷۵۸ + ٫۰۱۷......$$

$= ۵٫۷۷۵$ تین مرتبہ کے اعشاریہ تک

۲۰۷۔ کسی عدد کے ر ویں جذر کا تقرب

اگر $\sqrt[ر]{ن} = ا + لا$ جہاں ا تقریبی قیمت ہے اور اس لئے لا ایک چھوٹی مقدار ہے تو اس سے اچھا تقرب ضابطۂ ذیل سے حاصل ہوگا یعنی

$$\sqrt[ر]{ن} = \frac{(ر+۱)ن + (ر-۱)ا^{ر}}{(ر-۱)ن + (ر+۱)ا^{ر}} \times ا \quad ....(۱)$$

تمثیلاً اگر جذر الکعب نکالنا مطلوب ہو تو

$$\sqrt[۳]{ن} = \frac{۴ن + ۲ا^{۳}}{۲ن + ۴ا^{۳}} \times ا = \frac{۲ن + ا^{۳}}{ن + ۲ا^{۳}} \times ا$$

$\sqrt[۳]{۲}$ کی قیمت دریافت کرو

اس جگہ $\frac{۵}{۴}$ جذر الکعب کی تقریبی قیمت ہے۔

$$\therefore \sqrt[۳]{۲} = \frac{\frac{۱۲۵}{۶۴} + ۲\times۲}{\frac{۲۵۰}{۶۴} + ۲} \times \frac{۵}{۴} = \frac{۱۹۰۵}{۱۵۱۲} = ۱٫۲۵۹۹۲....$$

اس تقرب سے $\sqrt[۳]{۲}$ کی قیمت پانچ مرتبہ کے اعشاریہ تک بالکل صحیح حاصل ہوتی ہے

اگر ف ۔ ق بمقابلہ ف یا ق کے نہایت چھوٹا ہو تو

$$\sqrt[ر]{\frac{ف}{ق}} = \frac{(ر+۱)ف + (ر-۱)ق}{(ر-۱)ف + (ر+۱)ق} \text{ تقریباً}$$

کیونکہ

$$\sqrt[ر]{\frac{ف}{ق}} = \frac{\left\{(ف+ق)+(ف-ق)\right\}^{\frac{۱}{ر}}}{\left\{(ف+ق)-(ف-ق)\right\}^{\frac{۱}{ر}}}$$

$$= \frac{\left\{۱+\frac{ف-ق}{ف+ق}\right\}^{\frac{۱}{ر}}}{\left\{۱-\frac{ف-ق}{ف+ق}\right\}^{\frac{۱}{ر}}}$$

$$= \frac{۱+\frac{(ف-ق)}{(ف+ق)}\times\frac{۱}{ر}}{۱-\frac{ف-ق}{ف+ق}\times\frac{۱}{ر}} \text{ تقریباً}$$

$$= \frac{(ر+۱)ف + (ر-۱)ق}{(ر-۱)ف + (ر+۱)ق}$$

اگر اس میں ف = ن اور ق = $ا^ر$ تو اس کی صورت جبریہ صورت (۱) کے متماثل ہو جائے گی۔

امثلہ نمبری ۲۵

ذیل کی تفصیلی صورتوں میں (ر+۱) ویں رقم دریافت کرو۔

۱- $(\text{ا}+\text{لا})^{\frac{1}{2}}$ ۲- $(\text{ا}-\text{لا})^{-5}$ ۳- $(\text{ا}+\text{۳لا})^{\frac{1}{3}}$

۴- $(\text{ا}+\text{لا})^{-\frac{2}{3}}$ ۵- $(\text{ا}+\text{لا}^2)^{-3}$ ۶- $(\text{ا}-\text{۲لا})^{-\frac{3}{2}}$

۷- $(\text{ا}+\text{ب لا})^{-1}$ ۸- $(\text{۲}-\text{لا})^{-2}$ ۹- $\sqrt[3]{(\text{ا}^3-\text{لا}^3)^2}$

۱۰- $\frac{1}{\sqrt{\text{ا}+\text{۲لا}}}$ ۱۱- $\frac{1}{\sqrt[3]{(\text{ا}-\text{۳لا})^2}}$ ۱۲- $\frac{1}{\sqrt[n]{\text{ا}^n-\text{ن لا}}}$

ذیل کے جملوں کی تفصیلی صورتوں میں بڑی سے بڑی رقم دریافت کرو۔

۱۳- $(\text{ا}+\text{لا})^{-7}$ جب $\text{لا} = \frac{4}{15}$

۱۴- $(\text{ا}+\text{لا})^{\frac{21}{2}}$ جب $\text{لا} = \frac{2}{3}$

۱۵- $(\text{ا}-\text{۷لا})^{-\frac{11}{4}}$ جب $\text{لا} = \frac{1}{8}$

۱۶- $(\text{۲لا}+\text{۵ما})^{12}$ جب لا = ۸ اور ما = ۳

۱۷- $(\text{۵}-\text{۴لا})^{-7}$ جب $\text{لا} = \frac{1}{2}$

۱۸- $(\text{۳لا}^2+\text{۴ما}^3)^{-\text{ن}}$ جب لا = ۹، ما = ۲، ن = ۱۵

پانچ مرتبہ کے اعشاریہ تک مفصلہ ذیل کی قیمتیں دریافت کرو

۱۹- $\sqrt{98}$ ۲۰- $\sqrt[3]{998}$ ۲۱- $\sqrt[3]{1003}$

۲۲- $\sqrt[4]{2400}$ ۲۳- $\frac{1}{\sqrt[3]{128}}$ ۲۴- $\left(1\frac{1}{250}\right)^{\frac{1}{3}}$

۲۵- $(630)^{-\frac{3}{4}}$ ۲۶- $\sqrt[5]{3128}$

اگر لا اتنا چھوٹا ہو کہ اس کا مربع اور اس سے بڑی قوتیں نظرانداز کردی جاسکیں تو جملات ذیل کی قیمتیں دریافت کرو۔

۲۷- $(\text{ا}-\text{۷لا})^{\frac{1}{3}}(\text{ا}+\text{۲لا})^{-\frac{3}{4}}$

۲۸- $\sqrt{\text{۴}-\text{لا}} \times \left(\text{۳}-\frac{\text{لا}}{2}\right)^{-1}$

۲۹- $\dfrac{(۸+۳\text{لا})^{\frac{۳}{۲}}}{(۲+۳\text{لا})\sqrt{۴-۵\text{لا}}}$

۳۰- $\dfrac{(۱+\frac{۲}{۳}\text{لا})^{-۵}\times(۴+۳\text{لا})^{\frac{۱}{۲}}}{(۴+\text{لا})^{\frac{۳}{۲}}}$

۳۱- $\dfrac{\sqrt[۴]{۱-\frac{۳}{۵}\text{لا}}+(۱+\frac{۵}{۶}\text{لا})^{-۶}}{\sqrt[۳]{۱+۲\text{لا}}+\sqrt[۵]{۱-\frac{\text{لا}}{۲}}}$

۳۲- $\dfrac{\sqrt[۳]{۸+۳\text{لا}}-\sqrt[۵]{۱-\text{لا}}}{(۱+۵\text{لا})^{\frac{۳}{۵}}+(۴+\frac{\text{لا}}{۲})^{\frac{۱}{۲}}}$

۳۳- ثابت کرو کہ $(۱-۴\text{لا})^{-\frac{۱}{۲}}$ کی صورت تفصیلی میں $\text{لا}^{\text{ر}}$ کا سر $\dfrac{|\underline{۲\text{ر}}}{(|\underline{\text{ر}})^{۲}}$ ہے

۳۴- ثابت کرو کہ $(۱+\text{لا})^{\text{ن}}$

$$=۲^{\text{ن}}\left\{۱-\text{ن}\frac{۱-\text{لا}}{۱+\text{لا}}+\frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)}{۱\times۲}\left(\frac{۱-\text{لا}}{۱+\text{لا}}\right)^{۲}+\cdots\cdots\right\}$$

۳۵- $\dfrac{۱}{(۱+\text{لا})^{۲}\sqrt{۱+۴\text{لا}}}$ کی صورت تفصیلی میں پہلی تین رقمیں دریافت کرو۔

۳۶- $\dfrac{(۱+\text{لا})^{\frac{۳}{۲}}+\sqrt{۱+۵\text{لا}}}{(۱-\text{لا})^{۲}}$ کی صورت تفصیلی میں پہلی تین رقمیں دریافت کرو۔

۳۷- ثابت کرو کہ $(۱-\text{لا})^{-\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی میں ن واں سر (ن-۱) ویں سر کا دوچند ہے۔

۲۰۸ - ن کی کسی ناطق قیمت کے لئے (۱+لا)^ن کی صورت تفصیلی میں تعداداً بڑی سے بڑی رقم دریافت کرو۔

چونکہ ہمیں سب سے بڑی رقم کی عددی قیمت سے تعلق ہے اس لئے ہم لا کو ہمیشہ مثبت خیال کریں گے۔

صورت اول۔ فرض کرو کہ ن ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

(ر+۱) ویں رقم ر ویں رقم کو $\frac{ن-ر+۱}{ر}$×لا سے یعنی $(\frac{ن+۱}{ر}-۱)$لا سے ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے اس سے ظاہر ہے کہ رقمیں یکے بعد دیگرے بڑھتی جاتی ہیں جب تک کہ

$$(\frac{ن+۱}{ر}-۱)\text{ لا} > ۱$$

یعنی

$$\frac{(ن+۱)\text{لا}}{ر} > ۱+\text{لا}$$

یا

$$\frac{(ن+۱)\text{ لا}}{۱+\text{لا}} > ر$$

اب اگر $\frac{(ن+۱)\text{لا}}{۱+\text{لا}}$ صحیح عدد ہو تو اس کو ف سے تعبیر کرو، تب اگر ر = ف تو جزِ ضربی ایک کے برابر ہے اور (ف+۱) ویں رقم ف ویں رقم کے، اور یہی رقمیں باقی سب سے بڑی ہیں۔

اگر $\frac{(ن+۱)\text{لا}}{۱+\text{لا}}$ صحیح عدد نہ ہو تو اس کے صحیح حصہ کو ق سے تعبیر کرو اس صورت میں ر کی سب سے بڑی قیمت ق ہے اور (ق+۱) ویں رقم سب سے بڑی ہے۔

صورت دوم۔ فرض کرو کہ ن کسر مثبت ہے۔

موافق سابق (ر+۱) ویں رقم ر ویں رقم کو $(\frac{ن+۱}{ر}-۱)$ لا سے

ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے۔
(۱) اب اگر لا ایک سے بڑا ہو تو ر کو کافی طور پر بڑھانے سے مندرجہ بالا جز ضربی (−لا) کے اتنا قریب لایا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں، اس طرح سے کسی خاص رقم کے بعد ہر ایک رقم بلحاظ عددی قیمت کے اپنی رقم ماقبل کی تقریباً لا گنی ہو سکتی ہے پس معلوم ہوا کہ رقمیں متواتر بڑھتی جاتی ہیں اور اس صورت میں کوئی رقم ایسی نہیں جو باقی سب رقموں سے بڑی ہو۔
(۲) اگر لا ایک سے کم ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ جز ضربی مثبت رہتا ہے اور گھٹتا ہے جبتک کہ ر کی قیمت ن + ۱ سے بڑی نہیں ہو جاتی اور اس مقام سے اس کی قیمت منفی ہو جاتی ہے مگر تعداداً ہمیشہ ایک سے کم رہتی ہے، اس سے معلوم ہوا کہ اس صورت میں بڑی سے بڑی رقم صورت تفصیلی میں موجود ہے۔
موافق سابق جز ضربی ایک سے بڑا ہوگا جب تک کہ $\frac{(ن+۱)لا}{۱+لا} > ر$
اگر $\frac{(ن+۱)لا}{۱+لا}$ صحیح عدد ہو تو اسے ف سے تعبیر کرو، تب موافق صورت اول (ف + ۱) ویں رقم ف ویں رقم کے برابر ہے اور یہی رقمیں باقی رقموں سے بڑی ہیں۔
اگر $\frac{(ن+۱)لا}{۱+لا}$ صحیح عدد نہ ہو تو فرض کرو کہ ق اس کا صحیح حصہ ہے، تب ظاہر ہے کہ (ق + ۱) ویں رقم سب سے بڑی ہے۔
صورت سوم۔ فرض کرو کہ ن منفی ہے۔
یعنی فرض کرو کہ ن = − م جہاں م مثبت مقدار ہے اس صورت میں جز ضربی کی عددی قیمت $\frac{م+ر-۱}{ر} \times$ لا یعنی $\left(\frac{م-۱}{ر}+۱\right)$ لا ہوگی

(۱) اگر لا ایک سے بڑا ہو تو موافق بالا (صورت دوم) ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ صورت تفصیلی میں کوئی ایسی رقم نہیں جو باقی سب سے بڑی ہو۔

(۲) اگر لا ایک سے کم ہو تو جز ضربی ایک سے بڑا ہوگا

جب تک کہ $\left(\frac{\text{م}-۱}{\text{ر}}+۱\right)\text{لا} > ۱$

یعنی $\frac{(\text{م}-۱)\text{لا}}{\text{ر}} > ۱-\text{لا}$

یا $\frac{(\text{م}-۱)\text{لا}}{۱-\text{لا}} > \text{ر}$

اگر $\frac{(\text{م}-۱)\text{لا}}{۱-\text{لا}}$ مثبت صحیح عدد ہو تو اسے ف سے تعبیر کرو، تب (ف + ۱) ویں رقم ف ویں رقم کے برابر ہو گی اور یہی رقمیں باقی سب سے بڑی ہیں۔

اگر $\frac{(\text{م}-۱)\text{لا}}{۱-\text{لا}}$ مثبت ہو مگر صحیح عدد نہ ہو تو فرض کرو کہ ق اس کا صحیح حصّہ ہے اس صورت میں (ق + ۱) ویں رقم سب سے بڑی ہو گی۔

اگر $\frac{(\text{م}-۱)\text{لا}}{۱-\text{لا}}$ منفی ہو تو م ایک سے کم ہو گا اور جز ضربی کو بصورت $\left(۱-\frac{۱+\text{م}}{\text{ر}}\right)\text{لا}$ لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ہمیشہ ایک سے کم رہے گا، اس لئے ہر ایک رقم اپنی رقم ما قبل سے کم ہو گی۔ پس معلوم ہوا کہ اس صورت میں پہلی رقم سب سے بڑی ہے۔

۲۰۵- ن حروف ا، ب، ج،..... اور ان کی مختلف قوتوں سے جو ر ابعاد کے متجانس حاصل ضرب بن سکیں اُن کی تعداد دریافت کرو۔

عمل تقسیم سے یا مسئلہ ثنائی سے۔

$$\frac{1}{1-\text{ا لا}} = 1 + \text{ا لا} + \text{ا}^2\text{لا}^2 + \text{ا}^3\text{لا}^3 + \dots\dots$$

$$\frac{1}{1-\text{ب لا}} = 1 + \text{ب لا} + \text{ب}^2\text{لا}^2 + \text{ب}^3\text{لا}^3 + \dots\dots$$

$$\frac{1}{1-\text{ج لا}} = 1 + \text{ج لا} + \text{ج}^2\text{لا}^2 + \text{ج}^3\text{لا}^3 + \dots\dots$$

....

ضرب دینے سے

$$\frac{1}{1-\text{ا لا}} \times \frac{1}{1-\text{ب لا}} \times \frac{1}{1-\text{ج لا}} \times \dots\dots$$

$$= (1+\text{ا لا}+\text{ا}^2\text{لا}^2+\dots)(1+\text{ب لا}+\text{ب}^2\text{لا}^2+\dots)(1+\text{ج لا}+\text{ج}^2\text{لا}^2+\dots)\dots$$

$$= 1+\text{لا}(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج}+\dots)+\text{لا}^2(\text{ا}^2+\text{اب}+\text{اج}+\text{ب}^2+\text{بج}+\text{ج}^2+\dots)+\dots$$

$$= 1+\text{ص}_1\text{لا}+\text{ص}_2\text{لا}^2+\text{ص}_3\text{لا}^3+\dots\dots$$ (فرض کرو)

جہاں ص_1، ص_2، ص_3،...... ایک، دو، تین،...... ابعاد کے متجانس حاصل ضربوں کے مجموعے ہیں جو حروف ا، ب، ج،...... اور ان کی قوتوں کو لینے سے بنتے ہیں۔

ان حاصل ضربوں کی تعداد معلوم کرنے کے لئے ا، ب، ج،..... میں سے ہر ایک حرف کو ایک کے برابر رکھو، اس طرح کرنے سے ص_1، ص_2، ص_3، ...... میں ہر ایک رقم ایک کے برابر ہو جاتی ہے اسلئے ص_1، ص_2، ص_3...... کی جو قیمتیں اسطرح

سے حاصل ہوتی ہیں وہ ایک، دو، تین، ..... ابعاد کی متجانس حاصل ضربوں کی تعداد کو ظاہر کرتی ہیں۔

نیز $\frac{۱}{۱-\text{ا لا}} \times \frac{۱}{۱-\text{ب لا}} \times \frac{۱}{۱-\text{ج لا}} \times \ldots\ldots$

بن جائیگا $\frac{۱}{(۱-\text{لا})^{\text{ن}}}$ یا $(۱-\text{لا})^{-\text{ن}}$

اسلئے $\text{ص}_{\text{ر}} = (۱-\text{لا})^{-\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی میں $\text{لا}^{\text{ر}}$ کا سر

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)(\text{ن}+۲)\ldots\ldots(\text{ن}+\text{ر}-۱)}{|\underline{\text{ر}}}$$

$$= \frac{|\underline{\text{ن}+\text{ر}-۱}}{|\underline{\text{ر}}\ |\underline{\text{ن}-۱}}$$

۲۱۰— کسی جملہ کثیر الارقام کی صورت تفصیلی میں تعداد ارقام دریافت کرو، جب قوت نما مثبت صحیح عدد ہو۔

$(\text{ا}_۱ + \text{ا}_۲ + \text{ا}_۳ + \ldots\ldots + \text{ا}_{\text{ر}})^{\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی میں ہر ایک رقم کے ابعاد ن ہیں اس لئے رقموں کی تعداد ن ابعاد کے ایسے متجانس حاصل ضربوں کی تعداد کے برابر ہے جو رمقادیر $\text{ا}_۱، \text{ا}_۲، \text{ا}_۳ \ldots\ldots \text{ا}_{\text{ر}}$ اور ان کی مختلف قوتوں کو اکٹھا لینے سے بنتے ہیں اسلئے دفعہ گزشتہ کی مدد سے تعداد مطلوبہ $\frac{|\underline{\text{ر}+\text{ن}-۱}}{|\underline{\text{ن}}\ |\underline{\text{ر}-۱}}$ ہے

۲۱۱— نتیجہ دفعہ ۲۰۹ سے ہم ن اشیا کے اجتماعوں کی تعداد کے متعلق ایک مسئلہ مستنبط کرسکتے ہیں۔

ن حروف ا ، ب ، ج ، د ، .... پر غور کرو

اگر ہم ر ابعاد کے ایسے متجانس حاصل ضرب مرتب کریں جو ان حروف اور ان کی مختلف قوا سے بن سکتے ہیں تو ہر ایک حاصلضرب ن حروف میں سے ر، ر حروف کا ایک ایسا اجتماع ہوگا جسمیں کوئی ایک حرف ایک، دو، تین، ...... ر دفعہ شامل ہوسکتا ہے اسلئے معلوم ہوا کہ ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے اجتماعوں کی تعداد جبکہ تکرار کی اجازت ہو ر ابعاد کے ایسے متجانس حاصلضربوں کی تعداد کے برابر ہے جو ن حروف اور ان کی مختلف قوا میں سے بن سکتے ہیں اور اس لئے

$$_{ن+ر-۱}ج_{ر} = \frac{\lfloor ن+ر-۱}{\lfloor ر \; \lfloor ن-۱}$$

یعنی ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے اجتماعوں کی تعداد جب اشیا کے تکرار کی اجازت ہو برابر ہے ن + ر - ۱ اشیا میں سے ر، ر اشیا کے اجتماعوں کی تعداد کے جب تکرار کی اجازت نہ ہو۔

۲۱۲۔ ہم اس باب کو چند متفرق مثالوں کے حل سے ختم کریں گے۔

مثال ۱۔ $\frac{(۱-۲لا)^{۲}}{(۱+لا)^{۲}}$ کی صورت تفصیلی میں $لا^{ر}$ کا سر دریافت کرو

$$\text{جملہ معلومہ} = (۱-۴لا+۴لا^{۲})(۱+ف_{۱}لا+ف_{۲}لا^{۲}+......+ف_{ر}لا^{ر}+.....)$$

[فرض کرو]

اب $لا^{ر}$ کا سر $ف_{ر}$، $ف_{ر-۱}$، $ف_{ر-۲}$ کو بالترتیب ۱، -۴، ۴ سے

ضرب دینے اور مختلف حاصل ضربوں کو جمع کرنے سے حاصل ہوگا۔ اس لئے

سر مطلوب $= \text{ف}_{\text{ر}} - ۴\,\text{ف}_{\text{ر}-۱} + ۴\,\text{ف}_{\text{ر}-۲}$

لیکن $\text{ف}_{\text{ر}} = (-۱)^{\text{ر}} \dfrac{(\text{ر}+۱)(\text{ر}+۲)}{۲}$ (دفعہ ۲۰۰ مثال ۳)

اس لئے سر مطلوب

$$= (-۱)^{\text{ر}} \frac{(\text{ر}+۱)(\text{ر}+۲)}{۲} - ۴(-۱)^{\text{ر}-۱} \frac{\text{ر}(\text{ر}+۱)}{۲} + ۴(-۱)^{\text{ر}-۲} \frac{(\text{ر}-۱)\text{ر}}{۲}$$

$$= \frac{(-۱)^{\text{ر}}}{۲} \left\{ (\text{ر}+۱)(\text{ر}+۲) + ۴\text{ر}(\text{ر}+۱) + ۴\text{ر}(\text{ر}-۱) \right\}$$

$$= \frac{(-۱)^{\text{ر}}}{۲} (۹\text{ر}^۲ + ۳\text{ر} + ۲)$$

مثال ۲۔ سلسلہ ذیل کی قیمت دریافت کرو۔

$$۲ + \frac{۵}{۳ \times ۲!} + \frac{۵ \times ۷}{۳^۲ \times ۳!} + \frac{۵ \times ۷ \times ۹}{۳^۳ \times ۴!} + \dots\dots$$

$$\text{جملہ} = ۲ + \frac{۱}{۳} \times \frac{۵ \times ۳}{۲!} + \frac{۱}{۳^۲} \times \frac{۷ \times ۵ \times ۳}{۳!} + \frac{۱}{۳^۳} \times \frac{۹ \times ۷ \times ۵ \times ۳}{۴!} + \dots$$

$$= ۲ + \frac{۲}{۳} \times \frac{\frac{۵}{۲} \times \frac{۳}{۲}}{۲!} + \frac{۲^۲}{۳^۲} \times \frac{\frac{۷}{۲} \times \frac{۵}{۲} \times \frac{۳}{۲}}{۳!} + \frac{۲^۳}{۳^۳} \times \frac{\frac{۹}{۲} \times \frac{۷}{۲} \times \frac{۵}{۲} \times \frac{۳}{۲}}{۴!} + \dots$$

$$= ۱ + \frac{۲}{۳} \times \frac{\frac{۳}{۲}}{۱} + \left(\frac{۲}{۳}\right)^۲ \frac{\frac{۵}{۲} \times \frac{۳}{۲}}{۲!} + \left(\frac{۲}{۳}\right)^۳ \frac{\frac{۷}{۲} \times \frac{۵}{۲} \times \frac{۳}{۲}}{۳!} + \dots\dots$$

$$= \left(۱ - \frac{۲}{۳}\right)^{-\frac{۳}{۲}} = \left(\frac{۱}{۳}\right)^{-\frac{۳}{۲}} = ۳^{\frac{۳}{۲}} = ۳\sqrt{۳}$$

مثال ۳۔ اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ $(۳ + \sqrt{۷})^{\text{ن}}$

کا صحیح حصہ ایک طاق عدد ہے۔

فرض کرو کہ $(۳ + \sqrt{۷})^{ن}$ کا صحیح حصہ ع سے اور مکسور حصہ ف سے تعبیر ہوتا ہے تب

$$ع + ف = ۳^{ن} + ج_{۱}\, ۳^{ن-۱} \sqrt{۷} + ج_{۲} \times ۳^{ن-۲} \times ۷ + ج_{۳} \times ۳^{ن-۳} (\sqrt{۷})^{۳} + \ldots \quad (۱)$$

اب $(۳ - \sqrt{۷})$ مثبت ہے اور ایک سے کم ہے اسلئے $(۳ - \sqrt{۷})^{ن}$ ایک کسر واجب ہے، اس کو فَ سے تعبیر کرو

$$\therefore فَ = ۳^{ن} - ج_{۱} \times ۳^{ن-۱} \times \sqrt{۷} + ج_{۲} \times ۳^{ن-۲} \times ۷ - ج_{۳} \times ۳^{ن-۳} (\sqrt{۷})^{۳} + \ldots \quad (۲)$$

(۱) اور (۲) کو جمع کرنے سے غیر ناطق ارقام خارج ہو جائیں گی اور حاصل ہوگا۔

$$ع + ف + فَ = ۲ (۳^{ن} + ج_{۲} \times ۳^{ن-۲} \times ۷ + \ldots\ldots)$$

= ایک جفت عدد

مگر چونکہ ف اور فَ کسور واجب ہیں اس لئے ضروری ہے کہ ان کا مجموعہ ایک کے برابر ہو پس معلوم ہوا کہ ع طاق عدد ہے

مثال ۴۔ $(۱ + لا + لا^{۲})^{-۳}$ کو لا کی چوتھی قوت تک پھیلاؤ

$$(۱ + لا + لا^{۲})^{-۳} = \left(\frac{۱ - لا^{۳}}{۱ - لا}\right)^{-۳} = (۱ - لا)^{۳} \times (۱ - لا^{۳})^{-۳}$$

$$= (۱ - ۳لا + ۳لا^{۲} - لا^{۳})(۱ + ۳لا^{۳} + ۶لا^{۶} + ۱۰لا^{۹} + \text{وغیرہ})$$

$$= (۱ - ۳لا + ۳لا^{۲} - لا^{۳}) + ۳لا^{۳} - ۹لا^{۴} +$$ ایسی رقمیں جن میں $لا^{۵}$ اور لا کی اعلیٰ قوتیں شامل ہیں

$$= ۱ - ۳لا + ۳لا^{۲} + ۲لا^{۳} - ۹لا^{۴} + \text{وغیرہ}$$

مثال ۵۔ اگر $(۱ - لا)^{-ن} = ا_{۰} + ا_{۱}لا + ا_{۲}لا^{۲} + \ldots\ldots + ا_{ر}لا^{ر} + \ldots\ldots$

تو $ا_۰ + ا_۱ + ا_۲ + \dots + ا_ر$ کی قیمت دریافت کرو

$(۱-لا)^{-ن} = ا_۰ + ا_۱ لا + ا_۲ لا^۲ + \dots + ا_ر لا^ر + \dots$ (۱)

نیز $(۱-لا)^{-۱} = ۱ + لا + لا^۲ + \dots + لا^ر + \dots$ (۲)

اب اگر مساوات (۱) اور (۲) کے بائیں طرف کے سلسلوں کو اکٹھی ضرب دیدی جائے تو حاصل ضرب میں $لا^ر$ کا سر ہوگا

$ا_۰ + ا_۱ + ا_۲ + ا_۳ + \dots + ا_ر$

پس معلوم ہوا کہ یہ جملہ

= $لا^ر$ کا سر حاصل ضرب $(۱-لا)^{-ن}(۱-لا)^{-۱}$ میں

= $لا^ر$ کا سر $(۱-لا)^{-(ن+۱)}$ میں

$= \frac{(ن+۱)(ن+۲)\dots(ن+ر)}{\lfloor ر}$

امثلہ نمبری ۲۶

سر دریافت کرو

۱- $\frac{۳-۵لا}{(۱-لا)^۲}$ کی صورت تفصیلی میں $لا^{۱۰}$ کا

۲- $\frac{۴+۳ا-ا^۲}{(۱+ا)^۳}$ کی صورت تفصیلی میں $ا^{۱۲}$ کا

۳- $\frac{۳لا^۲-۲}{لا+لا^۲}$ کی صورت تفصیلی میں $لا^ن$ کا

۴- $\frac{۲+لا+لا^۲}{(۱+لا)^۳}$ کی صورت تفصیلی میں $لا^ن$ کا

۵- ثابت کرو کہ

$$1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\times\frac{3\times1}{4\times2}-\frac{1}{2^3}\times\frac{5\times3\times1}{6\times4\times2}+\frac{1}{2^4}\times\frac{7\times5\times3\times1}{8\times6\times4\times2}-\dots=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

۶۔ ثابت کرو کہ

$$\sqrt{8}=1+\frac{3}{4}+\frac{5\times3}{8\times4}+\frac{7\times5\times3}{12\times8\times4}+\dots\dots$$

۷۔ ثابت کرو کہ

$$1+\frac{2\text{ن}}{3}+\frac{2\text{ن}(2\text{ن}+2)}{3\times6}+\frac{2\text{ن}(2\text{ن}+2)(2\text{ن}+4)}{3\times6\times9}+\dots\dots$$

$$=2^{\text{ن}}\left\{1+\frac{\text{ن}}{3}+\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{3\times6}+\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)}{3\times6\times9}+\dots\dots\right\}$$

۸۔ ثابت کرو کہ

$$7^{\text{ن}}\left\{1+\frac{\text{ن}}{7}+\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{7\times14}+\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{7\times14\times21}+\dots\dots\right\}$$

$$=4^{\text{ن}}\left\{1+\frac{\text{ن}}{2}+\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2\times4}+\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)}{2\times4\times6}+\dots\dots\right\}$$

۹۔ ثابت کرو کہ جب لا نہایت چھوٹا ہو تو

$$\frac{3\left(1+\frac{4}{9}\text{لا}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{3}{4}\text{لا}^2\right)^{\frac{1}{3}}}{2\left(1+\frac{9}{16}\text{لا}\right)^2}=1-\frac{307}{256}\text{لا}^2 \quad \text{(تقریباً)}$$

۱۰۔ ثابت کروکہ اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو $(5+2\sqrt{6})^{\text{ن}}$ کا صحیح حصہ طاق ہوگا

۱۱۔ ثابت کروکہ اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو $(8+3\sqrt{7})^{\text{ن}}$ کا صحیح حصہ طاق ہوگا۔

۱۲۔ $(1-2\text{لا}+3\text{لا}^2-4\text{لا}^3+\dots\dots)^{-\text{ن}}$ کی صورت

تفصیلی میں $لا^{ن}$ کا سر دریافت کرو۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ $\left(لا + \frac{۱}{لا}\right)^{۲ن}$ کی درمیانی رقم $(۱ - ۴لا)^{-(ن+\frac{۱}{۲})}$ کی صورت تفصیلی میں $لا^{ن}$ کے سر کے برابر ہے۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ $(۱ - لا^{۳})^{ن}$ کی صورت تفصیلی صورت ذیل میں بھی لکھی جا سکتی ہے،

$$(۱-لا)^{۳ن} + ۳ن\,لا(۱-لا)^{۳ن-۲} + \frac{۳ن(۳ن-۳)}{۱\times۲}لا^{۲}(۱-لا)^{۳ن-۴} + \ldots\ldots$$

۱۵۔ ثابت کرو کہ $\frac{۱}{۱+لا+لا^{۲}}$ کی صورت تفصیلی میں $لا^{ن}$ کا سر ۱، ۰، −۱ ہوگا اگر ن کی شکل بالترتیب ۳م، ۳م −۱، یا ۳م +۱ ہو

۱۶۔ $(ا + ب + ج)^{ن}$ کی صورت تفصیلی میں دریافت کرو
(۱) تعداد ارقام (۲) رقموں کے سروں کا مجموعہ

۱۷۔ اگر ن جفت عدد ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{\underline{|۱}\,\underline{|ن-۱}} + \frac{۱}{\underline{|۳}\,\underline{|ن-۳}} + \frac{۱}{\underline{|۵}\,\underline{|ن-۵}} + \ldots\ldots + \frac{۱}{\underline{|ن-۱}\,\underline{|۱}} = \frac{۲^{ن-۱}}{\underline{|ن}}$$

۱۸۔ اگر $(۱+لا)^{ن}$ کی صورت تفصیلی میں رقموں کے سر $ج_{۰}$، $ج_{۱}$، $ج_{۲}$، ...... $ج_{ن}$ ہوں جبکہ ن مثبت صحیح ہے تو ثابت کرو کہ

$$(۱)\quad ج_{۰} - ج_{۱} + ج_{۲} - ج_{۳} + \ldots\ldots + (-۱)^{ر}ج_{ر}$$

$$= (-۱)^{ر}\frac{\underline{|ن-۱}}{\underline{|ر}\,\underline{|ن-ر-۱}}$$

(۲) $ج_{۰} - ۲ج_{۱} + ۳ج_{۲} - ۴ج_{۳} + ... + (-۱)^{ن}(ن+۱)ج_{ن} = ۰$

(۳) $ج_{۰}^{۲} - ج_{۱}^{۲} + ج_{۲}^{۲} - ج_{۳}^{۲} + ... + (-۱)^{ن} ج_{ن}^{۲} = ۰$ اگر ن طاق ہو اور $= (-۱)^{\frac{ن}{۲}} ج_{\frac{ن}{۲}}$ اگر ن جفت ہو۔

۱۹- اگر $ص_{ن}$ پہلے ن قدرتی اعداد کے حاصل جمع کو تعبیر کرے تو ثابت کرو کہ

(۱) $(۱-لا)^{-۳} = ص_{۱} + ص_{۲}لا + ص_{۳}لا^{۲} + ... + ص_{ن}لا^{ن-۱} + ...$

(۲) $۲(ص_{۱}ص_{ن} + ص_{۲}ص_{ن-۱} + ... + ص_{ن}ص_{۱}) = \frac{|۲ن+۴}{|۵\ |۲ن-۱}$

۲۰- اگر $ق_{ن} = \frac{۱\times۳\times۵\times۷ .... (۲ن-۱)}{۲\times۴\times۶\times۸ .... ۲ن}$ تو ثابت کرو کہ

(۱) $ق_{۲ن+۱} + ق_{۱}ق_{۲ن} + ق_{۲}ق_{۲ن-۱} + ... + ق_{ن-۱}ق_{ن+۲} + ق_{ن}ق_{ن+۱} = \frac{۱}{۲}$

(۲) $۲\{ق_{۲ن} - ق_{۱}ق_{۲ن-۱} + ق_{۲}ق_{۲ن-۲} + ... + (-۱)^{ن-۱}ق_{ن-۱}ق_{ن+۱}\}$

$= ق_{ن} + (-۱)^{ن-۱}ق_{ن}^{۲}$

۲۱- $(۱+لا)^{ن}$ کی صورت تفصیلی میں جو سر ہوں اُن میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کا مجموعہ دریافت کرو جبکہ ن مثبت صحیح عدد ہو

۲۲- اگر $(۷ + ۴\sqrt{۳})^{ن} = ف + بہ$ جہاں ن اور ف مثبت صحیح عدد ہیں اور بہ کسر واجب ہے تو ثابت کرو کہ $(۱ - بہ)(ف + بہ) = ۱$

۲۳- اگر $(۱+لا)^{ن}$ کی صورت تفصیلی میں رقموں کے سر $ج_{۰}، ج_{۱}، ج_{۲}، .... ج_{ن}$ ہوں جہاں ن مثبت صحیح عدد ہے تو ثابت کرو کہ

$ج_{۱} - \frac{ج_{۲}}{۲} + \frac{ج_{۳}}{۳} - .... + \frac{(-۱)^{ن-۱}ج_{ن}}{ن} = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + ... + \frac{۱}{ن}$

باب چہاردہم

مسئلہ کثیر الارقام

۲۱۳ - اس سے پہلے ہم نے دفعہ ۱۸۸ میں دیکھا ہے کہ مسئلہ ثنائی کی مدد سے جملہ کثیر الارقام کی صورت تفصیلی حاصل ہوسکتی ہے، اس باب میں ہمارا مقصد جملہ کثیر الارقام کی مکمل صورت تفصیلی حاصل کرنے کا اتنا نہیں ہے جتنا کہ کسی رقم معینہ کے سر دریافت کرنے کا۔

مثال - جملہ $(ا + ب + ج + د)^{۱۴}$ کی صورت تفصیلی میں $ا^{۴} ب^{۲} ج^{۳} ڈ$ کا سر دریافت کرو

مطلوبہ صورت تفصیلی ۱۴ اجزاء ضربی کا حاصل ضرب ہے جن میں سے ہر ایک جز ضربی $(ا + ب + ج + د)$ ہے، نیز صورت تفصیلی میں ہر ایک رقم کی قوتوں کا مجموعہ ۱۴ ہے کیونکہ یہ ۱۴ اجزاء ضربی میں سے ہر ایک جز ضربی سے ایک ایک حرف لینے سے بنتی ہے پس رقم $ا^{۴} ب^{۲} ج^{۳} ڈ$ کو مرتب کرنے کے لئے ہمیں ا کو چودہ اجزاء ضربی میں سے کسی چار اجزاء ضربی سے، ب کو باقی ماندہ دس اجزاء ضربی میں سے کسی دو اجزاء ضربی سے، اور ج کو

باقی ماندہ آٹھ اجزاء ضربی میں سے کسی تین اجزاء ضربی سے لینا چاہیئے لیکن ایسا کرنے کے کل طریقوں کی تعداد صریحاً ۱۴ ایسے حروف کو باہم ترتیب دینے کی تعداد کے برابر ہے جن میں سے چار تو ا ہیں، دو ب، تین ج اور پانچ د یعنی

$$= \frac{\lfloor ۱۴}{\lfloor ۴ \lfloor ۲ \lfloor ۳ \lfloor ۵}$$ (دفعہ ۱۶۵)

اس لئے معلوم ہوا کہ کل اتنی دفعہ رقم $ا^{۴} ب^{۲} ج^{۳} د^{۵}$ آخری حاصل ضرب میں شامل ہوتی ہے اس لئے سر مطلوب = ۲۵۲۲۵۲۰

۴۱۴- $(ا + ب + ج + د + ...)^{ع}$ کی صورت تفصیلی میں کسی رقم معینہ کا سر دریافت کرو۔ اس میں ع مثبت صحیح عدد ہے مطلوبہ صورت تفصیلی ایسے ع اجزاء ضربی کا حاصل ضرب ہے جن میں سے ہر ایک جز ضربی ا + ب + ج + د + ... کے برابر ہے اب چونکہ صورت تفصیلی میں ہر ایک رقم ان ع اجزاء ضربی میں سے ہر ایک جز ضربی سے ایک ایک حرف لینے سے بنتی ہے اسلئے آخری حاصل ضرب میں کسی رقم $ا^{عہ} ب^{بہ} ج^{جہ} د^{لہ}$...... کے شامل ہونے کے کل طریقوں کی تعداد ایسے ع حروف کو مختلف اسلوبوں سے ترتیب دینے کی تعداد کے برابر ہے جن میں ضروری ہے کہ ا کی تعداد عہ ہو، ب کی تعداد بہ اور ج کی تعداد جہ اور علیٰ ہذا القیاس - یعنی

$$\frac{\lfloor ع}{\lfloor عہ \lfloor بہ \lfloor جہ \lfloor لہ}$$ $ا^{عہ} ب^{بہ} ج^{جہ} د^{لہ}$ ...... کا سر ہے

جہاں عہ + بہ + جہ + لہ + ... = ع

نتیجہ صریح ۔ (ا + ب لا + ج لا^۲ + د لا^۳ + ...)^ع

کی صورت تفصیلی میں وہ رقم جس میں ا^عہ ب^بہ ج^جہ د^لہ ....
شامل ہوتا ہے یہ ہے

ا^عہ (ب لا)^بہ (ج لا^۲)^جہ (د لا^۳)^لہ .... × [|ع] / [|عہ |بہ |جہ |لہ ......]

یا [|ع] / [|عہ |بہ |جہ |لہ ...] ا^عہ ب^بہ ج^جہ د^لہ ...... لا^(بہ + ۲ جہ + ۳ لہ + ...)

جہاں عہ + بہ + جہ + لہ + ... = ع

اسکو ہم صورت تفصیلی کی رقم عامہ کہیں گے ۔

مثال۔ (ا + ب لا + ج لا^۲)^۹ کی صورت تفصیلی میں لا^۵ کا سر دریافت کرو۔

صورت تفصیلی کی رقم عامہ ہے [|۹] / [|عہ |بہ |جہ] ا^عہ ب^بہ ج^جہ لا^(بہ + ۲ جہ) .... (۱)

جہاں عہ + بہ + جہ = ۹

ہمیں قاعدہ آزمایش سے بہ اور جہ کی تمام مثبت صحیح قیمتیں معلوم کرنی ہیں جو شرائط مساوات بہ + ۲ جہ = ۵ کو پورا کریں
اس کے بعد عہ کی قیمتیں مساوات عہ + بہ + جہ = ۹ سے معلوم ہوسکتی ہیں ۔

فرض کرو کہ جہ = ۲ تو بہ = ۱ اور عہ = ۶

" جہ = ۱ تو بہ = ۳ اور عہ = ۵

فرض کرو کہ جہ = ۰ تو بہ = ۵ اور عہ = ۴

سر مطلوب جملہ (۱) کی مطابق قیمتوں کا مجموعہ ہوگا

اسلئے سر مطلوب = (|۹ ÷ |۲ |۶) اَ^۶ ب ج^۲ + (|۹ ÷ |۳ |۵) اَ^۵ ب^۳ ج + (|۹ ÷ |۴ |۵) اَ^۴ ب^۵

= ۲۵۲ اَ^۶ ب ج^۲ + ۵۰۴ اَ^۵ ب^۳ ج + ۱۲۶ اَ^۴ ب^۵

۲۱۵۔ (ا + ب لا + ج لا^۲ + د لا^۳ + ...)^ن کی صورت تفصیلی میں رقم عامہ دریافت کرو جہاں ن کوئی مقدار ناطق ہے

مسئلہ ثنائی کی مدد سے رقم عامہ ہے

[ن (ن - ۱)(ن - ۲) ...... (ن - ع + ۱) ÷ |ع] ا^(ن-ع) (ب لا + ج لا^۲ + د لا^۳ + ...)^ع

جہاں ع مثبت صحیح عدد ہے

نیز بموجب دفعہ گزشتہ (ب لا + ج لا^۲ + د لا^۳ + ...)^ع کی صورت تفصیلی میں رقم عامہ ہے۔

(|ع ÷ |بہ |جہ |لہ .....) ب^بہ ج^جہ د^لہ .... لا^(بہ + ۲جہ + ۳لہ + ...)

جہاں بہ، جہ، لہ ..... ایسے مثبت صحیح عدد ہیں جن کا مجموعہ ع ہے۔

پس جملہ مجوزہ کی صورت تفصیلی میں رقم عامہ ہوئی

[ن (ن - ۱)(ن - ۲) ...... (ن - ع + ۱) ÷ |بہ |جہ |لہ ......] ا^(ن-ع) ب^بہ ج^جہ د^لہ .... لا^(بہ + ۲جہ + ۳لہ + ...)

جہاں بہ + جہ + لہ + ... = ع

۲۱۶- چونکہ (ا + ب لا + ج لاؔ + د لاؔ + ...)ن صورت ذیل میں بھی لکھا جا سکتا ہے یعنی

$$ا^ن \left(ا + \frac{ب}{ا} لا + \frac{ج}{ا} لا^۲ + \frac{د}{ا} لا^۳ + \ldots\ldots\right)^ن$$

اسلئے صرف اُسی صورت پر غور کرنا کافی ہوگا جس میں جملہ کثیر الارقام کی پہلی رقم ایک ہو۔

پس (ا + ب لا + ج لاؔ + د لاؔ + ...)ن کی رقم عامہ ہے

$$\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\ldots\ldots(ن-ع+۱)}{\lfloor به \lfloor جه \lfloor له \ldots\ldots} ب^{به} ج^{جه} د^{له} \ldots\ldots لا^{به+۲جه+۳له+\ldots}$$

جہاں به + جه + له + ... = ع

مثال- (ا-۳لا-۲لاؔ+۶لاؔ)⅔ کیصورت تفصیلی میں لاؔ کا سر دریافت کرو

اس جملے کی رقم عامہ ہے

$$\frac{\frac{۲}{۳}(\frac{۲}{۳}-۱)(\frac{۲}{۳}-۲)\ldots\ldots(\frac{۲}{۳}-ع+۱)}{\lfloor به \lfloor جه \lfloor له}(-۳)^{به}(-۲)^{جه}(۶)^{له} لا^{به+۲جه+۳له} \ldots\ldots (۱)$$

ہمیں قاعدہ آزمایش سے به، جه، له کی تمام مثبت صحیح قیمتیں دریافت کرنی ہیں جو شرائط مساوات به+۲جه+۳له = ۳ کو پورا کریں اس کے بعد ع مساوات ع = به + جه + له سے معلوم ہو سکتا ہے، سر مطلوب جملہ (۱) کی مطابق قیمتوں کا مجموعہ ہوگا۔

به، جه، له، .... کی قیمتیں دریافت کرنے کے لئے بہتر ہوگا کہ له کی بڑی سے بڑی جائز قیمت سے شروع ہو کر اس کو تمام

صحیح قیمتیں علی التواتر دی جائیں، صورت زیر بحث میں قیمتیں مفصلہ ذیل ہیں۔

$$\text{لہ} = ۱،\ \text{جہ} = ۰،\ \text{ب} = ۰،\ \text{ع} = ۱$$

$$\text{لہ} = ۰،\ \text{جہ} = ۱،\ \text{ب} = ۱،\ \text{ع} = ۲$$

$$\text{لہ} = ۰،\ \text{جہ} = ۰،\ \text{ب} = ۳،\ \text{ع} = ۳$$

ان قیمتوں کو (۱) میں رکھنے سے سر مطلوب

$$= \left(\frac{۲}{۳}\right)(۶) + \left(\frac{۲}{۳}\right)\left(-\frac{۱}{۳}\right)(-۳)(-۲) + \frac{\frac{۲}{۳}\left(-\frac{۱}{۳}\right)\left(-\frac{۴}{۳}\right)}{\lfloor ۳}(-۳)^{۳}$$

$$= ۴ - \frac{۴}{۳} - \frac{۴}{۳} = \frac{۴}{۳}$$

۲۱۷۔ بعض اوقات مسئلہ ثنائی کی مدد سے جملہ کثیر الارقام کا پھیلاؤ زیادہ آسانی اور سرعت سے حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال۔ $(۱ - ۲\text{لا} + ۳\text{لا}^{۲})^{-۳}$ کی صورت تفصیلی میں $\text{لا}^{۴}$ کا سر دریافت کرو

اگر $(۱ - \overline{۲\text{لا} + ۳\text{لا}^{۲}})^{-۳}$ کو مسئلہ ثنائی کی مدد سے پھیلایا جائے تو سر مطلوب پھیلاؤ کی پہلی چند رقموں سے $\text{لا}^{۴}$ کا سر منتخب کرنے سے حاصل ہوگا، پہلی چند رقمیں یہ ہیں۔

$$۱ + ۳(۲\text{لا} - ۳\text{لا}^{۲}) + ۶(۲\text{لا} - ۳\text{لا}^{۲})^{۲} + ۱۰(۲\text{لا} - ۳\text{لا}^{۲})^{۳} + ۱۵(۲\text{لا} - ۳\text{لا}^{۲})^{۴}$$

اس جملہ کو صرف پانچویں رقم تک پھیلانا کافی ہے کیونکہ اس کے بعد کی رقموں میں $\text{لا}^{۴}$ سے اعلیٰ قوتیں شامل ہیں۔

$$\text{سر مطلوب} = ۶ \times ۹ + ۱۰ \times ۳(۲)^{۲}(-۳) + ۱۵(۲)^{۴}$$

$$= -۶۶$$

۱۸- $(۸ - ۹لا^{۳} + ۱۸لا^{۶})^{\frac{۲}{۳}}$ کو $لا^{۸}$ تک پھیلاؤ

۱۹- اگر $(۱+لا+لا^{۲}+.....+لا^{ع})^{ن} = ا_{۰}+ا_{۱}لا+ا_{۲}لا^{۲}+ا_{۳}لا^{۳}+.....+ا_{نع}لا^{نع}$ تو ثابت کرو کہ

(۱) $ا_{۰}+ا_{۱}+ا_{۲}+.........+ا_{نع} = (ع+۱)^{ن}$

(۲) $ا_{۱}+۲ا_{۲}+۳ا_{۳}+.........+نع×ا_{نع} = \frac{۱}{۲}نع(ع+۱)^{ن}$

۲۰- اگر $(۱+لا+لا^{۲})^{ن}$ کی صورت تفصیلی میں ارقام کے سر بالترتیب $ا_{۰}، ا_{۱}، ا_{۲}، ا_{۳}$........ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ا_{۰}^{۲}-ا_{۱}^{۲}+ا_{۲}^{۲}-ا_{۳}^{۲}+.........+(-۱)^{ن-۱}ا_{ن-۱}^{۲}$$

$$= \frac{۱}{۲}ا_{ن}\{۱-(-۱)^{ن}ا_{ن}\}$$

۲۱- اگر $(۱+لا+لا^{۲})^{ن}$ کی صورت تفصیلی ہو

$$ا_{۰}+ا_{۱}لا+ا_{۲}لا^{۲}+.........+ا_{ر}لا^{ر}+......+ا_{۲ن}لا^{۲ن}$$

تو ثابت کرو کہ

$$ا_{۰}+ا_{۳}+ا_{۶}+........ = ا_{۱}+ا_{۴}+ا_{۷}+....... = ا_{۲}+ا_{۵}+ا_{۸}+.... = ۳^{ن-۱}$$

باب پانزدہم

لوکارتم

۲۱۸- تعریف کسی عدد کا لوکارتم اساسِ معلوم پر، وہ قوت نما ہے جس کے موافق ضرور ہے کہ اساس کا صعود لیں تاکہ حاصل عددِ معلوم کے برابر ہو جائے پس اگر $ا^{لا} = ن$ تو لا کو لوکارتم ن کا اساس ا پر کہتے ہیں۔

مثال- (۱) چونکہ $۳^{۴} = ۸۱$ اسلئے ۸۱ کا لوکارتم اساس ۳ پر ۴ ہے

(۲) چونکہ $۱۰^{۱} = ۱۰$، $۱۰^{۲} = ۱۰۰$، $۱۰^{۳} = ۱۰۰۰$ وغیرہ

اسلئے معلوم ہوا کہ اعداد ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰، ...... کے لوکارتم اساس ۱۰ پر بالترتیب طبعی اعداد ۱، ۲، ۳، ..... ہیں

۲۱۹- ن کا لوکارتم اساس ا پر بالعموم اس طرح لکھا جاتا ہے $لوک_{ا}\,ن$، پس دونوں مساواتیں $ا^{لا} = ن$ .... (۱)

اور $لا = لوک_{ا}\,ن$ .... (۲)

ایک ہی ربط کو ظاہر کرتی ہیں ان معادلات سے مساوات متماثلہ $ن = ا^{لوک_{ا}\,ن}$ حاصل ہوتی ہے اور یہ بعض اوقات کام

آتی ہے۔

$10 = 10^1$ اسلئے بوجب تعریف لوک$_{10}$ $10 = 1$

$100 = 10^2$ 〃 〃 〃 لوک$_{10}$ $100 = 2$

$1000 = 10^3$ 〃 〃 〃 لوک$_{10}$ $1000 = 3$

$0.001 = \frac{1}{1000} = 10^{-3}$ 〃 〃 〃 لوک$_{10}$ $0.001 = -3$

$125 = 5^3$ 〃 〃 〃 لوک$_5$ $125 = 3$

$\frac{1}{16} = 2^{-4}$ 〃 〃 〃 لوک$_2$ $\left(\frac{1}{16}\right) = -4$

مثال۔ $32\sqrt[5]{4}$ کا لوکارتھم اساس $2\sqrt{2}$ پر دریافت کرو۔

فرض کرو کہ لا لوکارتھم ہے تب

بوجب تعریف $(2\sqrt{2})^{لا} = 32 \times \sqrt[5]{4}$

$\therefore \left(2 \times 2^{\frac{1}{2}}\right)^{لا} = 2^5 \times 2^{\frac{2}{5}}$

$\therefore 2^{\frac{3}{2}لا} = 2^{5+\frac{2}{5}}$

اسلئے قوت نماؤں کو مساوی رکھنے سے

$\frac{3}{2}لا = \frac{27}{5} \quad \therefore لا = \frac{18}{5} = 3.6$

۲۲۰۔ جب یہ معلوم ہو کہ کوئی خاص نظام لوکارتھمی استعمال میں ہے تو حرف آخر کو جس سے اساس تعبیر ہوتا ہے حذف کر دیتے ہیں۔ پس عملی حسابات میں جہاں اساس ہمیشہ دس ہوتا ہے اکثر لوک$_{10}$ ۲، لوک$_{10}$ ۳، .... کی بجائے اختصاراً لوک ۲، لوک ۳، ..... لکھتے ہیں

لوکارتم کا اساس کوئی عدد ہوسکتا ہے اور اس اساس کے مطابق تمام اعداد کے لوکارتموں کی جدولیں مرتب ہوسکتی ہیں۔ لیکن پیشتر اس کے کہ ہم مروج لوکارتمی جدولوں پر بحث کریں ہم چند ایسے مسائل عامہ ثابت کریں گے جو تمام لوکارتموں کے لئے صادق آتے ہیں خواہ اساس کچھ ہی ہو۔

۲۲۱۔ ایک کا لوکارتم صفر ہے

ا کی تمام قیمتوں کے لئے $\text{ا}^{۰} = ۱$

لوک ۱ = ۰ خواہ اساس کچھ ہی ہو

اساس کا اپنا لوکارتم ایک ہے

چونکہ $\text{ا}^{۱} = \text{ا}$ اسلئے $\text{لوک}_{\text{ا}}\ \text{ا} = ۱$

اساس کی کسی قوت (مثلاً $\text{ا}^{\text{ع}}$) کا لوکارتم ع ہے اور اساس کے متکافی کا لوکارتم ۱- ہے۔

$+\infty$ کا لوکارتم $+\infty$ ہے اور صفر کا لوکارتم $-\infty$ ہے،
یہ بھی ظاہر ہے کہ منفی عدد کا لوکارتم ہمارے موجودہ مفہوم کے مطابق مقدار حقیقی نہیں ہوسکتا۔

۲۲۲۔ ایک حاصل ضرب کا لوکارتم دریافت کرو۔

فرض کرو کہ م ن حاصل ضرب ہے اور ا نظام مجوزہ کا اساس ہے اور فرض کرو کہ

$$\text{لا} = \text{لوک}_{\text{ا}}\ \text{م}،\quad \text{ما} = \text{لوک}_{\text{ا}}\ \text{ن}$$

پس $\text{ا}^{\text{لا}} = \text{م}$ اور $\text{ا}^{\text{ما}} = \text{ن}$

پس حاصل ضرب $\text{م ن} = \text{ا}^{\text{لا}} \times \text{ا}^{\text{ما}} = \text{ا}^{\text{لا}+\text{ما}}$

جس سے بموجب تعریف لوکا م ن = لا + ما = لوکا م + لوکا ن
اسی طرح سے لوکا م ن ف = لوکا م + لوکا ن + لوکا ف
اور علیٰ ہذا القیاس اجزاء ضربی کی کسی تعداد کے لئے

مثال۔ لوک ۴۲ = لوک (۲ × ۳ × ۷)
= لوک ۲ + لوک ۳ + لوک ۷

۲۲۳۔ ایک کسر کا لوکارتم دریافت کرو

اگر م/ن کسر مجوزہ ہو۔ تو فرض کرو کہ
لا = لوکا م اور ما = لوکا ن
پس ا^{لا} = م اور ا^{ما} = ن
اور کسر ہے م/ن = ا^{لا}/ا^{ما} = ا^{لا-ما}
جس سے بموجب تعریف لوکا م/ن = لا - ما = لوکا م - لوکا ن

مثال۔ لوک (۴ ۲/۷) = لوک ۳۰/۷
= لوک ۳۰ - لوک ۷
= لوک (۲ × ۳ × ۵) - لوک ۷
= لوک ۲ + لوک ۳ + لوک ۵ - لوک ۷

۲۲۴۔ ایک ایسے عدد کا لوکارتم دریافت کرو جو کسی قوت پر اٹھایا گیا ہو خواہ یہ قوت صحیح ہو یا مکسور۔

اگر لوکا (م^{ت}) مطلوب ہو تو فرض کرو کہ
لا = لوکا م پس ا^{لا} = م
تب م^{ت} = (ا^{لا})^{ت} = ا^{ت لا}
جس سے بموجب تعریف لوکا (م^{ت}) = ت لا

یعنی لوک۱ (م^ت) = ت لوک۱ م

اسی طرح سے لوک۱ (م^{۱/ر}) = ۱/ر لوک۱ م

مثال ۱- لوک (۲^۲ × ۳^۳ × ۵)/(۷^۲ × ۱۱) = لوک ۵۴۰/۵۳۹

= ۲ لوک ۲ + ۳ لوک ۳ + لوک ۵ - ۲ لوک ۷ - لوک ۱۱

مثال ۲- لوک ∛۴۹ / √۲۱ = لوک ۷^{۲/۳} / (۷^{۱/۲} × ۳^{۱/۲})

= ۲/۳ لوک ۷ - ۱/۲ لوک ۳ - ۱/۲ لوک ۷

= ۱۱/۲۱ لوک ۷ - ۱/۲ لوک ۳

۲۲۵- نتائج مندرجہ بالا سے ظاہر ہے کہ

(۱) کسی حاصل ضرب کا لوکارتم اُس کے اجزاء ضربی کے لوکارتموں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔

(۲) کسی کسر کا لوکارتم اُس حاصل تفریق کے برابر ہوتا ہے جو شمار کنندہ کے لوکارتم میں سے نسب نما کے لوکارتم کو منفی کرنے سے حاصل ہو۔

(۳) کسی عدد کی ت ویں قوت کا لوکارتم اُس عدد کے ت گنے لوکارتم کے برابر ہوتا ہے۔

(۴) کسی عدد کے ر ویں جذر کا لوکارتم اُس عدد کے لوکارتم کے ۱/ر ویں حصے کے برابر ہوتا ہے۔

نیز ہم دیکھتے ہیں کہ لوکارتموں کے استعمال سے اعمال ضرب، تقسیم، بالترتیب اعمال جمع، تفریق میں اور صعود، نزول

بالترتیب اعمال ضرب ، تقسیم میں تبدیل ہو جاتے ہیں۔

مثال ۱۔ لوک $\frac{۳ \times \sqrt{۳۲}}{۴۰ \times \sqrt[۳]{۱۸}}$ کو مختصر کرو۔

جملہ $= \text{لوک}\,(۳ \times ۳۲^{\frac{۱}{۲}}) - \text{لوک}\,(۴۰ \times ۱۸^{\frac{۱}{۳}})$

$= \text{لوک}\,۳ + \text{لوک}\,(۳۲)^{\frac{۱}{۲}} - \left\{\text{لوک}\,۴۰ + \text{لوک}\,(۱۸)^{\frac{۱}{۳}}\right\}$

$= \text{لوک}\,۳ + \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,۳۲ - \text{لوک}\,۴۰ - \frac{۱}{۳}\,\text{لوک}\,۱۸$

$= \text{لوک}\,۳ + \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,(۲^{۵}) - \text{لوک}\,(۵ \times ۲^{۳}) - \frac{۱}{۳}\,\text{لوک}\,(۲ \times ۳^{۲})$

$= \text{لوک}\,۳ + \frac{۵}{۲}\,\text{لوک}\,۲ - (\text{لوک}\,۵ + ۳\,\text{لوک}\,۲) - \frac{۱}{۳}(\text{لوک}\,۲ + ۲\,\text{لوک}\,۳)$

$= (۱ - \frac{۲}{۳})\,\text{لوک}\,۳ + (\frac{۵}{۲} - ۳ - \frac{۱}{۳})\,\text{لوک}\,۲ - \text{لوک}\,۵$

$= \frac{۱}{۳}\,\text{لوک}\,۳ - \frac{۵}{۶}\,\text{لوک}\,۲ - \text{لوک}\,۵$

مثال ۲۔ لوک $\frac{\sqrt[۴]{ا^{۳}}}{ج^{۵}\,ب^{۲}}$ کو لوک ا، لوک ب، لوک ج، کی رقموں میں بیان کرو۔

$\text{لوک}\,\frac{\sqrt[۴]{ا^{۳}}}{ج^{۵}\,ب^{۲}} = \text{لوک}\,\frac{ا^{\frac{۳}{۴}}}{ج^{۵}\,ب^{۲}}$

$= \text{لوک}\,ا^{\frac{۳}{۴}} - \text{لوک}\,(ج^{۵}\,ب^{۲})$

$= \frac{۳}{۴}\,\text{لوک}\,ا - (\text{لوک}\,ج^{۵} + \text{لوک}\,ب^{۲})$

$= \frac{۳}{۴}\,\text{لوک}\,ا - ۵\,\text{لوک}\,ج - ۲\,\text{لوک}\,ب$

مثال ۳- مساوات $ا^{لا} \times ج^{-۲لا} = ب^{۳لا+۱}$ سے لا کی قیمت دریافت کرو

طرفین کے لوکارتم لینے سے حاصل ہوگا

$$لا \text{ لوک } ا - ۲ لا \text{ لوک } ج = (۳ لا + ۱) \text{ لوک } ب$$

$$\therefore \quad لا (\text{لوک } ا - ۲ \text{ لوک } ج - ۳ \text{ لوک } ب) = \text{لوک } ب$$

$$\therefore \quad لا = \frac{\text{لوک } ب}{\text{لوک } ا - ۲ \text{ لوک } ج - ۳ \text{ لوک } ب}$$

امثلہ نمبری ۲۸

لوکارتم دریافت کرو

۱- ۱۶ کا اساس $۲\sqrt{۲}$ پر اور ۱۷۲۸ کا اساس $۲\sqrt{۳}$ پر

۲- ۱۲۵ کا " $۵\sqrt{۵}$ " ۰٫۲۵ کا " ۴ "

۳- $\frac{۱}{۲۵۶}$ کا " $۲\sqrt{۲}$ " ۰٫$\dot{۳}$ کا " ۹ "

۴- ۰٫۰۶۲۵ کا " ۲ " ۱۰۰۰ کا " ۰٫۰۱ "

۵- ۰٫۰۰۰۱ کا " ۰٫۰۰۱ " ۰٫۱ کا " $۹\sqrt{۳}$ "

۶- $\sqrt[۳]{ا^{\frac{۴}{۵}}}$ ، $\frac{۱}{ا^{\frac{۳}{۲}}}$ ، $\sqrt[۴]{ا^{-\frac{۱۵}{۲}}}$ کا " ا "

۷- ذیل کے لوکارتموں کی قیمتیں دریافت کرو

$\text{لوک}_{۸}\ ۱۲۸$ ، $\text{لوک}_{۶}\ \frac{۱}{۲۱۶}$ ، $\text{لوک}_{۲۷}\ \frac{۱}{۸۱}$ ، $\text{لوک}_{۳۴۳}\ ۴۹$

ذیل کے سات لوکارتموں کو لوک ا، لوک ب، لوک ج، کی

رقوم میں بیان کرو۔

۸۔ لوک $\left(\sqrt[3]{ا^{2}} \times \sqrt{ب^{3}}\right)$ ۹۔ لوک $\left(\sqrt{ا^{2} ب^{3}}\right)^{6}$

۱۰۔ لوک $\left(\sqrt[5]{ا^{-4} ب^{2}}\right)$ ۱۱۔ لوک $\left(\sqrt{ا^{-2} ب} \times \sqrt[3]{ا ب^{-3}}\right)$

۱۲۔ لوک $\left(\sqrt{ا^{-1}} \sqrt{ب^{-3}} \div \sqrt{ب^{-3}} \sqrt{ا}\right)$

۱۳۔ لوک $\frac{\sqrt[3]{ا ب^{-1} ج^{-2}}}{\left(ا^{1} ب^{-2} ج^{-4}\right)^{\frac{1}{2}}}$

۱۴۔ لوک $\left\{\left(\frac{ب ج^{-2}}{ب^{-3} ج^{2}}\right)^{-3} \div \left(\frac{ب^{-1} ج}{ب^{2} ج^{-2}}\right)^{5}\right\}$

۱۵۔ ثابت کرو کہ لوک $\frac{\sqrt{\sqrt{2} \times \sqrt[4]{5}}}{\sqrt{\sqrt{2} \times \sqrt[3]{18}}}$

$= \frac{1}{4}$ لوک ۵ $- \frac{2}{5}$ لوک ۲ $- \frac{2}{3}$ لوک ۳

۱۶۔ لوک $\sqrt{729 \sqrt[3]{9^{-1} \times 27^{-\frac{4}{3}}}}$ کو مختصر کرو

۱۷۔ ثابت کرو کہ لوک $\frac{75}{16}$ − ۲ لوک $\frac{5}{9}$ + لوک $\frac{32}{243}$ = لوک ۲

معادلات ذیل کو حل کرو

۱۸۔ $ا^{لا} = ج ب^{لا}$ ۱۹۔ $ا^{3لا} \times ب^{2لا} = ج^{5}$

۲۰۔ $\frac{ا^{لا+1}}{ب^{لا-1}} = ج^{2لا}$ ۲۱۔ $\left\{\begin{array}{l} ا^{2لا} \times ب^{3ی} = م^{5} \\ ا^{3لا} \times ب^{2ی} = م^{10} \end{array}\right\}$

۲۲۔ اگر لوک $\left(لا^{2} ما^{3}\right) = ا$ اور لوک $\left(\frac{لا}{ما}\right) = ب$ تو لوک لا

اور لوک ما کی قیمتیں دریافت کرو

۲۲۳ — اگر $ا^{۳-لا} \times ب^{۵لا} = ا^{لا+۵} \times ب^{۲لا}$ تو ثابت کرو کہ

$$لا\ لوک\left(\frac{ب}{ا}\right) = لوک\ ا$$

۲۲۴ — مساوات ذیل کو حل کرو

$$\left(ا^{۴} - ۲ا^{۲}ب^{۲} + ب^{۴}\right)^{لا-۱} = \left(ا-ب\right)^{۲لا}\left(ا+ب\right)^{-۲}$$

مروج لوکارتموں کا بیان

۲۲۶ — اساس ۱۰ کے موافق جو لوکارتم ہوں ان کو مروج یا عشری لوکارتم کہتے ہیں۔ اس نظام کو ۱۶۱۵ میں برگز نے رائج کیا جو نیپیر موجد لوکارتم کا ہم عصر تھا۔

مساوات $۱۰^{لا} = ن$ سے ظاہر ہے کہ مروج لوکارتم بالعموم صحیح عدد نہیں ہوتے اور نہ وہ ہمیشہ مثبت ہوتے ہیں مثلاً

$۳۱۵۴ > ۱۰^{۳}$ اور $< ۱۰^{۴}$

∴ لوک ۳۱۵۴ = ۳ + ایک کسر

نیز $۰۰۶٫ > ۱۰^{-۳}$ اور $< ۱۰^{-۲}$

اسلئے لوک ۰۰۶٫ = ۳- + ایک کسر

۲۲۷ — **تعریف** کسی لوکارتم کے صحیح حصہ کو ممیز (یا عدد بیانی) اور حصہ اعشاریہ کو اعشاریہ لوکارتمی کہتے ہیں۔

مثال — لوک ۲۰ = ۱٫۳۰۱۰

اس میں لوک ۲۰ کا ممیز ایک ہے اور اس کا اعشاریہ لوکارثمی ۳۰۱۰ء ہے۔ کسی عدد کے لوکارثم کا ممیز اساس ۱۰ پر صرف دیکھنے سے ہی لکھا جا سکتا ہے جیسا کہ دفعات ذیل سے ظاہر ہے۔

۲۲۸- کوئی عدد ایک سے بڑا ہے اسکے لوکارثم کا ممیز دریافت کرو۔

چونکہ $۱۰^۱ = ۱۰$

$۱۰^۲ = ۱۰۰$

$۱۰^۳ = ۱۰۰۰$

....

اس سے ظاہر ہے کہ جس عدد کے صحیح حصہ میں دو ہندسے ہوں وہ $۱۰^۱$ اور $۱۰^۲$ کے درمیان واقع ہوگا اور جس عدد کے صحیح حصہ میں تین ہندسے ہوں وہ $۱۰^۲$ اور $۱۰^۳$ کے درمیان واقع ہوگا اور علیٰ ہذا القیاس۔ اس لئے معلوم ہوا کہ ایسا عدد جس کے صحیح حصے میں ن ہندسے ہوں وہ $۱۰^{ن-۱}$ اور $۱۰^ن$ کے درمیان واقع ہوگا۔

اگر م ایسا عدد ہو جس کے صحیح حصے میں ن ہندسے ہوں تو

$$م = ۱۰^{(ن-۱) + \text{ایک کسر}}$$

$$\therefore \text{لوک م} = (ن-۱) + \text{ایک کسر}$$

لوکارثم کا ممیز (ن-۱) ہے پس معلوم ہوا کہ اگر کوئی عدد ایک سے بڑا ہو تو اس کے لوکارثم کا ممیز مثبت ہوگا اور ان ہندسوں کی تعداد سے جو اس کے صحیح حصے میں ہو بقدر ایک کے کم ہوگا۔

مثال- $۱۲۵ > ۱۰^۲$ اور $< ۱۰^۳$

$$\therefore \text{لوک } ۱۲۵ = ۲ + \text{اعشاریہ لوکارثمی}$$

اس لئے لوک ۱۲۵ کا ممیز ۲ ہے

۲۳۵۴ > $۱۰^{۳}$ اور < $۱۰^{۴}$

اس لئے لوک ۲۳۵۴ کا ممیز ۳ ہے

۶۷٫۰۴ > $۱۰^{۱}$ اور < $۱۰^{۲}$

اس لئے لوک ۶۷٫۰۴ کا ممیز ایک ہے

۲۲۹ — کسی کسر اعشاریہ کے لوکارثم کا ممیز دریافت کرو۔

چونکہ $۱۰^{۰} = ۱$

$۱۰^{-۱} = \frac{۱}{۱۰} = ٫۱$

$۱۰^{-۲} = \frac{۱}{۱۰۰} = ٫۰۱$

$۱۰^{-۳} = \frac{۱}{۱۰۰۰} = ٫۰۰۱$

....

اس سے ظاہر ہے کہ جس کسر اعشاریہ میں علامت اعشاریہ کے بعد ایک صفر ہو (مثلاً ٫۰۳۲۴ جو ٫۰۱ سے بڑی ہے اور ٫۱ سے چھوٹی) وہ $۱۰^{-۲}$ اور $۱۰^{-۱}$ کے درمیان واقع ہوگی اور وہ کسر جس میں علامت اعشاریہ کے بعد دو صفر ہوں وہ $۱۰^{-۳}$ اور $۱۰^{-۲}$ کے درمیان واقع ہوگی اور علیٰ ہذا القیاس۔

اس سے معلوم ہوا کہ ایسی کسر اعشاریہ جس میں علامت اعشاریہ کے عین بعد ن صفر ہوں وہ $۱۰^{-(ن+۱)}$ اور $۱۰^{-ن}$ کے درمیان واقع ہوگی

فرض کرو کہ ع کوئی کسر اعشاریہ ہے جس میں علامت اعشاریہ کے عین بعد ن صفر ہیں

تو ع = $۱۰^{-(ن+۱)}$ + ایک کسر

∴ لوک ع = −(ن + ۱) + ایک کسر

اس لئے ممیز مطلوب - (ن + ۱) ہے یعنی معلوم ہوا کہ ہرایک کسر اعشاریہ کے لوکارتم کا ممیز منفی ہوتا ہے اور علامت اعشاریہ کے عین بعد جتنے صفر ہوں اُن کی تعداد سے بقدر ایک کے زیادہ ہوتا ہے

مثال- ۳ء ۲ = ۳ ÷ ۱۰ جو > ۱÷۱۰ اور < ۱

یعنی یہ > ۱۰^-۱ اور < ۱۰^۰

اس لئے لوک ۳ء ۲ = -۱ + ایک کسر اعشاریہ

اس لئے لوک ۳ء ۲ کا ممیز -۱ ہے

۰۳۵ء > ۰۱ء اور < ۱ء

یعنی یہ > ۱۰^-۲ اور < ۱۰^-۱

اس لئے لوک ۰۳۵ء = -۲ + ایک کسر اعشاریہ

اس لئے لوک ۰۳۵ء کا ممیز -۲ ہے

۰۰۰۰ء ۳۷۸۱ > ۰۰۰۰۱ء اور < ۰۰۰۱ء

یعنی یہ > ۱۰^-۵ اور < ۱۰^-۴

اس لئے لوک ۰۰۰۰۳۷۸۱ء کا ممیز -۵ ہے

۴۳۰- ایک سے لیکر ۲۰۰۰۰ تک تمام صحیح اعداد کے لوکارتم اساس دس پر نکالے گئے ہیں اور ان کو جدولوں کی شکل میں لکھا گیا ہے، اکثر جداول لوکارتمی میں لوکارتم سات مرتبہ کے اعشاریہ تک مندرج ہوتے ہیں۔ عملیات میں نظام عشری زیادہ تر استعمال ہوتا ہے اس کے دو بڑے فوائد یہ ہیں -

(۱) اُن نتائج سے جو ہم اوپر ثابت کرچکے ہیں ظاہر ہے کہ ممیز

صرف دیکھنے سے ہی لکھے جا سکتے ہیں اس لئے جداول میں صرف اعشاریہ لوکارتمی مندرج کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔

(۲) جن عددوں کے ملحوظ ہندسے وہی ہوں اُن میں سے ہر ایک کا اعشاریہ لوکارتمی وہی ہوتا ہے پس نظام عشری میں صرف صحیح اعداد کے لوکارتمی اعشاریوں کو جدولوں میں مندرج کرنا کافی ہوتا ہے۔ اگلی دفعہ میں ہم یہی دعویٰ ثابت کریں گے۔

نوٹ۔ کسی عدد کے **ملحوظ** ہندسے وہ ہوتے ہیں جو اول اور آخر سے تمام صفر دور کرنے پر باقی رہ جائیں۔ مثلاً ۳۲۰۱۶ ۰۰ء اور ۳۲۰۱۶۰۰۰ کے ملحوظ ہندسے ۳۲۰۱۶ ہیں

۲۳۱۔ فرض کرو کہ ن کوئی عدد ہے۔ اگر اسے دس کی کسی قوت سے ضرب دی جائے یا اس کو دس کی کسی قوت پر تقسیم کیا جائے تو صرف مقام اعشاریہ میں فرق آتا ہے مگر ہندسوں کی ترتیب نہیں بدلتی۔ اس سے ظاہر ہے کہ ن × ۱۰^ف اور ن ÷ ۱۰^ق (جہاں ف اور ق دونوں صحیح ہیں) ایسے اعداد ہیں جن کے ملحوظ ہندسے وہی ہیں جو ن کے ہیں۔

اب لوک (ن × ۱۰^ف) = لوک ن + ف لوک ۱۰

= لوک ن + ف ....(۱)

نیز لوک (ن ÷ ۱۰^ق) = لوک ن ـ ق لوک ۱۰

= لوک ن ـ ق ....(۲)

ظاہر ہے کہ رابطہ (۱) میں لوک ن پر صرف ایک صحیح عدد کا اضافہ ہو گیا ہے اور (۲) میں ایک صحیح عدد لوک ن میں سے منفی ہو گیا ہے یعنی

ثابت ہوا کہ ہر صورت میں اعشاریہ لوکارتمی وہی رہتا ہے۔ اس دفعہ میں اور تین گذشتہ دفعات میں اعشاریہ لوکارتمی مثبت فرض کیا گیا ہے۔ نظام برگس سے پورا فائدہ اُٹھانے کے لئے ہم اپنے حسابی اعمال میں اس بات کا خیال رکھتے ہیں کہ **اعشاریہ لوکارتمی ہمیشہ مثبت** رہے تاکہ جب ہم اعشاریہ لوکارتمی کو جدولوں سے لیں تو فقط ممیز کو مع اس کی مناسب علامت کے اس کے ماقبل لکھدیں۔

۲۳۲— منفی لوکارتھم کی صورت میں منفی علامت کو ممیز کے اوپر لکھتے ہیں اور اس کے پہلے نہیں لکھتے تا کہ معلوم ہو کہ صرف ممیز ہی منفی ہے اور سب کا سب جملہ منفی نہیں ہے، پس ۴̅،۳۰۱۰۳ جو ۰۰۰۲، کا لوکارتھم ہے = -۴ + ۳۰۱۰۳، اس کو -۴،۳۰۱۰۳ سے مختلف خیال کرنا چاہئے جو ایک ایسا جملہ ہے جس میں حصص صحیح اور اعشاریہ دونوں منفی ہیں۔ اعشاریہ لوکارتمی کو مثبت بنانے کے لئے بعض اوقات یہ حسابی ترکیب مفید ثابت ہوئی ہے مثلاً فرض کرو کہ ایک رقم -۳،۶۹۸۹۷ معلوم ہے جس میں سب کا جملہ منفی ہے، اگر ہم ممیز سے ایک منفی کریں اور اعشاریہ لوکارتمی میں ایک جمع کریں تو رقم مجوزہ صورت مذکورہ میں تحویل ہو سکتی ہے یعنی -۳،۶۹۸۹۷ = -۴ + (۱ - ۶۹۸۹۷،)

= ۴̅،۳۰۱۰۳

اس قسم کی اور کئی صورتیں آگے دیکھنے میں آئیں گی۔

مثال ۱۔ ۰۰۰۲۴۳۲، کا لوکارتھم دریافت کرو۔

جدولوں سے ہمیں معلوم ہوگا کہ لوک ۲۴۳۲ کا اعشاریہ لوکارتمی ۳۸۵۹۶۳۶ ہے۔

(لیکن جدولوں میں مقام اعشاریہ اور ممیز نہیں دیا ہوا) نیز بموجب دفعہ ۲۲۹ عدد معلوم کے لوکارتم کا ممیز ـ ۴ ہے۔

∴ لوک ،۰۰۰۲۴۳۲ = $\bar{۴}$،۳۸۵۹۶۳۶

مثال ۲ ـ $\sqrt[۵]{،۰۰۰۰۰۱۶۵}$ کی قیمت دریافت کرو۔ معلوم ہے لوک ۱۶۵ = ۲،۲۱۷۴۸۳۹ اور لوک ۶۹۷۴۲۴ = ۵،۸۴۳۴۹۶۸

فرض کرو کہ لا قیمت مطلوبہ ہے، تب

لوک لا = لوک $(،۰۰۰۰۰۱۶۵)^{\frac{۱}{۵}}$ = $\frac{۱}{۵}$ لوک (،۰۰۰۰۰۱۶۵)

= $\frac{۱}{۵}$($\bar{۶}$،۲۱۷۴۸۳۹) کیونکہ لوک ،۰۰۰۰۰۱۶۵ کا اعشاریہ لوکارتمی وہی ہے جو لوک ۱۶۵ کا ہے اور ممیز حسب معمول دریافت کیا گیا ہے۔

اب $\frac{۱}{۵}$($\bar{۶}$،۲۱۷۴۸۳۹) = $\frac{۱}{۵}$($\bar{۱۰}$ + ۴،۲۱۷۴۸۳۹)

= $\bar{۲}$،۸۴۳۴۹۶۸

اور لوک ۶۹۷۴۲۴ کا اعشاریہ لوکارتمی ،۸۴۳۴۹۶۸ ہے اس لئے معلوم ہوا کہ لا ایک ایسا عدد ہے جس میں ہندسے تو یہی ہیں مگر علامت اعشاریہ کے بعد ایک صفر ہے پس

لا = ،۰۶۹۷۴۲۴

۲۳۳ ـــ لوکارتم نکالنے کی ترکیب اگلے باب میں بیان ہوگی اور وہاں معلوم ہوگا کہ پہلے لوکارتم کسی اور اساس کے موافق دریافت کئے جاتے ہیں اور بعد میں ان کی تحویل مروج لوکارتموں (اساس دس) میں کی جاتی ہے۔

اس لئے ضروری ہے کہ ہم کسی ایک نظام لوکارتمی کو جس کا اساس معلوم ہو کسی نئے نظام لوکارتمی میں جس کا اساس مختلف ہو تبدیل کرنے کی ترکیب دریافت کریں۔

۲۳۴۔ فرض کرو کہ کل اعداد کے لوکارتم اساس ا پر معلوم ہیں اور جدولوں میں مندرج ہیں اور اساس ب پر لوکارتم نکالنے مطلوب ہیں۔

فرض کرو کہ ن کوئی عدد ہے جس کا لوکارتم اساس ب پر نکالنا مطلوب ہے، فرض کرو کہ $\text{ما} = \text{لوک}_{\text{ب}}\,\text{ن}$ یعنی $\text{ب}^{\text{ما}} = \text{ن}$

$$\therefore\ \text{لوک}_{\text{ا}}(\text{ب}^{\text{ما}}) = \text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{ن}$$

$$\text{یعنی}\ \ \text{ما}\,\text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{ب} = \text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{ن}$$

$$\therefore\ \text{ما} = \frac{1}{\text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{ب}} \times \text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{ن}$$

$$\text{یا}\ \ \text{لوک}_{\text{ب}}\,\text{ن} = \frac{1}{\text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{ب}} \times \text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{ن} \ \ldots\ldots(1)$$

اب چونکہ ن اور ب معلوم ہیں اسلئے $\text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{ن}$ اور $\text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{ب}$ جدولوں سے معلوم ہو سکتے ہیں اور اس طرح $\text{لوک}_{\text{ب}}\,\text{ن}$ معلوم ہو سکتا ہے۔

پس ظاہر ہے کہ لوکارتموں کو اساس ا سے اساس ب میں تبدیل کرنے کے لئے صرف اتنا ضروری ہے کہ ہم انھیں $\frac{1}{\text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{ب}}$ میں ضرب دیدیں اور یہ ایک مستقل مقدار ہے جو جدولوں سے معلوم ہو سکتی ہے، $\frac{1}{\text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{ب}}$ کو لوکارتموں کا مقیاس یا **مضروب معین** کہتے ہیں۔

۲۳۵۔ دفعہ گذشتہ کی مساوات (۱) میں ن کی جگہ ا لکھنے سے

$$\text{لوک}_{\text{ب}}\,\text{ا} = \frac{1}{\text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{ب}} \times \text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{ا} = \frac{1}{\text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{ب}}$$

$$\therefore \text{لوک}_{\text{ب}}\,\text{ا} \times \text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{ب} = 1$$

اس نتیجہ کو بلا واسطہ ہم اس طرح ثابت کر سکتے ہیں۔
فرض کرو کہ لا = لوک$_{\text{ا}}$ ب یعنی ا$^{\text{لا}}$ = ب
اساس ب پر لوکارتم لینے سے

$$\text{لا}\ \text{لوک}_{\text{ب}}\,\text{ا} = \text{لوک}_{\text{ب}}\,\text{ب} = 1$$

$$\therefore \text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{ب} \times \text{لوک}_{\text{ب}}\,\text{ا} = 1$$

مثال ۱ — لوک$_{\text{ب}}$ ا × لوک$_{\text{ج}}$ ب × لوک$_{\text{د}}$ ج کو مختصر کرو۔

لوک$_{\text{ب}}$ ا = $\frac{1}{\text{لوک}_{\text{ج}}\,\text{ب}}$ × لوک$_{\text{ج}}$ ا اگر نیا اساس ج لیا جائے۔

اب لوک$_{\text{ب}}$ ا × لوک$_{\text{ج}}$ ب = $\frac{1}{\text{لوک}_{\text{ج}}\,\text{ب}}$ × لوک$_{\text{ج}}$ ا × لوک$_{\text{ج}}$ ب

$$= \text{لوک}_{\text{ج}}\,\text{ا}$$

$$\therefore \text{لوک}_{\text{ب}}\,\text{ا} \times \text{لوک}_{\text{ج}}\,\text{ب} \times \text{لوک}_{\text{د}}\,\text{ج}$$

$$= \text{لوک}_{\text{ج}}\,\text{ا} \times \text{لوک}_{\text{د}}\,\text{ج} = \text{لوک}_{\text{د}}\,\text{ا}$$

یا لوکارتمی ضابطہ کی مدد کے بغیر یہ اس طرح حل ہو سکتا ہے۔

فرض کرو کہ لوک$_{\text{ب}}$ ا = لا ∴ ا = ب$^{\text{لا}}$

فرض کرو کہ $\text{لوک}_{\text{ج}}\,\text{ب} = \text{م} \quad \therefore \text{ب} = \text{ج}^{\text{م}}$

فرض کرو کہ $\text{لوک}_{\text{د}}\,\text{ج} = \text{ی} \quad \therefore \text{ج} = \text{د}^{\text{ی}}$

لا م ی مطلوب ہے:

$$\text{ا} = \text{ب}^{\text{لا}} = (\text{ج}^{\text{م}})^{\text{لا}} = \text{ج}^{\text{لام}} = (\text{د}^{\text{ی}})^{\text{لام}} = \text{د}^{\text{لامی}}$$

$$\therefore \text{لوک}_{\text{د}}\,\text{ا} = \text{لامی} = \text{لوک}_{\text{ب}}\,\text{ا} \times \text{لوک}_{\text{ج}}\,\text{ب} \times \text{لوک}_{\text{د}}\,\text{ج}$$

مثال۔ $\text{لوک}_{۱۰}\,۶۴ \times \text{لوک}_{۵}\,۱۰ \div \text{لوک}_{۵}\,۸$ کو مختصر کرو

$$\text{جملہ} = \text{لوک}_{۱۰}\,۶۴ \times \frac{\text{لوک}_{۵}\,۱۰}{\text{لوک}_{۵}\,۸} = \text{لوک}_{۱۰}\,۶۴ \times \text{لوک}_{۸}\,۱۰$$

$$= \text{لوک}_{۸}\,۶۴ = \text{لوک}_{۸}\,۸^{۲} = ۲$$

۲۳۶ — اس جگہ ہم چند متفرق مثالیں دیں گے، لوکارتم بالعموم اعمال حسابیہ کو بہت آسان بنا دیتے ہیں ۔

مثال ۱ — معلوم ہے $\text{لوک}\,۳ = ۴۷۷۱۲۱۳ء$

معلوم کرو $\text{لوک}\left\{(۲ء۷)^{۳} \times (۸۱ء)^{\frac{۴}{۵}} \div (۹۰)^{\frac{۵}{۴}}\right\}$

$$\text{قیمت مطلوبہ} = ۳\,\text{لوک}\,\frac{۲۷}{۱۰} + \frac{۴}{۵}\,\text{لوک}\,\frac{۸۱}{۱۰۰} - \frac{۵}{۴}\,\text{لوک}\,۹۰$$

$$= ۳\left(\text{لوک}\,۳^{۳} - ۱\right) + \frac{۴}{۵}\left(\text{لوک}\,۳^{۴} - ۲\right) - \frac{۵}{۴}\left(\text{لوک}\,۳^{۲} + ۱\right)$$

$$= \left(۹ + \frac{۱۶}{۵} - \frac{۵}{۲}\right)\text{لوک}\,۳ - \left(۳ + \frac{۸}{۵} + \frac{۵}{۴}\right)$$

$$= \frac{۹۷}{۱۰}\,\text{لوک}\,۳ - ۵\frac{۱۷}{۲۰}$$

= ۴٫۶۲۸۰۷۶۶ − ۵٫۸۵ = ۳̄٫۷۷۸۰۷۶۶

طالب علم دیکھ لیگا کہ ۵ یا ۵ کی کسی قوت کا لوکارتم ہمیشہ لوک ۲ سے حاصل ہو سکتا ہے مثلاً

لوک ۵ = لوک $\frac{۱۰}{۲}$ = لوک ۱۰ − لوک ۲ = ۱ − لوک ۲

مثال ۲ — $(۸۷۵)^{۱۶}$ میں ہندسوں کی تعداد دریافت کرو۔

معلوم ہے لوک ۲ = ۰٫۳۰۱۰۳۰۰ اور لوک ۷ = ۰٫۸۴۵۰۹۸۰

لوک $(۸۷۵)^{۱۶}$ = ۱۶ لوک (۷ × ۱۲۵)

= ۱۶ (لوک ۷ + لوک ۱۲۵)

= ۱۶ (لوک ۷ + ۳ لوک ۵)

= ۱۶ (لوک ۷ + ۳ − ۳ لوک ۲)

= ۱۶ × ۲٫۹۴۲۰۰۸۰

= ۴۷٫۰۷۲۱۲۸

اس لئے ہندسوں کی تعداد ۴۸ ہے (دفعہ ۲۲۸)

مثال ۳ — لوک ۲ اور لوک ۳ معلوم ہیں

مساوات $۶^{۳-۴لا} \times ۴^{لا+۵} = ۸$ سے لا کی قیمت ۲ مرتبہ کے اعشاریہ تک دریافت کرو۔

طرفین کے لوکارتم لینے سے

(۳ − ۴ لا) لوک ۶ + (لا + ۵) لوک ۴ = لوک ۸

∴ (۳ − ۴ لا) (لوک ۲ + لوک ۳) + (لا + ۵) ۲ لوک ۲ = ۳ لوک ۲

∴ لا (−۴ لوک ۲ − ۴ لوک ۳ + ۲ لوک ۲) = ۳ لوک ۲ − ۳ لوک ۲

− ۳ لوک ۳ − ۱۰ لوک ۲

$$\therefore لا = \frac{۱۰ لوک ۲ + ۳ لوک ۳}{۲ لوک ۲ + ۴ لوک ۳}$$

$$= \frac{۳٫۴۴۱۶۶۳۹}{۲٫۵۱۰۵۴۵۲} = ۱٫۷۷ ....$$

مثال ۴ — ۳ کی کونسی قوت $۱۰^{۸}$ کے نہایت قریب ہے؟ (لوک ۳ = ٫۴۷۷۱)

فرض کرو کہ $۳^{لا} = ۱۰^{۸}$

طرفین کے لوکارتم لینے سے لالوک ۳ = ۸

اس لئے $لا = \frac{۸}{لوک ۳} = \frac{۸}{٫۴۷۷۱} = ۱۶٫۸$ (تقریباً)

یہ ۱۶ نسبت ۱۷ کے زیادہ قریب ہے اس لئے ۱۷ قوت مطلوبہ ہے؟

اصول اجزاء متناسب

۲۳۷ — جن اعداد کے فرق چھوٹی مقداروں سے تعبیر ہوسکیں ان کے لئے یہ مسئلہ درست ہے "کہ لوکارتموں کے فرق ان کے متعلقہ اعداد کے فرقوں کے تقریباً متناسب ہوتے ہیں" یہ اصول جداول کے مرتب کرنے اور ایک خاص حدتک ان کے استعمال میں نہایت مفید ثابت ہوتا ہے۔ مثلاً اگر لوک ۲۱۳ اور لوک ۲۱۴ معلوم ہوں تو اس اصول کی مدد سے لوک ۲۱۳٫۷ دریافت ہوسکتا ہے

لوک ۲۱۳ = ۲٫۳۲۸۴

اور لوک ۲۱۴ = ۲٫۳۳۰۴

اس جگہ عددوں کا تفاوت ایک ہے اور ان کے لوکارتھوں کا ٫۰۰۲۰
اگر عددوں کا فرق ایک کا ۷/۱۰ ہوتا تو ان کے لوکارتھوں کا فرق بموجب
مسئلہ اجزاء متناسب ۷/۱۰ × ٫۰۰۲۰ ہوتا اور اسی طرح باقی صورتوں میں۔

اگر لوک ۲۱۳ کی مدد سے لوک (۲۱۳ + لا) نکالنا منظور ہو تو فرض
کرو کہ اس کو ہم (۲٫۳۲۸۴ + ما) سے تعبیر کرتے ہیں جہاں ما
وہی کسر ہے ٫۰۰۲۰ کی جو لا ہے ایک کی۔

پس لوک ۲۱۳٫۷ = لوک (۲۱۳ + ٫۷) = ۲٫۳۲۸۴ + ما

جہاں ما / ٫۰۰۲۰ = ۷/۱۰ یعنی ما = ٫۰۰۱۴

اس لئے لوک ۲۱۳٫۷ = ۲٫۳۲۸۴ + ٫۰۰۱۴ = ۲٫۳۲۹۸

۲۳۸ — جداول حسابیہ

لوکارتھم

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱۵	۱۷۶۱	۱۷۹۰	۱۸۱۸	۱۸۴۷	۱۸۷۵	۱۹۰۳	۱۹۳۱	۱۹۵۹	۱۹۸۷	۲۰۱۴	۳	۶	۸	۱۱	۱۴	۱۷	۲۰	۲۲	۲۵
۱۶	۲۰۴۱	۲۰۶۸	۲۰۹۵	۲۱۲۲	۲۱۴۸	۲۱۷۵	۲۲۰۱	۲۲۲۷	۲۲۵۳	۲۲۷۹	۳	۵	۸	۱۱	۱۳	۱۶	۱۸	۲۱	۲۴
۱۷	۲۳۰۴	۲۳۳۰	۲۳۵۵	۲۳۸۰	۲۴۰۵	۲۴۳۰	۲۴۵۵	۲۴۸۰	۲۵۰۴	۲۵۲۹	۲	۵	۷	۱۰	۱۲	۱۵	۱۷	۲۰	۲۲
۱۸	۲۵۵۳	۲۵۷۷	۲۶۰۱	۲۶۲۵	۲۶۴۸	۲۶۷۲	۲۶۹۵	۲۷۱۸	۲۷۴۲	۲۷۶۵	۲	۵	۷	۹	۱۲	۱۴	۱۶	۱۹	۲۱
۱۹	۲۷۸۸	۲۸۱۰	۲۸۳۳	۲۸۵۶	۲۸۷۸	۲۹۰۰	۲۹۲۳	۲۹۴۵	۲۹۶۷	۲۹۸۹	۲	۴	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۶	۱۸	۲۰
۲۰	۳۰۱۰	۳۰۳۲	۳۰۵۴	۳۰۷۵	۳۰۹۶	۳۱۱۸	۳۱۳۹	۳۱۶۰	۳۱۸۱	۳۲۰۱	۲	۴	۶	۸	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹
۲۱	۳۲۲۲	۳۲۴۳	۳۲۶۳	۳۲۸۴	۳۳۰۴	۳۳۲۴	۳۳۴۵	۳۳۶۵	۳۳۸۵	۳۴۰۴	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸
۲۲	۳۴۲۴	۳۴۴۴	۳۴۶۴	۳۴۸۳	۳۵۰۲	۳۵۲۲	۳۵۴۱	۳۵۶۰	۳۵۷۹	۳۵۹۸	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۵	۱۷

∴ لا = (۱۰ لوک ۲ + ۳ لوک ۳) / (۲ لوک ۲ + ۴ لوک ۳)

= ۴٫۴۴۱۶۶۳۹ / ۲٫۵۱۰۵۴۵۲ = ...۱٫۷۷

مثال ۴ — ۳ کی کونسی قوت ۱۰^۸ کے نہایت قریب ہے؟
(لوک ۳ = ٫۴۷۷۱)

فرض کرو کہ ۳^لا = ۱۰^۸

طرفین کے لوکارثم لینے سے لا لوک ۳ = ۸

اس لئے لا = ۸ / لوک ۳ = ۸ / ٫۴۷۷۱ = ۱۶٫۸ (تقریباً)

یہ ۱۶ نسبت ۱۷ کے زیادہ قریب ہے اس لئے ۱۷ قوت مطلوبہ ہے؟

اصول اجزاء متناسب

۲۳۷ — جن اعداد کے فرق چھوٹی مقداروں سے تعبیر ہوسکیں ان کے لئے یہ مسئلہ درست ہے "کہ لوکارثموں کے فرق ان کے متعلقہ اعداد کے فرقوں کے تقریباً متناسب ہوتے ہیں" یہ اصول جداول کے مرتب کرنے اور ایک خاص حدتک ان کے استعمال میں نہایت مفید ثابت ہوتا ہے۔ مثلاً اگر لوک ۲۱۳ اور لوک ۲۱۴ معلوم ہوں تو اس اصول کی مدد سے لوک ۲۱۳٫۷ دریافت ہوسکتا ہے

لوک ۲۱۳ = ۲٫۳۲۸۴

اور لوک ۲۱۴ = ۲٫۳۳۰۴

مندرجہ بالا اقتباس چار ہندسوں والے لوکارتمی جدولوں سے کیا گیا ہے اس کی مدد سے کسی عدد کا لوکارتم حاصل ہو سکتا ہے مثلاً فرض کرو کہ لوک ۱۷۵۶ مطلوب ہے، جس سطر کے شروع میں ۱۷ لکھا ہوا ہے اس کی دائیں طرف سے بائیں طرف دیکھتے جاؤ جب تک کہ اُس عدد کی نوبت نہ آجائے جس کی سمت راس میں سب سے اوپر ۵ لکھا ہوا ہے وہ عدد ۲۴۳۰، ہے، آخری ۶ کے متعلق صفحہ کی بائیں طرف ہندسہ ۶ کے نیچے عمودی سطر میں ۱۵ لکھا ہوا ہے۔ حاصل مطلوب ۲۴۴۵، ہوا جدولوں میں لوکارتم کا مقام اعشاریہ نہیں لکھا جاتا، فی الحقیقت اوپر کے اعداد ۲۴۳۰، اور ۰۰۱۵، ہیں جن کا مجموعہ ۲۴۴۵، ہے اور یہ ایک ایسے عدد کا اعشاریہ لوکارتمی ہے جس کے ملحوظ ہندسے ۱۷۵۶ ہیں، مناسب ممیز زیادہ کرنے سے لوک ۱۷۵۶ = ۳،۲۴۴۵

نیز لوک ۱۷،۵۶ = ۱،۲۴۴۵

اور لوک ۰۱۷۵۶، = $\bar{۲}$،۲۴۴۵

کیونکہ اگر اعداد کے ملحوظ ہندسے وہی ہوں تو اُن کے لوکارتمی اعشاریے وہی ہوتے ہیں۔

اگر لوک ۱۷۵۶،۷ مطلوب ہو تو بموجب اصول اجزاء متناسب ہمیں ۷ کے متعلق فرق کا $\frac{۷}{۱۰}$ واں حصہ یعنی $\frac{۳ \times ۷}{۱۰}$ یعنی ۰۰۰۲، عدد ۱۷۵۶ کے لوکارتم پر زیادہ کرنا چاہیئے۔

پس لوک ۱۷۵۶،۷ = ۳،۲۴۴۷

۲۳۹ — اگر اعداد سلسلہ ہندسیہ میں ہوں تو ان کے لوکارتم سلسلہ حسابیہ میں ہوں گے۔

فرض کرو کہ مجوزہ اعداد $\text{ما}_{۱}$، $\text{ما}_{۲}$، $\text{ما}_{۳}$ .... $\text{ما}_{ن}$ ہیں اگر $\text{ما}_{۱}$ کا لوکارتم اساس ا پر ع ہو اور سلسلہ ہندسیہ $\text{ما}_{۱}$، $\text{ما}_{۲}$، $\text{ما}_{۳}$ .... $\text{ما}_{ن}$ کی نسبت مشترک کا لوکارتم ب ہو تو مطابق قیمتوں کے مفصلہ ذیل سلسلے حاصل ہونگے۔

$$\text{ما}_{۱}،\ \text{ما}_{۲}،\ \text{ما}_{۳}،\ \ldots\ldots\ \text{ما}_{ن}$$
$$=\quad=\quad=\quad=$$
$$\text{ا}^{\text{ع}}\quad \text{ا}^{\text{ع}+\text{ب}}\quad \text{ا}^{\text{ع}+۲\text{ب}}\ \ldots\ldots\ \text{ا}^{\text{ع}+(\text{ن}-۱)\text{ب}}$$

جس سے مسئلہ ثابت ہوتا ہے

یہ ایک تاریخی واقعہ ہے کہ دو سلسلوں (ہندسیہ اور حسابیہ) کے باہم مقابلہ کرنے کا خیال لوکارتم کی ایجاد کا باعث ہوا اور لوکارتم کی تمام پرانی ترکیبیں اسی طرز عمل پر مبنی ہیں۔ اس کی توضیح کیلئے ایک مثال مندرجہ ذیل ہے۔

فرض کرو کہ دو اعداد معینہ $\text{ما}_{۱}$ اور $\text{ما}_{۹}$ کے لوکارتم بالترتیب $\text{لا}_{۱}$ اور $\text{لا}_{۹}$ ہیں ہم $\text{ما}_{۱}$ اور $\text{ما}_{۹}$ کے درمیان جتنے اعداد کے لوکارتم دریافت کرنا چاہیں کر سکتے ہیں، ہمیں معلوم ہے۔

$$\text{ما}_{۱} = \text{ا}^{\text{لا}_{۱}}،\qquad \text{ما}_{۹} = \text{ا}^{\text{لا}_{۹}}$$

اب $\text{ما}_{۱}$ اور $\text{ما}_{۹}$ کے درمیان ایک اوسط ہندسی $\text{ما}_{۵}$ مندرج کرو۔

تب $\text{ما}_{۵} = (\text{ما}_{۱}\,\text{ما}_{۹})^{\frac{1}{2}} = \text{ا}^{\frac{\text{لا}_{۱}+\text{لا}_{۹}}{۲}} = \text{ا}^{\text{لا}_{۵}}$ (فرض کرو)

جہاں $\text{لا}_{۵}$ اوسط حسابی ہے $\text{لا}_{۱}$ اور $\text{لا}_{۹}$ کے درمیان۔ اس طرح نظام ذیل حاصل ہوگا

لوکارتم $\text{لا}_{۱}$ $\text{لا}_{۵}$ $\text{لا}_{۹}$

عدد $\text{ما}_{۱}$ $\text{ما}_{۵}$ $\text{ما}_{۹}$

اس کے بعد $\text{ما}_{۱}$، $\text{ما}_{۵}$ اور $\text{ما}_{۵}$، $\text{ما}_{۹}$ کے درمیان اوساط ہندسیہ مندرج کرو، جو عدد ان اوساط کو تعبیر کریں گے اُن کے لوکارتم بالترتیب $\text{لا}_{۱}$، $\text{لا}_{۵}$ اور $\text{لا}_{۵}$، $\text{لا}_{۹}$ کے اوساط حسابیہ ہوں گے، اس طرح سے ہمیں نظام ذیل حاصل ہوگا

لوکارتم $\text{لا}_{۱}$ $\text{لا}_{۳}$ $\text{لا}_{۵}$ $\text{لا}_{۷}$ $\text{لا}_{۹}$

عدد $\text{ما}_{۱}$ $\text{ما}_{۳}$ $\text{ما}_{۵}$ $\text{ما}_{۷}$ $\text{ما}_{۹}$

اور اسی طرح عمل کرنے سے ہمیں نظام ذیل حاصل ہوگا

لوکارتم $\text{لا}_{۱}$ $\text{لا}_{۲}$ $\text{لا}_{۳}$ $\text{لا}_{۴}$ $\text{لا}_{۵}$ $\text{لا}_{۶}$ $\text{لا}_{۷}$ $\text{لا}_{۸}$ $\text{لا}_{۹}$

عدد $\text{ما}_{۱}$ $\text{ما}_{۲}$ $\text{ما}_{۳}$ $\text{ما}_{۴}$ $\text{ما}_{۵}$ $\text{ما}_{۶}$ $\text{ما}_{۷}$ $\text{ما}_{۸}$ $\text{ما}_{۹}$

اور علیٰ ہذا القیاس، اس قسم کے حساب میں ہر دفعہ اعمال ضرب، استخراج جذر اور جمع سے کام لینا پڑتا ہے اور ہر دفعہ ایسا کرنے سے ایک نیا عدد اور اُسکا لوکارتم حاصل ہوتا ہے

عددی مثال۔ اگر ا = ۱۰، $\text{ما}_{۱}$ = ۱، $\text{ما}_{۹}$ = ۱۰ تو $\text{لا}_{۱}$ = ۰، $\text{لا}_{۹}$ = ۱، موافق بالا عمل کرنے سے ہمیں جدول ذیل حاصل ہوگی

عدد	لوکارتم	عدد	لوکارتم
۱٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۴٫۲۱۷۰	۰٫۶۲۵۰
۱٫۳۳۳۹	۰٫۱۲۵۰	۵٫۶۲۳۵	۰٫۷۵۰۰
۱٫۷۷۸۳	۰٫۲۵۰۰	۷٫۴۹۹۰	۰٫۸۷۵۰
۲٫۳۷۱۴	۰٫۳۷۵۰	۱۰٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰
۳٫۱۶۲۲	۰٫۵۰۰۰		

عکسی لوکارتم

۲۴۰- **تعریف** اگر ن کا لوکارتم لا ہو تو ن کو لا کا عکسی لوکارتم یا **عکسی لوکارتم** کہتے ہیں۔

اگر کسی عدد کی ترکیب میں متعدد ہندسے ایک خاص ترتیب میں شامل ہوں اور ہندسوں کی اس ترتیب کا عکسی لوکارتم دریافت کرنا ہو (یعنی وہ عدد معلوم کرنا ہو جس کا لوکارتم یہ ترتیب معلوم ہے) تو جدولوں کے خانوں میں ہندسوں کی اس ترتیب کو یا اس سے اگلے درجہ کی کم ترتیب کو تلاش کرنا چاہیئے مگر دوسری صورت میں بائیں طرف کے خانوں کی مدد سے تفاوت کا خیال کر لینا چاہیئے **عکس لوکارتمی** جدولوں کے استعمال سے بہت محنت بچے گی، اُن کا طریق استعمال لوکارتمی جدولوں کے استعمال کا سا ہے۔

یاد رہے کہ جدول میں صرف اعشاریہ لوکارتمی اور عکسی لوکارتم کے ملحوظ ہندسے مندرج ہوتے ہیں، عکسی لوکارتم میں علامت اعشاریہ کا مقام دیئے ہوئے ممیز سے معلوم ہوسکتا ہے۔

عکسی لوکارتم

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱ ۲ ۳	۴ ۵ ۶	۷ ۸ ۹
۱۹ء	۱۵۴۹	۱۵۵۲	۱۵۵۶	۱۵۶۰	۱۵۶۳	۱۵۶۷	۱۵۷۰	۱۵۷۴	۱۵۷۸	۱۵۸۱	۰ ۱ ۱	۱ ۲ ۲	۳ ۳ ۳
۲۰ء	۱۵۸۵	۱۵۸۹	۱۵۹۲	۱۵۹۶	۱۶۰۰	۱۶۰۳	۱۶۰۷	۱۶۱۱	۱۶۱۴	۱۶۱۸	۰ ۱ ۱	۱ ۲ ۲	۳ ۳ ۳
۲۱ء	۱۶۲۲	۱۶۲۶	۱۶۲۹	۱۶۳۳	۱۶۳۷	۱۶۴۱	۱۶۴۴	۱۶۴۸	۱۶۵۲	۱۶۵۶	۰ ۱ ۱	۲ ۲ ۲	۳ ۳ ۳
۲۲ء	۱۶۶۰	۱۶۶۳	۱۶۶۷	۱۶۷۱	۱۶۷۵	۱۶۷۹	۱۶۸۳	۱۶۸۷	۱۶۹۰	۱۶۹۴	۰ ۱ ۱	۲ ۲ ۲	۳ ۳ ۳
۲۳ء	۱۶۹۸	۱۷۰۲	۱۷۰۶	۱۷۱۰	۱۷۱۴	۱۷۱۸	۱۷۲۲	۱۷۲۶	۱۷۳۰	۱۷۳۴	۰ ۱ ۱	۲ ۲ ۳	۳ ۳ ۴
۲۴ء	۱۷۳۸	۱۷۴۲	۱۷۴۶	۱۷۵۰	۱۷۵۴	۱۷۵۸	۱۷۶۲	۱۷۶۶	۱۷۷۰	۱۷۷۴	۰ ۱ ۱	۲ ۲ ۲	۳ ۳ ۴
۲۵ء	۱۷۷۸	۱۷۸۲	۱۷۸۶	۱۷۹۱	۱۷۹۵	۱۷۹۹	۱۸۰۳	۱۸۰۷	۱۸۱۱	۱۸۱۶	۰ ۱ ۱	۲ ۲ ۲	۳ ۳ ۴
۲۶ء	۱۸۲۰	۱۸۲۴	۱۸۲۸	۱۸۳۲	۱۸۳۷	۱۸۴۱	۱۸۴۵	۱۸۴۹	۱۸۵۴	۱۸۵۸	۰ ۱ ۱	۲ ۲ ۳	۳ ۳ ۴
۲۷ء	۱۸۶۲	۱۸۶۶	۱۸۷۱	۱۸۷۵	۱۸۷۹	۱۸۸۴	۱۸۸۸	۱۸۹۲	۱۸۹۷	۱۹۰۱	۰ ۱ ۱	۲ ۲ ۳	۳ ۳ ۴

ء۲۴۴۵ اور ۳ء۲۴۴۵ کے عکسی لوکارتم دریافت کرو۔
عکسی لوکارتم کے ملحوظ ہندسے اس طرح معلوم ہوتے ہیں:۔ جو سطر ۲۴ء سے شروع ہوتی ہے اس کے متوازی دیکھتے جاؤ جبتک کہ اُس عدد کی نوبت نہ آجائے جس کی سمت راس میں سب سے اوپر ۴ لکھا ہوا ہے یہ عدد ۱۷۵۴ ہے، اسی افقی سطر میں صفحہ کے بائیں طرف عمودی خانوں میں عدد ۵ کے نیچے ۲ لکھا ہوا ہے اس کو ۱۷۵۴ پر زیادہ کرو پس ء۲۴۴۵ کا عکسی لوکارتم ۱ء۷۵۶ ہوا کیونکہ کل ملحوظ ہندسے عدد ۱۷۵۶

میں شامل ہیں اور ممیز صفر سے ظاہر ہے کہ عکسی لوکارتم میں صرف **ایک** صحیح ہندسہ ہے۔

نیز معلوم ہوا کہ ۱۷۵۶ کا لوکارتم ۳،۲۴۴۵ ہے۔

۴۲۱ — لوکارتمی جدولوں کو اس طرح استعمال کیا جاسکتا ہے کہ ممیز دریافت کرنے کے مندرجہ بالا قوانین کی مدد کے بغیر مناسب ممیز معلوم ہوجائے اور ترکیب استعمال سے اس کا پورا پتہ چل جائے۔ جدولوں میں لوکارتم اس طرح لکھے جاتے ہیں کہ ان کا ممیز صفر ہو۔ اس سے ظاہر ہے کہ ہر ایک لوکارتم اس صورت میں ایک ایسے عدد کو تعبیر کرتا ہے جس کی ترکیب میں صرف ایک صحیح ہندسہ شامل ہوتا ہے۔ اب اگر ہم اس کو اپنی **صورت عامہ** مان لیں تو تمام اعداد جن کے لوکارتم مطلوب ہوں ۱۰ کی کسی قوت میں ضرب دینے یا تقسیم کرنے سے اس صورت عامہ کی رقوم میں لائے جاسکتے ہیں۔

مثلاً لوک ۷،۲۵۳ = ۰،۸۶۰۵

لوک ۷۲۵۳ = (۷،۲۵۳ × $۱۰^{۳}$) = ۳+،۸۶۰۵ = ۳،۸۶۰۵

لوک ،۰۰۰۷۲۵۳ = لوک (۷،۲۵۳ × $۱۰^{-۴}$) = ۴-،۸۶۰۵ = $\bar{۴}$،۸۶۰۵

لوکارتمی مثالیں حل کرنے سے پیشتر طالب علم کو لوکارتمی اور عکس لوکارتمی جداول کے استعمال کی زبانی مشق کرنی چاہیئے۔ جدولوں سے دریافت کرو۔

لوک ۶۲۳،۳۷ ، لوک ۶۲۰،۹ ، لوک ،۰۲۷۱ وغیرہ

جدولوں سے وہ عدد دریافت کرو جن کے لوکارتم ہوں۔

۳،۲۳۵ ، ۱،۰۶۷ ، ،۰۸۲۴ ، $\bar{۱}$،۶۲۵۸ وغیرہ

مثال ۱- ایک مکعب کا حجم ۳ مکعب فٹ ۹۰۴ مکعب انچ ہے، اس کے کنارے کی لمبائی دریافت کرو۔

۳ مکعب فٹ، ۹۰۴ مکعب انچ = ۶۰۸۸ مکعب انچ۔

لوک $\sqrt[3]{۶۰۸۸}$ = $\frac{1}{3}$ لوک ۶۰۸۸ = $\frac{۳٫۷۸۴۵}{۳}$ = ۱٫۲۶۱۵

عکس لوکارتمی جدولوں سے معلوم ہوگا کہ ٫۲۶۱ کے مقابل عدد ۱۸۲۴ ہے اور بائیں طرف کے عمودی خانوں سے آخری ۵ کے لئے ۲ زیادہ کرنا چاہئے۔ اس لئے ملحوظ ہندسے مطلوب ۱۸۲۶ ہیں۔

۱٫۲۶۱۲ کے ممیز ایک سے ظاہر ہے کہ عدد مطلوب میں دو صحیح ہندسے ہیں۔

اس لئے عکس لوک ۱٫۲۶۱۵ = ۱۸٫۲۶

$\therefore$ $\sqrt[3]{۶۰۸۸}$ = ۱۸٫۲۶

اس لئے کنارے کی لمبائی ۱ فٹ، ۶٫۲۶ انچ ہے، تھوڑی سی مشق کے بعد صرف یہی لکھنا کافی ہوگا۔

لوک $\sqrt[3]{۶۰۸۸}$ = $\frac{1}{3}$ لوک ۶۰۸۸ = $\frac{۳٫۷۸۴۵}{۳}$

= ۱٫۲۶۱۵ = لوک ۱۸٫۲۶

کنارے کی لمبائی = ۱۸٫۲۶ انچ = ۱ فٹ، ۶٫۲۶ انچ

مثال ۲- (۱ پونڈ، ۳ شلنگ، ۶ پنس) × ٫۷۸۴ کی قیمت دریافت کرو۔

۱ پونڈ، ۳ شلنگ، ۶ پنس = ۱٫۱۷۵ پونڈ

لوک (۱۷۵ء۱ × ۷۸۴ء) = لوک ۱۷۵ء۱ + لوک ۷۸۴ء

= ۰۷۰۱ء۰ + ۸۹۴۳ء آ = ۹۶۴۴ء آ

= لوک ۹۲۱۲ء

اس لئے قیمت مطلوبہ = ۹۲۱۲ء پونڈ = ۱۸ شلنگ، ۵ پنس

مثال ۳ — ۳۷ کا جذر نکالو۔

$\sqrt[8]{37}$ = عکس لوک (لوک $\sqrt[8]{37}$)

= عکس لوک ($\frac{1}{8}$ لوک ۳۷) = عکس لوک ($\frac{1}{8}$ × ۵۶۸۲ء۱) (جدولوں سے)

= عکس لوک (۱۹۶۰۳ء) = ۵۷۴ء۱ (جدولوں سے)

مثال ۴ — معلوم ہے لوک ۳۴۵۰ = ۵۳۷۸ء۳

اور لوک ۳۴۶۰ = ۵۳۹۱ء۳

عکس لوک ۵۳۸۸ء۳ دریافت کرو

عدد مطلوب صریحاً ۳۴۵۰ اور ۳۴۶۰ کے درمیان واقع ہے

فرض کرو کہ یہ ۳۴۵۰ + لا ہے۔

۵۳۹۱ء۳ − ۵۳۷۸ء۳ = ۰۰۱۳ء

۵۳۸۸ء۳ − ۵۳۷۸ء۳ = ۰۰۱۰ء

اس لئے بموجب اصول اجزاء تناسب $\frac{لا}{۱۰}$ = $\frac{۰۰۱۰ء}{۰۰۱۳ء}$ = $\frac{۱۰}{۱۳}$

اور لا = $\frac{۱۰۰}{۱۳}$ = ۸ (قریب ترین صحیح عدد تک)

اس لئے ۳۴۵۸ = عکس لوک ۵۳۸۸ء۳

امثلہ نمبری ۲۹

(ا)

۱- مفصلہ ذیل لوکارثموں کے ممیز صرف دیکھنے سے ہی دریافت کرو-

۲۱۷۳۵، ۲۳٫۸، ۳۵۰، ٫۰۳۵، ٫۲، ٫۸۷، ٫۸۷۵

۲- لوک ۷۶۲۳ کا اعشاریہ لوکارثمی ٫۸۸۲۱۲۵۹ ہے، مفصلہ ذیل اعداد کے لوکارثم لکھو

۷٫۶۲۳، ۷۶۲٫۳، ٫۰۰۷۶۲۳، ۷۶۲۳۰۰، ٫۰۰۰۰۷۶۲۳

۳- جن عددوں کے لوکارثم بالترتیب ۴٫۳۰۱۰۳، ۱۱٫۴۷۷۱۲۱۳، ۳٫۶۹۸۹۷، ۵۶۵۱۵٫ ہیں اُن کے صحیح حصوں میں ہندسوں کی تعداد دریافت کرو-

۴- جن عددوں کے لوکارثم ۲̅٫۷۷۸۱۵۱۳، ٫۶۹۱۰۸۱۵، ۵̅٫۴۸۷۱۳۸۴ ہیں اُن کے پہلے ملحوظ ہندسوں کے مقام دریافت کرو-

معلوم ہے لوک ۲ = ٫۳۰۱۰۳۰۰، لوک ۳ = ٫۴۷۷۱۲۱۳

اور لوک ۷ = ٫۸۴۵۰۹۸۰

مفصلہ ذیل کی قیمتیں دریافت کرو

۵- لوک ۶۴ ۶- لوک ۸۴ ۷- لوک ۱۲۸٫

۸- لوک ٫۱۲۵ ۹- لوک ۱۴٫۴ ۱۰- لوک $\frac{۱}{۴}$۴

۱۱- لوک $\sqrt[3]{12}$ ۱۲- لوک $\sqrt{\frac{35}{27}}$ ۱۳- لوک $\sqrt[4]{.0105}$

۱۴- ۰۰۳۲۴٫ کا ساتواں جذر دریافت کرو

معلوم ہے لوک ۴۴۰۹۲۳۸۸ = ۷٫۶۴۴۳۶۳۶

۱۵- معلوم ہے لوک ۱۹۴٫۸۴۴۵ = ۲٫۲۸۹۶۸۸۴۳

$(39.2)^2$ کا گیارہواں جذر دریافت کرو۔

۱۶- ۳۷٫۲۰۳، ۳٫۷۲۰۳، ۰۰۳۷۲۰۳٫ اور ۳۷۲۰۳۰ کا حاصل ضرب دریافت کرو۔

معلوم ہے لوک ۳۷٫۲۰۳ = ۱٫۵۷۰۵۷۸۰

اور لوک ۱۹۱۵۶۳۱ = ۶٫۲۸۲۳۱۲۰

۱۷- لوک ۲ اور لوک ۳ معلوم ہیں

لوک $\sqrt[3]{\left(\frac{3^2\times5^4}{24}\right)}$ دریافت کرو

۱۸- لوک ۲ اور لوک ۳ معلوم ہیں

لوک $\left(\sqrt[3]{48}\times108^{\frac{1}{4}}\div\sqrt[4]{6}\right)$ دریافت کرو

۱۹- چھ مرتبہ کے اعشاریہ تک $\sqrt[3]{\left(\frac{125\times294}{32\times42}\right)^2}$ کی قیمت دریافت کرو

معلوم ہیں لوک ۲، لوک ۳، لوک ۷،

اور لوک ۹۰۷۶٫۲۲۶ = ۳٫۹۵۷۹۰۵۳

۲۰- چھ مرتبہ کے اعشاریہ تک $(۳۳۰ \div ۴۹)^{۲} \div \sqrt[۳]{۲۲ \times ۷۰}$ کی قیمت دریافت کرو۔

معلوم ہیں لوک ۲، لوک ۳، لوک ۷، نیز لوک ۱۱ = ۱٫۰۴۱۳۹۲۷ اور لوک ۱۷۸۱۴٫۱۵۱۶ = ۴٫۲۵۰۷۶۵۱

۲۱- عدد $۳^{۱۲} \times ۲^{۸}$ میں ہندسوں کی تعداد دریافت کرو

۲۲- ثابت کرو کہ $\left(\frac{۲۱}{۲۰}\right)^{۱۰۰}$ بڑا ہے ۱۰۰ سے۔

۲۳- عدد $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰۰۰}$ میں علامت اعشاریہ اور پہلے ملحوظ ہندسے کے درمیان کل صفروں کی تعداد دریافت کرو

مفصلہ ذیل مساواتوں کو حل کرو معلوم ہیں لوک ۲، لوک ۳ اور لوک ۷

۲۴- $۳^{لا-۲} = ۵$ ۲۵- $۵^{لا} = ۱۰^{۳}$

۲۶- $۲^{۵-۳لا} = ۲^{لا+۲}$ ۲۷- $۲۱^{لا} = ۲^{۲لا+۱} \times ۵^{لا}$

۲۸- $۲^{لا} \times ۶^{لا-۲} = ۵^{۲لا} \times ۷^{۱-لا}$

۲۹- $\begin{cases} ۲^{لا+ما} = ۶^{ما} \\ ۳^{لا} = ۳ \times ۲^{ما+۱} \end{cases}$

۳۰- $۳^{۱-لا-ما} = ۴^{-ما}$

$۲^{۲لا-۱} = ۳^{۳ما-لا}$

۳۱- معلوم ہے لوک$_{۱۰}$ ۲ = ۰٫۳۰۱۰۳، لوک$_{۲۵}$ ۲۰۰ دریافت کرو

۳۲- معلوم ہے لوک$_{۱۰}$ ۲ = ۰٫۳۰۱۰۳ اور لوک$_{۱۰}$ ۷ = ۰٫۸۴۵۰۹، لوک$_{۷}$ $\sqrt[۳]{۲}$ اور لوک$_{\sqrt[۳]{۲}}$ ۷ دریافت کرو،

(ب)

مفصلۂ ذیل اعداد کے عکسی لوکارتم دریافت کرو۔

۱۔ ٫۳۸۵۱ ۲۔ ۱٫۳۸۵۱ ۳۔ ۲٫۳۸۵۱

۴۔ $\bar{۳}$٫۷۸۶۱ ۵۔ ۳٫۸۴۲۳ ۶۔ ۱٫۷۶۲۱

۷۔ ٫۷۴۴۹ ۸۔ ۲٫۹۰۲۲ ۹۔ ٫۹۰۳۲

۱۰۔ $\bar{۳}$٫۸۰۲۱ ۱۱۔ $\bar{۱}$٫۸۵۹۱ ۱۲۔ $\bar{۳}$٫۴۶۲۳

۱۳۔ ۵٫۵۴۰۰ ۱۴۔ ۵٫۹۲۲۸

۱۵۔ مساوات $۳^{لا+۴}$ = ۴۰۵ کو حل کرو۔

۱۶۔ حل کرو $۳^{لا} \times ۲^{ما} = ۱۰۰$ ، $۲^{لا} \times ۳^{ما} = ۵۰$

۱۷۔ $ما = ۲^{لا}$ کا خط منحنی لا = ۰ سے لا = ۶ تک مرتسم کرو اور فصلہ کی اکائی کو ایک انچ اور معین کی اکائی کو $\frac{۱}{۱۰}$ انچ فرض کرو، اِس طرح سے $۲^{۱٫۵}$، $۲^{۳٫۴}$ اور $۲^{۴٫۵}$ کی قیمتیں دریافت کرو، نیز $لوک_{۲}$ ۱۴ اور $لوک_{۲}$ ۲۳ دریافت کرو۔

مفصلۂ ذیل کی تقریبی قیمت چار ہندسوں والے لوکارتمی جدولوں سے دریافت کرو۔

۱۸۔ $\sqrt[۴]{۱۸۴٫۱۲}$ ۱۹۔ $\left\{٫۹۳۷۵ \times (٫۰۱۸)^{\frac{۱}{۷}}\right\}^{\frac{۱}{۱۱}}$

۲۰۔ $\sqrt[۴]{\dfrac{(٫۰۱۸۲)^{\frac{۱}{۳}} \times (۱۵٫۹۲)^{\frac{۱}{۷}}}{۱۹۶^{۵} \times ٫۰۰۵۲۶}}$

۲۱۔ اگر π = ۳٫۱۴۲ تو $\frac{۱}{π}$ کی قیمت دریافت کرو۔

۲۲— تین مرتبہ کے اعشاریہ تک $\frac{۴۷ء۳}{۲۴}$ کی قیمت دریافت کرو۔

۲۳— ۳۴۳۲۱۰۰ء۰ ، ۶ء۱۳۱ اور ۵۱ کا چوتھا تناسب دریافت کرو جس کی قیمت دو ملحوظ ہندسوں تک بالکل درست ہو۔

۲۴— ثابت کرو کہ $\text{لوک}_{ا}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ما}^{\text{ی}}}\right) = \text{لوک}_{ا}\ \text{لا} - \text{ی}$

۲۵— اگر لا = $\text{لوک}_{\text{ب}}$ ا تو $\text{ا}^{\text{ن}}$ کا لوکارتم اساس $\text{ب}^{\text{ن}}$ پر دریافت کرو۔

باب شانزدہم

سلسلۂ قوت نما اور لوکارتمی سلسلے

۲۴۲۔ گزشتہ باب میں ہم نے یہ ذکر کیا تھا کہ مروج لوکارتم براہ راست نہیں نکالے جاتے لیکن پہلے وہ ایک خاص اساس پر نکالے جاتے ہیں اور اس کے بعد اساس دس میں منتقل کردئے جاتے ہیں۔

اس باب میں ہم چند قوانین جبریہ، جن کو قوت نمائی اور لوکارتمی سلسلے کہتے ہیں ثابت کرینگے اور مختصر طور پر یہ بیان کرینگے کہ ان کی مدد سے لوکارتمی جدولیں کس طرح مرتب ہوتی ہیں۔

۲۴۳۔ $ا^{لا}$ کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلاؤ

اگر ن ایک سے بڑا ہو تو مسئلہ ثنائی کی مدد سے

$$\left(1+\frac{1}{ن}\right)^{ن لا} = 1 + ن لا \times \frac{1}{ن} + \frac{ن لا(ن لا-1)}{\underline{|2}} \times \frac{1}{ن^2} + \frac{ن لا(ن لا-1)(ن لا-2)}{\underline{|3}} \times \frac{1}{ن^3} + \ldots\ldots$$

$$= 1 + لا + \frac{لا\left(لا-\frac{1}{ن}\right)}{\underline{|2}} + \frac{لا\left(لا-\frac{1}{ن}\right)\left(لا-\frac{2}{ن}\right)}{\underline{|3}} + \ldots\ldots \quad (1)$$

لا کو ایک کے مساوی رکھنے سے

$$\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = 1+1+\frac{1-\frac{1}{\text{ن}}}{|\underline{2}} + \frac{\left(1-\frac{1}{\text{ن}}\right)\left(1-\frac{2}{\text{ن}}\right)}{|\underline{3}} + \cdots\cdots \quad (2)$$

لیکن $\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن لا}} = \left\{\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}\right\}^{\text{لا}}$

اسلئے معلوم ہوا کہ سلسلہ (۱) سلسلہ (۲) کی لا ویں قوت ہے۔ یعنی

$$1+\text{لا}+\frac{\text{لا}\left(\text{لا}-\frac{1}{\text{ن}}\right)}{|\underline{2}} + \frac{\text{لا}\left(\text{لا}-\frac{1}{\text{ن}}\right)\left(\text{لا}-\frac{2}{\text{ن}}\right)}{|\underline{3}} + \cdots\cdots$$

$$= \left\{1+1+\frac{1-\frac{1}{\text{ن}}}{|\underline{2}} + \frac{\left(1-\frac{1}{\text{ن}}\right)\left(1-\frac{2}{\text{ن}}\right)}{|\underline{3}} + \cdots\cdots\right\}^{\text{لا}}$$

اور یہ درست ہے خواہ ن کی کچھ ہی قیمت ہو، اسلئے اگر ن کو لاانتہا بڑھایا جائے تو

$$1+\text{لا}+\frac{\text{لا}^2}{|\underline{2}}+\frac{\text{لا}^3}{|\underline{3}}+\frac{\text{لا}^4}{|\underline{4}}+\cdots\cdots$$

$$= \left(1+1+\frac{1}{|\underline{2}}+\frac{1}{|\underline{3}}+\frac{1}{|\underline{4}}+\cdots\cdots\right)^{\text{لا}}$$

ہم سلسلہ $1+1+\frac{1}{|\underline{2}}+\frac{1}{|\underline{3}}+\cdots\cdots$ کو قوت نما کے پہلے دو حروف "قو" یا اختصار کی خاطر نقطے گرا کر "و" سے تعبیر کرینگے

اسلئے $\text{و}^{\text{لا}} = 1+\text{لا}+\frac{\text{لا}^2}{|\underline{2}}+\frac{\text{لا}^3}{|\underline{3}}+\cdots\cdots$

لا کی جگہ ج لا لکھنے سے

$$\text{و}^{\text{ج لا}} = \text{۱} + \text{ج لا} + \frac{\text{ج}^{\text{۲}}\text{لا}^{\text{۲}}}{\underline{|\text{۲}}} + \frac{\text{ج}^{\text{۳}}\text{لا}^{\text{۳}}}{\underline{|\text{۳}}} + \ldots\ldots$$

اب فرض کرو کہ $\text{و}^{\text{ج}} = \text{ا}$ اسلئے $\text{ج} = \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ا}$ ، اوپر کے سلسلہ میں ج کی قیمت رکھنے سے

$$\text{ا}^{\text{لا}} = \text{۱} + \text{لا لوک}_{\text{و}}\,\text{ا} + \frac{\text{لا}^{\text{۲}}(\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ا})^{\text{۲}}}{\underline{|\text{۲}}} + \frac{\text{لا}^{\text{۳}}(\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ا})^{\text{۳}}}{\underline{|\text{۳}}} + \ldots\ldots$$

اسکو **مسئلہ قوت نما** کہتے ہیں

نتیجہ صریح۔ جب ن لاانتہا بڑا ہو تو حد $\left(\text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = \text{و}$

نیز جیسے اوپر عمل ہوا اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر ن کو لاانتہا بڑھایا جائے تو

$$\left(\text{۱} + \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = \text{۱} + \text{لا} + \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\underline{|\text{۲}}} + \frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\underline{|\text{۳}}} + \frac{\text{لا}^{\text{۴}}}{\underline{|\text{۴}}} + \ldots\ldots$$

یعنی جب ن غیر متناہی ہو تو حد $\left(\text{۱} + \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = \text{و}^{\text{لا}}$

اگر $\frac{\text{لا}}{\text{ن}}$ کی جگہ $\left(-\frac{\text{۱}}{\text{م}}\right)$ رکھا جائے تو

$$\left(\text{۱} - \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = \left(\text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{م}}\right)^{-\text{م لا}} = \left[\left(\text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{م}}\right)^{\text{م}}\right]^{-\text{لا}}$$

اب م غیر متناہی ہوتا ہے جب ن غیر متناہی ہو

پس حد $\left(\text{۱} - \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = \text{و}^{-\text{لا}}$

اسلئے حد $\left(\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = \text{و}^{-\text{۱}}$

۲۴۴۔ دفعہ گزشتہ میں لا کی قیمت پر کوئی قید نہیں رکھی گئی۔ نیز چونکہ

$\frac{۱}{ن}$ ایک سے کم ہے اسلئے جو تفصیلی صورتیں ہم نے اوپر استعمال کی ہیں اور ان سے جو نتائج اخذ کئے ہیں وہ بلحاظ حسابی قیمت کے درست اور با معنی ہیں

لیکن گزشتہ ثبوت میں ایک بات قابل غور ہے۔ ہم نے یہ مان لیا ہے کہ جب ن غیر متناہی ہو تو

$\frac{لا\left(لا-\frac{۱}{ن}\right)\left(لا-\frac{۲}{ن}\right)\cdots\cdots\left(لا-\frac{ر-۱}{ن}\right)}{\underline{|ر}}$ کی حد ر کی تمام قیمتوں کے لئے

$\frac{لا^{ر}}{\underline{|ر}}$ ہے۔

اگر $\frac{لا\left(لا-\frac{۱}{ن}\right)\left(لا-\frac{۲}{ن}\right)\cdots\cdots\left(لا-\frac{ر-۱}{ن}\right)}{\underline{|ر}}$ کو $ص_{ر}$ سے تعبیر کریں تو

$$\frac{ص_{ر}}{ص_{ر-۱}}=\frac{۱}{ر}\left(لا-\frac{ر-۱}{ن}\right)=\frac{لا}{ر}-\frac{۱}{ن}+\frac{۱}{ن\,ر}$$

چونکہ ن غیر متناہی ہے اسلئے $\frac{ص_{ر}}{ص_{ر-۱}}=\frac{لا}{ر}$ یعنی $ص_{ر}=\frac{لا}{ر}\times ص_{ر-۱}$

ظاہر ہے کہ $ص_{۲}$ کی حد $\frac{لا^{۲}}{\underline{|۲}}$ ہے، اسلئے $ص_{۳}$ کی حد $\frac{لا^{۳}}{\underline{|۳}}$ ہے اور $ص_{۴}$ کی $\frac{لا^{۴}}{\underline{|۴}}$ اور بالعموم $ص_{ر}$ کی $\frac{لا^{ر}}{\underline{|ر}}$۔

۲۴۵۔ مسئلہ قوت نما کا ثبوت (دفعہ ۲۴۳) بعض بعض جگہ ناکمل ہے۔ مفصلہ ذیل قابل ترجیح ہے۔

فرض کرو کہ $ج(م)=۱+\frac{م}{\underline{|۱}}+\frac{م^{۲}}{\underline{|۲}}+\cdots\cdots+\frac{م^{ر}}{\underline{|ر}}+\cdots\cdots$ (۱)

تب $ج(ن)=۱+\frac{ن}{\underline{|۱}}+\frac{ن^{۲}}{\underline{|۲}}+\cdots\cdots+\frac{ن^{ر}}{\underline{|ر}}+\cdots\cdots$ (۲)

بائیں طرف کے دونوں سلسلے م اور ن کی کل محدود قیمتوں کے لئے مستدق ہیں۔ اسلئے حاصل ضرب ج (م) × ج (ن) جملات (۱) اور (۲) کے بائیں طرف کے سلسلوں کو باہم ضرب دینے سے دریافت ہوسکتا ہے۔

اب ان سلسلوں کے حاصل ضرب میں ر درجہ کی ارقام

$$= \frac{\text{م}^{\text{ر}}}{|\underline{\text{ر}}} + \frac{\text{م}^{\text{ر}-1}\,\text{ن}}{|\underline{\text{ر}-1}\;|\underline{1}} + \frac{\text{م}^{\text{ر}-2}\,\text{ن}^{2}}{|\underline{\text{ر}-2}\;|\underline{2}} + \ldots\ldots + \frac{\text{ن}^{\text{ر}}}{|\underline{\text{ر}}}$$

$$= \frac{1}{|\underline{\text{ر}}}\left\{\text{م}^{\text{ر}} + \text{ر}\,\text{م}^{\text{ر}-1}\,\text{ن} + \frac{\text{ر}(\text{ر}-1)}{|\underline{2}}\,\text{م}^{\text{ر}-2}\,\text{ن}^{2} + \ldots\ldots + \text{ن}^{\text{ر}}\right\}$$

$$= \frac{(\text{م}+\text{ن})^{\text{ر}}}{|\underline{\text{ر}}}$$ = ر درجہ کی رقم ج (م + ن) میں

کسی اور درجہ کی رقموں میں بھی اس قسم کا ربط ہوگا اسلئے م اور ن کی سب قیمتوں کے لئے

$$\text{ج}(\text{م}) \times \text{ج}(\text{ن}) = \text{ج}(\text{م}+\text{ن}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۳)$$

اس لئے (۳) کی مدد سے

ج (م) × ج (ن) × ج (ف) = ج (م + ن + ف) اور علیٰ ہذا القیاس

$$\therefore \text{ج}(\text{م}) \times \text{ج}(\text{ن}) \times \text{ج}(\text{ف}) \ldots\ldots = \text{ج}(\text{م}+\text{ن}+\text{ف}\ldots\ldots) \ldots\ldots (۴)$$

نیز (۴) سے

ج (۱) × ج (۱) ج (۱) × ...... لا اجزاء ضربی تک = ج (۱ + ۱ + ۱ + ... لا رقموں تک)

یعنی $\{\text{ج}(1)\}^{\text{لا}} = \text{ج}(\text{لا})$

جہاں لا مثبت صحیح ہے۔

نیز ج (۱) = ۱ + ۱ + $\frac{۱}{\lfloor ۲}$ + $\frac{۱}{\lfloor ۳}$ + ... ∞ تک

ہم ابھی ثابت کریں گے کہ ج (۱) عدد غیر ناطق ۲٫۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹ ہے
اسکو "قو" یا اختصاراً "و" سے تعبیر کرو، اس لئے اگر لا مثبت صحیح عدد ہو تو

$و^{لا}$ = ج (لا) = ۱ + $\frac{لا}{\lfloor ۱}$ + $\frac{لا^{۲}}{\lfloor ۲}$ + $\frac{لا^{۳}}{\lfloor ۳}$ + ...

اس سے مسئلہ مثبت صحیح قوت نما کی صورت میں ثابت ہوا
اگر قوت نما ایک مثبت کسر ہو تو اس صورت میں فرض کرو کہ لا = $\frac{ھ}{ک}$
جہاں ھ اور ک دونوں مثبت صحیح عدد ہیں۔

تب $\{$ج (لا)$\}^{ک}$ = $\{$ج ($\frac{ھ}{ک}$)$\}^{ک}$ = ج ($\frac{ھ}{ک}$) × ج ($\frac{ھ}{ک}$) × ...... ک اجزاء ضربی تک

= ج ($\frac{ھ}{ک}$ + $\frac{ھ}{ک}$ + $\frac{ھ}{ک}$ + ... ک ضربی تک)

= ج (ھ) = $و^{ھ}$

طرفین کا ک واں جذر لینے سے

ج (لا) = $و^{\frac{ھ}{ک}}$ = $و^{لا}$

اسلئے $و^{لا}$ = ۱ + $\frac{لا}{\lfloor ۱}$ + $\frac{لا^{۲}}{\lfloor ۲}$ + ...

اخیر میں اگر لا منفی ہو تو فرض کرو کہ لا = − ما جہاں ما مثبت ہے
نتیجہ (۳) سے ہم دیکھتے ہیں کہ

ج (− ما) × ج (ما) = ج (− ما + ما) = ج (۰) = ۱

اس لئے ج (ـ ما) = $\frac{۱}{\text{ج (ما)}}$ = $\frac{۱}{\text{و}^{\text{ما}}}$ = و$^{-\text{ما}}$

یعنی و$^{\text{لا}}$ = ج (لا) = ۱ + $\frac{\text{لا}}{\lfloor ۱}$ + $\frac{\text{لا}^۲}{\lfloor ۲}$ + ... لا کی منفی قیموں کے لئے

نتیجہ صریح۔ فرض کرو کہ و$^{\text{ا}}$ = ا$^{\text{لا}}$ تب طرفین کا لوکارتم اساس و پر لینے سے ما = لا لوک$_{\text{و}}$ ا

اسلئے ا$^{\text{لا}}$ = و$^{\text{لا لوک}_\text{و} \text{ا}}$ = ۱ + $\frac{\text{لا لوک}_\text{و} \text{ا}}{\lfloor ۱}$ + $\frac{\text{لا}^۲ (\text{لوک}_\text{و} \text{ا})^۲}{\lfloor ۲}$ + ...

۴۴۶۔ لا کی کل محدود قیمتوں کے لئے و$^{\text{لا}}$ کی صورت تفصیلی متدق ہے

اگر ص$_{\text{ر}}$ سے ر ویں رقم تعبیر کیجاوے تو

$$\frac{\text{ص}_{\text{ن}+۱}}{\text{ص}_{\text{ن}}} = \frac{\text{لا}^{\text{ن}+۱}}{\lfloor \text{ن}+۱} \times \frac{\lfloor \text{ن}}{\text{لا}^{\text{ن}}} = \frac{\text{لا}}{\text{ن}}$$

اب رقم اول کے بعد کل ارقام کے لئے جن میں ن تعداداً لا سے بڑا ہو جاتا ہے یہ نسبت ایک سے کم ہے۔

اس سے معلوم ہوا کہ سلسلہ متدق ہے۔

۴۴۷۔ سلسلہ جو **و** سے تعبیر ہوتا ہے متدق ہے اور اس کی قیمت کا اندازہ چند مرتبہ کے اعشاریہ تک بآسانی ہوسکتا ہے۔ یہ حساب لگانا آسان ہے کیونکہ (ن + ۱) ویں رقم ن ویں رقم کو ن پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

پہلی رقم	=	۱
دوسری رقم	=	۱
تیسری رقم = دوسری رقم ÷ ۲	=	۰٫۵

چوتھی رقم = تیسری رقم ÷ ۳ = ...۰٫۱۶۶۶۶۶۶

پانچویں رقم = چوتھی رقم ÷ ۴ = ...۰٫۰۴۱۶۶۶۶

چھٹی رقم = پانچویں رقم ÷ ۵ = ...۰٫۰۰۸۳۳۳۳

ساتویں رقم = چھٹی رقم ÷ ۶ = ...۰٫۰۰۱۳۸۸۸

آٹھویں رقم = ساتویں رقم ÷ ۷ = ...۰٫۰۰۰۱۹۸۴

نویں رقم = ...۰٫۰۰۰۰۲۴۸

دسویں رقم = ...۰٫۰۰۰۰۰۲۷

گیارہویں رقم = ...۰٫۰۰۰۰۰۰۲

اسلئے جمع کرنے سے و = ...۲٫۷۱۸۲۸

مقدار و بڑی کارآمد ہے۔ اس کو اساس مقرر کرنے سے اعداد کے لوکارثموں کا سلسلوں کے ذریعہ سے حساب لگ سکتا ہے اور اسکے بعدیہ لوکارثم مروج لوکارثموں میں تبدیل ہو سکتے ہیں، جو لوکارثم اساس و پر نکالے جائیں ان کو نیپیری لوکارثم کہتے ہیں کیونکہ ان کو نیپیر نے ایجاد کیا تھا۔ نیز اُن کو طبعی لوکارثم بھی کہتے ہیں کیونکہ تحقیقات جبریہ میں سب سے اول اسی قسم کے لوکارثم قدرتی طور پر ذہن میں آتے ہیں۔

آیندہ یاد رہے کہ جب لوکارثم نظریات میں استعمال کئے جائیں تو ہمیشہ اساس و محذوف ہوتا ہے، اسی طرح عملی حسابات میں ہمیشہ اساس ۱۰ استعمال کرتے ہیں

مثال ۱۔ سلسلہ غیر متناہی $1 + \frac{1}{|\underline{2}} + \frac{1}{|\underline{4}} + \frac{1}{|\underline{6}} + \dots\dots$ کا مجموعہ دریافت کرو۔

ہمیں معلوم ہے کہ $و = ۱ + ۱ + \frac{۱}{\lfloor ۲} + \frac{۱}{\lfloor ۳} + \frac{۱}{\lfloor ۴} + \cdots\cdots$

اور $و^{لا}$ کی صورت تفصیلی میں لا کو ۱- کے مساوی رکھنے سے

$$و^{-۱} = ۱ - ۱ + \frac{۱}{\lfloor ۲} - \frac{۱}{\lfloor ۳} + \frac{۱}{\lfloor ۴} - \cdots\cdots$$

اسلئے $و + و^{-۱} = ۲\left(۱ + \frac{۱}{\lfloor ۲} + \frac{۱}{\lfloor ۴} + \frac{۱}{\lfloor ۶} + \cdots\cdots\right)$

اسلئے مجموعہ سلسلہ مجوزہ $= \frac{۱}{۲}\left(و + و^{-۱}\right)$

مثال ۲- $\frac{۱ - ا\,لا - لا^{۲}}{و^{لا}}$ کی صورت تفصیلی میں $لا^{ر}$ کا سر دریافت کرو

$$\frac{۱ - ا\,لا - لا^{۲}}{و^{لا}} = (۱ - ا\,لا - لا^{۲})\,و^{-لا}$$

$$= (۱ - ا\,لا - لا^{۲})\left\{۱ - لا + \frac{لا^{۲}}{\lfloor ۲} - \frac{لا^{۳}}{\lfloor ۳} + \cdots\cdots + \frac{(-۱)^{ر}\,لا^{ر}}{\lfloor ر} + \cdots\cdots\right\}$$

سر مطلوب $= \frac{(-۱)^{ر}}{\lfloor ر} - \frac{ا\,(-۱)^{ر-۱}}{\lfloor ر-۱} - \frac{(-۱)^{ر-۲}}{\lfloor ر-۲}$

$$= \frac{(-۱)^{ر}}{\lfloor ر}\left\{۱ + ا\,ر - ر(ر-۱)\right\}$$

۲۴۸- $لوک_{و}(۱+لا)$ کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلاؤ۔

بموجب دفعہ ۲۴۳

$$ا^{ما} = ۱ + ما\,لوک_{و}\,ا + \frac{ما^{۲}(لوک_{و}\,ا)^{۲}}{\lfloor ۲} + \frac{ما^{۳}(لوک_{و}\,ا)^{۳}}{\lfloor ۳} + \cdots\cdots$$

اس سلسلہ میں ا کی جگہ ۱ + لا رکھنے سے

$$(\text{۱}+\text{لا})^{\text{ما}} = \text{۱} + \text{ما لوک}_{\text{و}}(\text{۱}+\text{لا}) + \frac{\text{ما}^{\text{۲}}\{\text{لوک}_{\text{و}}(\text{۱}+\text{لا})\}^{\text{۲}}}{\lfloor\text{۲}} + \frac{\text{ما}^{\text{۳}}\{\text{لوک}_{\text{و}}(\text{۱}+\text{لا})\}^{\text{۳}}}{\lfloor\text{۳}} + \ldots\ldots \quad (\text{۱})$$

نیز مسئلہ ثنائی کی مدد سے اگر لا < ۱ تو

$$(\text{۱}+\text{لا})^{\text{ما}} = \text{۱} + \text{ما لا} + \frac{\text{ما}(\text{ما}-\text{۱})}{\lfloor\text{۲}}\text{لا}^{\text{۲}} + \frac{\text{ما}(\text{ما}-\text{۱})(\text{ما}-\text{۲})}{\lfloor\text{۳}}\text{لا}^{\text{۳}} + \ldots\ldots \quad (\text{۲})$$

اب (۲) میں ما کا سر ہے

$$\text{لا} + \frac{(-\text{۱})}{\text{۲}\times\text{۱}}\text{لا}^{\text{۲}} + \frac{(-\text{۱})(-\text{۲})}{\text{۳}\times\text{۲}\times\text{۱}}\text{لا}^{\text{۳}} + \frac{(-\text{۱})(-\text{۲})(-\text{۳})}{\text{۴}\times\text{۳}\times\text{۲}\times\text{۱}}\text{لا}^{\text{۴}} + \ldots\ldots$$

یعنی $\text{لا} - \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{۲}} + \frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\text{۳}} - \frac{\text{لا}^{\text{۴}}}{\text{۴}} + \ldots\ldots$

اس کو مساوات (۱) میں جو ما کا سر ہے اُسکے مساوی رکھنے سے

$$\text{لوک}_{\text{و}}(\text{۱}+\text{لا}) = \text{لا} - \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{۲}} + \frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\text{۳}} - \frac{\text{لا}^{\text{۴}}}{\text{۴}} + \ldots\ldots \quad (\text{۳})$$

اس کو لوکارثمی سلسلہ کہتے ہیں

اگر سلسلہ (۳) میں $\text{صد}_{\text{ر}}$ سے ر ویں رقم تعبیر کریں تو $\frac{\text{صد}_{\text{ن}}}{\text{صد}_{\text{ن}-\text{۱}}} = \frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{ن}}\text{لا}$ (تعداداً) جس کی حد جب ن غیر متناہی ہو لا ہوگی۔ اسلئے اگر لا ایک سے کم ہو تو سلسلہ متدق ہوگا

اگر لا = ۱ تو سلسلہ کی صورت ہوگی

$$\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}} - \frac{\text{۱}}{\text{۴}} + \ldots\ldots$$

اور یہ سلسلہ متدق ہے۔

اگر لا = −۱ تو سلسلہ کی صورت ہوگی

$-۱-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}-\ldots\ldots$

اور یہ سلسلہ متبع ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ صفر کا لوکارتم غیر متناہی اور منفی ہوتا ہے۔ اور یہی نتیجہ مساوات $و^{-\infty}=۰$ سے بھی ظاہر ہے

مثال۔ اگر $لا<۱$ تو $\{لوک_{و}(۱+لا)\}^{۲}$ کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلاؤ۔

مندرجہ بالا نتائج (۱) اور (۲) میں $ما^{۲}$ کے سروں کو باہم مساوی رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مطلوبہ صورت تفصیلی

جملہ $\frac{ما(ما-۱)}{۲\times۱}لا^{۲}+\frac{ما(ما-۱)(ما-۲)}{۳\times۲\times۱}لا^{۳}+\frac{ما(ما-۱)(ما-۲)(ما-۳)}{۴\times۳\times۲\times۱}لا^{۴}+\ldots\ldots$

میں $ما^{۲}$ کے سر کی دو چند ہے۔

یعنی جملہ $\frac{(ما-۱)}{۲\times۱}لا^{۲}+\frac{(ما-۱)(ما-۲)}{۳\times۲\times۱}لا^{۳}+\frac{(ما-۱)(ما-۲)(ما-۳)}{۴\times۳\times۲\times۱}لا^{۴}+\ldots\ldots$

میں ما کے سر کی دو چند ہے۔

پس $\{لوک_{و}(۱+لا)\}^{۲}=۲\left\{\frac{۱}{۲}لا^{۲}-\frac{۱}{۳}(۱+\frac{۱}{۲})لا^{۳}+\frac{۱}{۴}(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳})لا^{۴}-\ldots\right\}$

۲۴۹۔ سوائے اس صورت کے جب لا بے انتہا چھوٹا ہو $لوک_{و}(۱+لا)$ کی صورت تفصیلی عملی حسابات میں اتنی مفید ثابت نہیں ہوتی لیکن اس سے اور سلسلے حاصل ہوتے ہیں جن کی مدد سے لوکارتمی جدولیں بآسانی مرتب ہو سکتی ہیں۔

لا کی جگہ $\frac{۱}{ن}$ لکھنے سے ہمیں $لوک_{و}\frac{ن+۱}{ن}$ کی صورت تفصیلی

حاصل ہوگی اسلئے

$$\text{لوک}_{\text{و}}(\text{ن}+۱)-\text{لوک}_{\text{و}}\text{ن}=\frac{۱}{\text{ن}}-\frac{۱}{۲\text{ن}^{۲}}+\frac{۱}{۳\text{ن}^{۳}}-\ldots\ldots(۱)$$

لا کی جگہ $\left(-\frac{۱}{\text{ن}}\right)$ لکھنے سے ہمیں $\text{لوک}_{\text{و}}\frac{\text{ن}-۱}{\text{ن}}$ حاصل ہوگا اس لئے مساوات کے دونوں طرف علامات بدل دینے سے

$$\text{لوک}_{\text{و}}\text{ن}-\text{لوک}_{\text{و}}(\text{ن}-۱)=\frac{۱}{\text{ن}}+\frac{۱}{۲\text{ن}^{۲}}+\frac{۱}{۳\text{ن}^{۳}}+\ldots\ldots(۲)$$

(۱) اور (۲) کو جمع کرنے سے

$$\text{لوک}_{\text{و}}(\text{ن}+۱)-\text{لوک}_{\text{و}}(\text{ن}-۱)=۲\left(\frac{۱}{\text{ن}}+\frac{۱}{۳\text{ن}^{۳}}+\frac{۱}{۵\text{ن}^{۵}}+\ldots\right)\ldots(۳)$$

مساوات (۳) میں فرض کرو کہ ن = ۳، اس طرح سے حاصل ہوگا $\text{لوک}_{\text{و}}۴-\text{لوک}_{\text{و}}۲$ یعنی $\text{لوک}_{\text{و}}۲$ اور حساب لگانے سے معلوم ہوگا کہ $\text{لوک}_{\text{و}}۲$ = ۶۹۳۱۴۷۱۸،...، جس سے $\text{لوک}_{\text{و}}۸$ معلوم ہوسکتا ہے۔ نیز فرض کرو کہ ن = ۹ ہمیں حاصل ہوگا $\text{لوک}_{\text{و}}۱۰-\text{لوک}_{\text{و}}۸$ جس سے

$\text{لوک}_{\text{و}}۱۰$ = ... ۲،۳۰۲۵۸۵۰۹

نیپیری لوکارتموں کو عشری لوکارتموں میں منتقل کرنے کے لئے ہمیں اول الذکر کو $\frac{۱}{\text{لوک}_{\text{و}}۱۰}$ سے ضرب دینی پڑتی ہے، $\frac{۱}{\text{لوک}_{\text{و}}۱۰}$ مروج لوکارتم کا مقیاس یا مضروب معین کہلاتا ہے اور اس کی قیمت $\frac{۱}{۲،۳۰۲۵۸۵۰۹\ldots}$ یا ...... ۴۳۴۲۹۴۴۸،ہے ہم اس مضروب کو "مب" سے تعبیر کریں گے۔

۲۵۰- اگر ہم مندرجہ بالا سلسلوں کو مب سے ضرب دیں تو

ہمیں ایسے قوانین حاصل ہونگے جو مروج لوکارتموں کے حساب لگانے میں نہایت موزوں ثابت ہوتے ہیں

مثلاً (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{مب لوک}_{\text{و}}(\text{ن}+۱) - \text{مب لوک}_{\text{و}}\,\text{ن} = \frac{\text{مب}}{\text{ن}} - \frac{\text{مب}}{۲\text{ن}^۲} + \frac{\text{مب}}{۳\text{ن}^۳} - \cdots$$

$$\text{یعنی لوک}_{۱۰}(\text{ن}+۱) - \text{لوک}_{۱۰}\,\text{ن} = \frac{\text{مب}}{\text{ن}} - \frac{\text{مب}}{۲\text{ن}^۲} + \frac{\text{مب}}{۳\text{ن}^۳} - \cdots\cdots (۱)$$

اسی طرح (۲) سے

$$\text{لوک}_{۱۰}\,\text{ن} - \text{لوک}_{۱۰}(\text{ن}-۱) = \frac{\text{مب}}{\text{ن}} + \frac{\text{مب}}{۲\text{ن}^۲} + \frac{\text{مب}}{۳\text{ن}^۳} + \cdots\cdots (۲)$$

اوپر کے نتائج سے ظاہر ہے کہ اگر دو متصل اعداد میں سے کسی ایک کا لوکارتم معلوم ہو تو دوسرے کا لوکارتم معلوم ہو سکتا ہے۔ اور اس طرح سے ایک لوکارتمی جدول مرتب ہو سکتی ہے۔

ظاہر ہے کہ اوپر کے قوانین کی ضرورت صرف مفرد اعداد کے لوکارتم نکالنے میں پڑتی ہے کیونکہ مرکب اعداد کے لوکارتم انکے اجزاء ضربی کے لوکارتموں کو اکٹھا جمع کرنے سے حاصل ہو سکتے ہیں۔ اگر کسی چھوٹے عدد مفرد کا لوکارتم نکالنا منظور ہو تو ہمیں براہ راست اس عدد کو ضابطہ (۱) یا (۲) میں نہیں رکھ دینا چاہیئے بلکہ ن کی ایک ایسی قیمت معلوم کرنے کی کوشش کرنی چاہیئے جس سے عمل تقسیم میں آسانی ہو اور علاوہ اس کے وہ قیمت ایسی ہو کہ چھوٹا عدد مفرد بطور جزء ضربی کے ن+۱ یا ن-۱ میں شامل ہو۔ اس طرح سے ہم لوک(ن+۱) یا لوک (ن-۱) دریافت کر سکتے ہیں اور اس سے عدد معلوم کا

لوکارتم حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال۔ معلوم ہے مب = ۴۳۴۲۹۴۴۸ء معلوم کرو لوک ۲ اور لوک ۳،
ضابطہ (۲) میں رکھو ن = ۱۰ اس سے ہمیں لوک ۱۰ - لوک ۹ کی قیمت حاصل ہوگی پس

۱ - ۲ لوک ۳ = ۰۴۳۴۲۹۴۴۸ء + ۰۰۲۱۷۱۴۷۲ء

+ ۰۰۰۱۴۴۷۶۵ء + ۰۰۰۰۱۰۸۵۷ء

+ ۰۰۰۰۰۰۸۶۸ء + ۰۰۰۰۰۰۰۷۲ء

+ ۰۰۰۰۰۰۰۰۶ء

۱ - ۲ لوک ۳ = ۰۴۵۷۵۷۴۸۸ء

لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۲۵۶ء

(۱) میں رکھو ن = ۸۰ تو حاصل ہوگا لوک ۸۱ - لوک ۸۰ پس

۴ لوک ۳ - ۳ لوک ۲ - ۱ = ۰۰۵۴۲۸۶۸۱ء - ۰۰۰۰۳۳۹۲۹ء

+ ۰۰۰۰۰۰۲۸۳ء - ۰۰۰۰۰۰۰۰۳ء

۳ لوک ۲ = ۹۰۸۴۸۵۰۲۴ء - ۰۰۵۳۹۵۰۳۲ء

لوک ۲ = ۳۰۱۰۲۹۹۹۷ء

اگلی دفعہ میں لوک و (ن + ۱) - لوک و ن کے لئے ہم ایک اور سلسلہ دریافت کریں گے جو لوکارتمی جدولوں کے مرتب کرنے میں بعض اوقات مفید ثابت ہوتا ہے۔

۲۵۱۔ دفعہ ۲۴۸ میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ

لوک و (۱ + لا) = لا − $\frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{۲}}$ + $\frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\text{۳}}$ − $\frac{\text{لا}^{\text{۴}}}{\text{۴}}$ + ...

لا کو (−لا) میں تبدیل کرنے سے

$\text{لوک}_{\text{و}}(\text{۱} - \text{لا}) = -\text{لا} - \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{۲}} - \frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\text{۳}} - \frac{\text{لا}^{\text{۴}}}{\text{۴}} - \ldots\ldots$

عمل تفریق سے

$\text{لوک}_{\text{و}}\frac{\text{۱}+\text{لا}}{\text{۱}-\text{لا}} = \text{۲}\left(\text{لا} + \frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\text{۳}} + \frac{\text{لا}^{\text{۵}}}{\text{۵}} + \ldots\ldots\right)$

فرض کرو کہ $\frac{\text{۱}+\text{لا}}{\text{۱}-\text{لا}} = \frac{\text{ن}+\text{۱}}{\text{ن}}$ جس سے $\text{لا} = \frac{\text{۱}}{\text{۲ن}+\text{۱}}$ اس طرح سے حاصل ہوگا

$\text{لوک}_{\text{و}}(\text{ن}+\text{۱}) - \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ن} = \text{۲}\left\{\frac{\text{۱}}{\text{۲ن}+\text{۱}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}(\text{۲ن}+\text{۱})^{\text{۳}}} + \frac{\text{۱}}{\text{۵}(\text{۲ن}+\text{۱})^{\text{۵}}} + \ldots\ldots\right\}$

نوٹ۔ اس سلسلہ کی رقمیں بڑی سرعت سے کم ہوتی ہیں لیکن بمقابلہ سلسلہ ہائے دفعہ ۲۴۹ عملی حسابات میں یہ سلسلہ اتنا مفید ثابت نہیں ہوتا۔

۲۵۲۔ مندرجہ ذیل مثالیں اس باب کے مضمون کی توضیح کے لئے حل کی گئی ہیں۔

مثال ۱۔ سلسلہ $\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{۳}\,\underline{|\text{۱}}} + \frac{\text{۱}}{\text{۹}\,\underline{|\text{۲}}} - \frac{\text{۱}}{\text{۲۷}\,\underline{|\text{۳}}} + \frac{\text{۱}}{\text{۸۱}\,\underline{|\text{۴}}} - \ldots\ldots$ کو مختصر کرو۔

ظاہر ہے کہ سلسلہ مجوزہ $\text{و}^{\text{لا}}$ کی صورت تفصیلی ہے جبکہ $\text{لا} = -\frac{\text{۱}}{\text{۳}}$

اسلئے سلسلہ $= \text{و}^{-\frac{\text{۱}}{\text{۳}}}$

مثال ۲۔ ایک سلسلہ غیر متناہی کی ن ویں رقم $\frac{\text{ن}^{\text{۳}}}{\underline{|\text{ن}}}$ ہے اس کا مجموعہ دریافت کرو۔

$\text{ن ویں رقم} = \frac{\text{ن}^{\text{۳}}}{\underline{|\text{ن}}} = \frac{\text{ن}^{\text{۲}}}{\underline{|\text{ن}-\text{۱}}} = \frac{\text{۱}}{\underline{|\text{ن}-\text{۱}}} + \frac{\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۱}}{\underline{|\text{ن}-\text{۱}}}$

$$= \frac{۱}{\lfloor ن-۱} + \frac{ن+۱}{\lfloor ن-۲} = \frac{۱}{\lfloor ن-۱} + \frac{۳}{\lfloor ن-۲} + \frac{ن-۲}{\lfloor ن-۲}$$

$$= \frac{۱}{\lfloor ن-۱} + \frac{۳}{\lfloor ن-۲} + \frac{۱}{\lfloor ن-۳}$$

(ن − ۱) ویں رقم $= \frac{۱}{\lfloor ن-۲} + \frac{۳}{\lfloor ن-۳} + \frac{۱}{\lfloor ن-۴}$

....

چوتھی رقم $= \frac{۱}{\lfloor ۳} + \frac{۳}{\lfloor ۲} + \frac{۱}{\lfloor ۱}$

تیسری رقم $= \frac{۱}{\lfloor ۲} + \frac{۳}{\lfloor ۱} + ۱$

دوسری رقم $= \frac{۱}{\lfloor ۱} + ۳$

پہلی رقم $= ۱$

عمودی سطروں کو جمع کرنے اور ن کو لا انتہا بڑھانے سے

سلسلہ = و + ۳ و + و = ۵ و

مثال ۳۔ اگر عہ اور بہ مساوات $ا لا^۲ + ب لا + ج = ۰$ کی قیمتیں ہوں۔ تو ثابت کرو کہ

$$لوک (ا - ب لا + ج لا^۲) = لوک ا + (عہ + بہ) لا - \frac{عہ^۲ + بہ^۲}{۲} لا^۲ + \frac{عہ^۳ + بہ^۳}{۳} لا^۳ + \ldots$$

چونکہ $عہ + بہ = - \frac{ب}{ا}$ ، $عہ بہ = \frac{ج}{ا}$ اس لئے

$$ا - ب لا + ج لا^۲ = ا \{ ۱ + (عہ + بہ) لا + عہ بہ لا^۲ \} = ا (۱ + عہ لا)(۱ + بہ لا)$$

$$\therefore \text{لوک}(ا - ب\,لا + ج\,لا^{۲}) = \text{لوک}\,ا + \text{لوک}(ا + عہ\,لا) + \text{لوک}(ا + بہ\,لا)$$

$$= \text{لوک}\,ا + عہ\,لا - \frac{عہ^{۲}لا^{۲}}{۲} + \frac{عہ^{۳}لا^{۳}}{۳} - \cdots + بہ\,لا - \frac{بہ^{۲}لا^{۲}}{۲} + \frac{بہ^{۳}لا^{۳}}{۳} - \cdots$$

$$= \text{لوک}\,ا + (عہ + بہ)لا - \frac{عہ^{۲} + بہ^{۲}}{۲}لا^{۲} + \frac{عہ^{۳} + بہ^{۳}}{۳}لا^{۳} - \cdots$$

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ لوک $(ا + لا + لا^{۲})$ کی صورت تفصیلی میں $لا^{ن}$ کا سر $\left(-\frac{۲}{ن}\right)$ ہے اگر ن تین کا ضعف ہو اور $لا^{ن}$ کا سر $\frac{۱}{ن}$ ہے اگر ن تین کا ضعف نہ ہو۔

$$\text{لوک}(ا + لا + لا^{۲}) = \text{لوک}\,\frac{ا - لا^{۳}}{ا - لا} = \text{لوک}(ا - لا^{۳}) - \text{لوک}(ا - لا)$$

$$= -لا^{۳} - \frac{لا^{۶}}{۲} - \frac{لا^{۹}}{۳} - \cdots - \frac{لا^{۳ر}}{ر} - \cdots$$

$$+ \left(لا + \frac{لا^{۲}}{۲} + \frac{لا^{۳}}{۳} + \cdots + \frac{لا^{ر}}{ر} + \cdots\right)$$

اگر ن تین کا ضعف ہو تو اسے ۳ر سے تعبیر کرو، اس صورت میں پہلے سلسلے سے $لا^{ن}$ کا سر $\left(-\frac{۱}{ر}\right)$ ہوگا اور دوسرے سلسلے سے $\frac{۱}{۳ر}$ یعنی سر مطلوب $-\frac{۳}{ن} + \frac{۱}{ن}$ یعنی $-\frac{۲}{ن}$ ہوگا۔

اگر ن تین کا ضعف نہ ہو تو پہلے سلسلے میں $لا^{ن}$ واقع نہیں ہوگا اس لئے اس صورت میں سر مطلوب $\frac{۱}{ن}$ ہوگا۔

۲۵۳۔ ثابت کرو کہ و مقدار متبائن ہے

اگر و متبائن نہ ہو تو بشرط امکان فرض کرو کہ $و = \frac{م}{ن}$ جہاں م

اور ن مثبت صحیح عدد ہیں

تب $\frac{م}{ن} = ۱ + ۱ + \frac{۱}{|۲} + \frac{۱}{|۳} + \cdots + \frac{۱}{|ن} + \frac{۱}{|ن+۱} + \cdots$

طرفین کو $|ن$ میں ضرب دینے سے

$م\,|ن-۱ = \text{ایک صحیح عدد} + \frac{۱}{ن+۱} + \frac{۱}{(ن+۱)(ن+۲)}$

$+ \frac{۱}{(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)} + \cdots$

لیکن $\frac{۱}{ن+۱} + \frac{۱}{(ن+۱)(ن+۲)} + \frac{۱}{(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)} + \cdots$

ایک کسر واجب ہے کیونکہ یہ $\frac{۱}{ن+۱}$ سے بڑی ہے اور سلسلہ ہندسیہ

$\frac{۱}{ن+۱} + \frac{۱}{(ن+۱)^۲} + \frac{۱}{(ن+۱)^۳} + \cdots$

یعنی $\frac{۱}{ن}$ سے چھوٹی ہے اسلئے ایک صحیح عدد ایک صحیح اور کسر کے حاصل جمع کے برابر ہوا جو کہ باطل ہے ۔ پس معلوم ہوا کہ و مقدار متباین ہے

امثلہ نمبری ۳۰

۱۔ ثابت کرو کہ $\left\{۱ + \frac{۱}{|۱} + \frac{۱}{|۲} + \frac{۱}{|۳} + \cdots\right\}\left\{۱ - \frac{۱}{|۱} + \frac{۱}{|۲} - \frac{۱}{|۳} + \cdots\right\} = ۱$

۲۔ سلسلہ $۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۶} + \cdots$ کی قیمت دریافت کرو

۳۔ $\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲ \times ۲^۲} + \frac{۱}{۳ \times ۲^۳} - \frac{۱}{۴ \times ۲^۴} + \frac{۱}{۵ \times ۲^۵} - \cdots$ کی قیمت دریافت کرو

۴۔ ثابت کرو کہ

$$\text{لوک}_{\text{و}}(\text{ن}+\text{ا}) - \text{لوک}_{\text{و}}(\text{ن}-\text{ا}) = ۲\left(\frac{\text{ا}}{\text{ن}} + \frac{\text{ا}^{۳}}{۳\text{ن}^{۳}} + \frac{\text{ا}^{۵}}{۵\text{ن}^{۵}} + \ldots\ldots\right)$$

۵- اگر $\text{ما} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^{۲}}{۲} + \frac{\text{لا}^{۳}}{۳} - \frac{\text{لا}^{۴}}{۴} + \ldots\ldots$

تو ثابت کرو کہ $\text{لا} = \text{ما} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\lfloor ۲} + \frac{\text{ما}^{۳}}{\lfloor ۳} + \ldots\ldots$

۶- ثابت کرو کہ $\frac{\text{ا}-\text{ب}}{\text{ا}} + \frac{۱}{۲}\left(\frac{\text{ا}-\text{ب}}{\text{ا}}\right)^{۲} + \frac{۱}{۳}\left(\frac{\text{ا}-\text{ب}}{\text{ا}}\right)^{۳} + \ldots\ldots$

$= \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ا} - \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ب}$

۷- سولہ مرتبہ کے اعشاریہ تک $\frac{۱۰۰۱}{۹۹۹}$ کا نیپری لوکارتم دریافت کرو

۸- ثابت کرو کہ $\text{و}^{-۱} = ۲\left(\frac{۱}{\lfloor ۳} + \frac{۲}{\lfloor ۵} + \frac{۳}{\lfloor ۷} + \ldots\ldots\right)$

۹- ثابت کرو کہ

$$\text{لوک}_{\text{و}}(۱+\text{لا})^{۱+\text{لا}}(۱-\text{لا})^{۱-\text{لا}} = ۲\left(\frac{\text{لا}^{۲}}{۲\times۱} + \frac{\text{لا}^{۴}}{۴\times۳} + \frac{\text{لا}^{۶}}{۶\times۵} + \ldots\ldots\right)$$

۱۰- $\text{لا}^{۲} - \text{ما}^{۲} + \frac{۱}{\lfloor ۲}(\text{لا}^{۴} - \text{ما}^{۴}) + \frac{۱}{\lfloor ۳}(\text{لا}^{۶} - \text{ما}^{۶}) + \ldots\ldots$ کی قیمت دریافت کرو

۱۱- ۷، ۱۱، ۱۳ کے مروج لوکارتموں کی عددی قیمتیں دریافت کرو
معلوم ہے مب = ۰.۴۳۴۲۹۴۴۸ء اور لوک ۲ = ۰.۳۰۱۰۳۰۰ء

۱۲- ثابت کرو کہ اگر ا لا اور $\frac{\text{ا}}{\text{لا}}$ دونوں ایک سے کم ہوں تو

$$\text{ا}\left(\text{لا}^{۲} + \frac{۱}{\text{لا}^{۲}}\right) - \frac{\text{ا}^{۲}}{۲}\left(\text{لا}^{۴} + \frac{۱}{\text{لا}^{۴}}\right) + \frac{\text{ا}^{۳}}{۳}\left(\text{لا}^{۶} + \frac{۱}{\text{لا}^{۶}}\right) - \ldots\ldots$$

$$= \text{لوک}_{\text{و}}\left(۱ + \text{ا}\,\text{لا}^{۲} + \text{ا}^{۲} + \frac{\text{ا}}{\text{لا}^{۲}}\right)$$

۱۳- ثابت کرو کہ $\text{لوک}_{\text{و}}(۱ + ۳\text{لا} + ۲\text{لا}^{۲}) = ۳\text{لا} - \frac{۵\text{لا}^{۲}}{۲} + \frac{۹\text{لا}^{۳}}{۳} - \frac{۶۵\text{لا}^{۴}}{۴} + \ldots\ldots$

اور سلسلہ کی رقم عامہ دریافت کرو۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ

$$\text{لوک}_{\text{و}} \frac{\text{۱} + \text{۳لا}}{\text{۱} - \text{۲لا}} = \text{۵لا} - \frac{\text{۵لا}^{\text{۲}}}{\text{۲}} + \frac{\text{۳۵لا}^{\text{۳}}}{\text{۳}} - \frac{\text{۶۵لا}^{\text{۴}}}{\text{۴}} + \cdots\cdots$$

اور سلسلہ کی رقم عامہ دریافت کرو۔

۱۵۔ $\frac{\text{و}^{\text{۲لا}} + \text{و}^{\text{لا}}}{\text{و}^{\text{۳لا}}}$ کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلاؤ۔

۱۶۔ $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\left(\text{و}^{\text{خلا}} + \text{و}^{-\text{خلا}}\right)$ کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلاؤ

اس میں $\text{خ} = \sqrt{-\text{۱}}$

۱۷۔ ثابت کرو کہ

$$\text{لوک}_{\text{و}}(\text{لا} + \text{۲ھ}) = \text{۲لوک}_{\text{و}}(\text{لا} + \text{ھ}) - \text{لوک}_{\text{و}}\text{لا}$$

$$- \left\{ \frac{\text{ھ}^{\text{۲}}}{(\text{لا}+\text{ھ})^{\text{۲}}} + \frac{\text{ھ}^{\text{۴}}}{\text{۲}(\text{لا}+\text{ھ})^{\text{۴}}} + \frac{\text{ھ}^{\text{۶}}}{\text{۳}(\text{لا}+\text{ھ})^{\text{۶}}} + \cdots \right\}$$

۱۸۔ ثابت کرو کہ $\text{۱} + \frac{\text{۱}+\text{۲}}{\lfloor\text{۱}} + \frac{\text{۱}+\text{۲}+\text{۳}}{\lfloor\text{۲}} + \cdots\cdots \infty \text{ تک} = \frac{\text{۷و}}{\text{۲}}$

۱۹۔ ثابت کرو کہ $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{لوک}_{\text{و}}\text{ن} = \frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{ن}+\text{۱}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}}\left(\frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{ن}+\text{۱}}\right)^{\text{۳}} + \frac{\text{۱}}{\text{۵}}\left(\frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{ن}+\text{۱}}\right)^{\text{۵}} + \cdots$

۲۰۔ ثابت کرو کہ متصل صحیح اعداد کے لوکارثموں کا تفاوت متواتر کم ہوتا ہے۔

۲۱۔ ثابت کرو کہ $\text{لوک}_{\text{و}}(\text{ن}+\text{۱}) + \text{لوک}_{\text{و}}(\text{ن}-\text{۱}) - \text{۲لوک}_{\text{و}}\text{ن}$

$$= -\text{۲}\left\{ \frac{\text{۱}}{\text{۲ن}^{\text{۲}} - \text{۱}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}(\text{۲ن}^{\text{۲}} - \text{۱})^{\text{۳}}} + \frac{\text{۱}}{\text{۵}(\text{۲ن}^{\text{۲}} - \text{۱})^{\text{۵}}} + \cdots\cdots \right\}$$

۲۲۔ اگر عہ اور بہ مساوات $\text{لا}^{۲} - \text{ف لا} + \text{ق} = ۰$ کی قیمتیں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{لوک}_{\text{و}}(۱+\text{ف لا}+\text{ق لا}^{۲}) = (\text{عہ}+\text{بہ})\,\text{لا} - \frac{\text{عہ}^{۲}+\text{بہ}^{۲}}{۲}\,\text{لا}^{۲} + \frac{\text{عہ}^{۳}+\text{بہ}^{۳}}{۳}\,\text{لا}^{۳} - \cdots\cdots$$

۲۳۔ اگر $\text{لا} < ۱$ تو سلسلہ $\frac{۱}{۲}\text{لا}^{۲} + \frac{۲}{۳}\text{لا}^{۳} + \frac{۳}{۴}\text{لا}^{۴} + \cdots\cdots$ کا مجموعہ دریافت کرو۔

۲۴۔ ثابت کرو کہ

$$\text{لوک}_{\text{و}}\left(۱+\frac{۱}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = ۱ - \frac{۱}{۲(\text{ن}+۱)} - \frac{۱}{۲\times۳(\text{ن}+۱)^{۲}} - \frac{۱}{۳\times۴(\text{ن}+۱)^{۳}} - \cdots$$

۲۵۔ اگر $\text{لوک}_{\text{و}}\frac{۱}{۱+\text{لا}+\text{لا}^{۲}+\text{لا}^{۳}}$ کو ایک ایسے سلسلہ میں پھیلایا جائے جس میں قوار بتدریج بڑھتی جائیں، تو ثابت کرو کہ $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر $-\frac{۱}{\text{ن}}$ ہوگا اگر ن کی صورت ۴م + ۲ ہو یا ن طاق عدد ہو اور $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر $\frac{۳}{\text{ن}}$ ہوگا اگر ن کی صورت ۴م ہو

۲۶۔ ثابت کرو کہ

$$۱ + \frac{۲^{۳}}{|\underline{۲}} + \frac{۳^{۳}}{|\underline{۳}} + \frac{۴^{۳}}{|\underline{۴}} + \cdots\cdots = ۵\,\text{و}$$

۲۷۔ ثابت کرو کہ

$$۲\,\text{لوک}_{\text{و}}\text{ن} - \text{لوک}_{\text{و}}(\text{ن}+۱) - \text{لوک}_{\text{و}}(\text{ن}-۱)$$

$$= \frac{۱}{\text{ن}^{۲}} + \frac{۱}{۲\text{ن}^{۴}} + \frac{۱}{۳\text{ن}^{۶}} + \cdots\cdots$$

۲۸۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\text{ن}+1}+\frac{1}{2(\text{ن}+1)^{2}}+\frac{1}{3(\text{ن}+1)^{3}}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{\text{ن}}-\frac{1}{2\text{ن}^{2}}+\frac{1}{3\text{ن}^{3}}-\cdots\cdots\cdots$$

۲۹۔ اگر $\text{لوک}_{\text{و}}\frac{9}{10}=-\text{ا}$، $\text{لوک}_{\text{و}}\frac{24}{25}=-\text{ب}$ اور $\text{لوک}_{\text{و}}\frac{81}{80}=\text{ج}$

تو ثابت کرو کہ

$$\text{لوک}_{\text{و}}2=7\text{ا}-2\text{ب}+3\text{ج}$$

$$\text{لوک}_{\text{و}}3=11\text{ا}-3\text{ب}+5\text{ج}$$

$$\text{لوک}_{\text{و}}5=16\text{ا}-4\text{ب}+7\text{ج}$$

اور $\text{لوک}_{\text{و}}2$، $\text{لوک}_{\text{و}}3$، $\text{لوک}_{\text{و}}5$ کو ۸ مرتبہ کے اعشاریہ تک دریافت کرو

جوابات

امثلہ نمبر ۱ (صفحات ۲۲-۲۷)

۲- $\frac{۳}{۵}$ سب سے بڑی، $\frac{۶}{۱۱}$ سب سے چھوٹی

۴- ۳:۲ ۵- ۲۳:۱۳

۶- (۱) ۵۴ب:ا (۲) ۷:۹ (۳) بلا:اما

۷- ۱۸ ۸- ۳۸۵، ۶۶۰ ۹- ۱۱

۱۰- ۱۳:۵ ۱۱- ۶:۵ یا ۳:۵ ۱۶- ۶۰

۱۷- لا/۴ = ما/۲ = ی/۳ یا لا/۱ = ما/۱- = ی/ب

۲۴- اب س + ۲ ف گ ح - اف^{2} - ب گ^{2} - س ح^{2} = ۰

۲۹- ۳، ۴، ۱ ۳۰- -۳، ۴، ۱

۳۱- ۷، ۳، ۲ ۳۲- ۳، ۴، ۱

۳۴- ± ا(ب^{2} - ج^{2})، ± ب(ج^{2} - ا^{2})، ± ج(ا^{2} - ب^{2})

۳۵- ب ج (ب - ج)، ج ا (ج - ا)، ا ب (ا - ب)

امثلہ نمبری ۲ (صفحات ۴۳-۴۷)

۱- ۴۵ ۲- (۱) ۱۲ (۲) ۳۰۰ آب

۳- $\frac{لا^3}{م(لا^2+م^2)}$ ۱۳- ۰، ۵، $\frac{۸}{۷}$ ۱۴- ۰، ۳، ۸

۱۵- $\frac{ا(ب+ج)}{ج م - ب م - ۲ ا ن}$ ۲۰- ۸

۲۱- ۶، ۹، ۱۰، ۱۵ ۲۲- ۳ گیلن ا سے اور ۸ گیلن ب سے

۲۳- ۴۵ گیلن ۲۵- ۳:۱۷ ۲۶- ا = ۴ ب

۲۷- ۶۴ فیصدی تانبا اور ۳۶ فیصدی جست، ۵ حصے کانسے کے ساتھ ۳ حصے پیتل کے لئے گئے ہیں۔

۲۸- ۶۳ یا ۱۲ منٹ

امثلہ نمبری ۳ (صفحات ۶۵-۶۹)

۱- ۵$\frac{۱}{۳}$ ۲- ۹ ۳- ۱$\frac{۱}{۳}$

۴- ۲ ۷- ۶۰ ۹- م = ۲ لا - $\frac{۸}{لا}$

۱۰- م = ۵ لا + $\frac{۳۶}{۲ لا}$ ۱۱- ۴ ۱۲- لا = $\frac{۲۲}{۱۵}$ ی + $\frac{۲}{۱۵ ی}$

۱۴- ۳۶ ۱۵- ۱۶۱۰ فٹ، ۹ و ۳۰۵ فٹ

۱۶- ۲۲$\frac{۱۱}{۲۴}$ مکعب فٹ ۱۷- ۳:۴

۱۸- تقریب ۶ دن رہی۔ چوتھے، پانچویں، چھٹے دن

۲۰- ۱۶، ۲۵ سال- ۲۰۰ روپیہ، ۵۰۰ روپیہ

۲۱- ۱ دن ۱۸ گھنٹہ ۲۸ منٹ

۲۲- لاگت نہایت کم ہوگی جب رفتار ۱۲ میل فی گھنٹہ ہو اور تب لاگت فی میل ۳/۳۲ پونڈ ہوگی اور سفر کی لاگت ۹ پونڈ ۷ شلنگ ۶ پنس-

امثلہ نمبری ۴ (صفحات ۸۲-۸۴)

۱- ۲۷۷½ ۲- ۱۵۳ ۳- صفر

۴- ن(۱۰-ن)/۳ ۵- ۳۰ ۶- -۴۲

۷- -۱۸۵ ۸- ۱۳۲۵√۳ ۹- ۷۵√۵

۱۰- ۸۲۰ا - ۱۶۸۰ب ۱۱- ن(ن+۱)ا - ن²ب

۱۲- ۲۱/۲ (۱۱ا - ۹ب) ۱۳- ½(ن-۱)

۱۴- ن{ا² + لا² - (ن-۳)الا} ۱۵- ن/(ا+ب) {نا - (ن+۱)/۲ ب}

۱۶- -¼، -¾، ...... -۹¼ ۱۷- ۱، -۱½، ...... -۳۹

۱۸- -۳۳لا، -۳۱لا، ......لا

۱۹- لا² - لا + ۱، لا² - ۲لا + ۲، ...... لا

۲۰- ۹، ۱۳، ۱۷، ۲۱، ۲۵

۲۱- ۲، ۴ ۲۲- ۳، ۱۰، ۲۴ ۲۳- ۱۳، ۶

۲۴- ۷۰ ۲۵- ن² ۲۶- ۳

۲۷- ۵ ، ۲۸- ۶۱۲ ، ۲۹- ۴، ۹، ۱۴

۳۰- ۱، ۴، ۷ ، ۳۱- ۳۹۵ ، ۳۲- ۱۶۰

۳۳- ع ب + ع(ع+۱)/۲ د ، ۳۴- ن(ن+۱) ا - ن²/ا

امثلہ نمبری ۵ (صفحات ۹۱-۹۴)

۱- ۱۰ یا -۸ ، ۲- ۸ یا -۱۳ ، ۳- ۲، ۵، ۸، ....

۴- رقم اول ۸، تعداد ارقام ۵۹ ، ۵- رقم اول ½ ۷، تعداد ارقام ۵۴

۶- قسطیں ۵۱ روپیہ، ۵۳ روپیہ، ۵۵ روپیہ، ......

۷- ۱۲ ، ۸- ۲۵

۹- ن/(۱-لا)۲ (۲+ ن-۳ ۲√لا) ، ۱۰- ن²

۱۳- ۳، ۵، ۷، ۹ ، ۱۴- ۲، ۴، ۶، ۸ ، ۱۵- پ+ق-م

۱۶- ۱۲ یا -۱۷ ، ۱۷- ۱۶ر-۱ ، ۲۰- ۱۰ پ-۸

۲۱- ۸ رقمیں- سلسلہ ہے ½ ۱، ۳، ½ ۴، ....

۲۲- (۳، ۵، ۷) اور (۴، ۵، ۶) ، ۲۳- ر‌ما=(ن+۱-ر) لا

امثلہ نمبری ۶ (صفحات ۱۰۶-۱۰۸)

۱- ۲۰۵۹/۱۴۵۸ ، ۲- ۱۲۸۱/۵۱۲ ، ۳- ¼ ۱۹۱

۴- -۶۸۲ ، ۵- ۱۰۹۳/۴۵ ، ۶- ¼ (۵⁶-۱)

۷- $\frac{۹}{۷}\{۱-(\frac{۴}{۳})^{ن-۲}\}$ ۸- $۳۶۳(\sqrt{۳}+۱)$

۹- $\frac{۱}{۲}(۵۸۵\sqrt{۲}-۲۹۲)$ ۱۰- $-\frac{۳۶۳}{۱۹۲}$

۱۱- $\frac{۳}{۲}$، ۱، $\frac{۲}{۳}$ ۱۲- $\frac{۱۶}{۳}$، ۸، ۲۷

۱۳- -۷، $\frac{۷}{۲}$، .... $\frac{۷}{۳۲}$ ۱۴- $\frac{۹۴}{۹۵}$

۱۵- $\frac{۲۷}{۵۸}$ ۱۶- ۶۹۹۹ ۱۷- $\frac{۱}{۲}$

۱۸- $\frac{۳(۳+\sqrt{۳})}{۲}$ ۱۹- $۷(۷+\sqrt{۴۲})$ ۲۰- $۴+۳\sqrt{۲}$

۲۱- $\frac{۱}{۲}(۴+۳\sqrt{۲})$ ۲۲- $\frac{ا^{\frac{۳}{۲}}}{د^{\frac{۱}{۲}}(ا+د)}$ ۲۳- ۲

۲۴- ۱۶، ۲۴، ۳۶، ۲۵- ۲

۲۶- ۲ ۲۷- ۸، ۱۲، ۱۸ ۲۸- ۲، ۶، ۱۸

۳۱- ۶، -۳، $۱\frac{۱}{۲}$، ....

امثلہ نمبر ۷ (صفحات ۱۱۸-۱۲۱)

۱- $\frac{۱-ل^{ن}}{(۱-ل)^{۲}}-\frac{ن ل^{ن}}{۱-ل}$ ۲- $\frac{۸}{۳}$

۳- $\frac{لا+۱}{(۱-لا)^{۲}}$ ۴- $۴-\frac{۱}{۲^{ن-۳}}-\frac{ن}{۲^{ن-۱}}$ ۵- ۶

۶- $\frac{۱}{(۱-لا)^{۳}}$ ۹- $\frac{۱}{(۱-ب)(۱-دب)}$

۱۰- ۴۰، ۲۰، ۱۰ ۱۱- ۴، ۱، $\frac{۱}{۴}$، .....

۱۴- $\text{ن} \times ۲^{\text{ن}+۲} - ۲^{\text{ن}+۱} + ۲$

۱۵- $\frac{\text{لا}(\text{لا}^{\text{ن}} - ۱)}{\text{لا} - ۱} + \frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)\text{ا}}{۲}$

۱۶- $\frac{\text{لا}^{۲}(\text{لا}^{۲\text{ن}} - ۱)}{\text{لا}^{۲} - ۱} + \frac{\text{لاما}(\text{لا}^{\text{ن}}\text{ما}^{\text{ن}} - ۱)}{\text{لاما} - ۱}$

۱۷- $۴\text{ع}^{۲}\text{ا} + \frac{۲}{۹}\left(۱ - \frac{۱}{\text{ع}^{۲}۲}\right)$

۱۸- $۱\frac{۱}{۸}$ ۱۹- $\frac{۲۳}{۴۸}$ ۲۰- $\frac{۴۰}{۸۱}(۱۰^{\text{ن}} - ۱) - \frac{۴\text{ن}}{۹}$

۲۱- ۹۸۷۶۵۴۳۲۴ ۲۲- ۷۴۰۷۴۰۷۳۴

۲۳- $\text{ن} - \frac{۱}{۹}\left\{۱ - \frac{۱}{۱۰^{\text{ن}}}\right\}$ ۲۴- $\frac{۳}{۲}(۳^{\text{ن}} - ۱) - ۲\text{ن}$

۲۵- $\frac{۳}{۲}(۳^{\text{ن}} - ۱ - ۲\text{ن})$ ۲۶- $۲(۲^{\text{ن}} - ۱ - ۴\text{ن})$

۲۷- $۴^{\text{ن}} + \text{ن}$ ، $۲(۲^{\text{ن}} - ۱) + \frac{\text{ن}}{۲}(\text{ن} + ۱)$

۲۹- $\frac{(\text{ا}+۱)(\text{ا}^{\text{ن}}\text{ج}^{\text{ن}} - ۱)}{\text{اج} - ۱}$

۳۰- $\frac{\text{ا}}{\text{ب} - ۱}\left\{\frac{\text{ب}(\text{ب}^{۲\text{ن}} - ۱)}{\text{ب}^{۲} - ۱} - \text{ن}\right\}$

امثلہ نمبری ۸ (صفحات ۱۳۶-۱۳۹)

۱- (۱) ۵ (۲) $۳\frac{۱}{۲}$ (۳) $۳\frac{۲۹}{۳۲}$

۲- $۶\frac{۱}{۹}$ ، $۷\frac{۶}{۷}$ ۳- $\frac{۲}{۵}$ ، $\frac{۲}{۷}$ ، $\frac{۲}{۹}$ ، $\frac{۲}{۱۱}$

۴- ۶ اور ۲۴ ۵- ۹:۴ ۹- ۱۰، ۱۲، ۱۵

۱۰- ۱۲، ۳ ۱۱- ۴۵، ۵ ۱۲- ۲۳۴، ۱۰۴

امثلہ نمبری ۹ (صفحات ۱۵۷-۱۶۱)

۱- ۲۹۱۵

۲- $\frac{ن}{۲}(۶ن^{۲}+۳ن-۱)$

۳- $\frac{ن(ن+۱)(ن+۲)(۳ن+۵)}{۱۲}$

۴- $ن(۳ن^{۲}+۶ن+۱)$

۵- $\frac{ن}{۳}(۴ن^{۲}+۶ن-۱)$

۶- $\frac{ن(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)}{۴}$

۷- $ن^{۲}(۲ن^{۲}-۱)$

۸- $\frac{ن(ن+۱)(ن+۲)}{۶}$

۹- ۷۳۰۵

۱۰- ۱۹۵۰۰

۱۱- $\frac{۵(ن+۱)(ن+۲)}{۶}$

۱۲- $\frac{ن(ن+۱)(۴ن-۱)}{۶}$

۱۳- $\frac{ن(ن+۱)(۲ن-۱)}{۲}$

۱۴- $\frac{ن(ن+۱)(۷ن-۴)}{۶}$

۱۵- $\frac{ن(ن+۱)(۸ن-۵)}{۶}$

۱۶- $\frac{ن}{۲}(۲ن^{۲}+۵ن+۵)$

۱۷- $\frac{ن}{۶}(۲ن^{۲}-۳ن+۱۳)$

۱۸- $\frac{ن}{۶}(۲ن^{۲}+۳ن+۷)$

۱۹ $\frac{ن}{۶}(۲ن^{۲}+۹ن+۱)$

۲۰- ۱۲۹۶۸۰

۲۱- ۱۰۰۵۳۵۰

۲۲- $\frac{ن(ن+۱)(۹ن^{۲}+۱۳ن+۸)}{۱۲}$

۲۳- $\frac{ن}{۳(۲ن+۳)}$

۲۴- $\frac{۷۰}{۱۰۵۹}$

۲۵- $\frac{۶۶۷}{۹۳۰}$ ۲۶- $\frac{ن}{۳(۲ن+۳)}$ ۲۷- $\frac{۶۳۷}{۲۵۵۰}$

۲۸- $\frac{ن(ن+۲)}{۳(۲ن+۱)(۲ن+۳)}$ ۲۹- ۱۲۴۰

۳۰- ۱۱۴۰ ۳۱- ۱۶۶۴۶ ۳۲- ۲۴۷۰

۳۳- ۲۱۳۲۱ ۳۴- ۵۲ ۳۵- ۱۱۸۷۹

۳۶- ۱۸۴۰ ۳۷- ۱۱۹۴۰ ۳۸- ۱۹۰

۳۹- ۳۰ ۴۰- ۱۸۲۹۶

۴۲- مثلثی ۳۶۴، مربع ۴۹۰۰ ۴۳- ۱۲۰

۴۴- ن-۱

امثلہ نمبری ۱۰ (صفحات ۱۸۱-۱۸۳)

۱- $\frac{ا\sqrt{ب} + ب\sqrt{ا} - \sqrt{اب(ا+ب)}}{۲اب}$

۲- $\frac{ا-۱ + \sqrt{ا^{۲}-۱} + \sqrt{۲ا(ا-۱)}}{ا-۱}$

۳- $\frac{\sqrt{۲} + \sqrt{۳} + \sqrt{۵}}{۲}$

۴- $۳^{\frac{۵}{۳}} + ۳^{\frac{۴}{۳}} \times ۲^{\frac{۱}{۲}} + ۳ \times ۲ + ۳^{\frac{۲}{۳}} \times ۲^{\frac{۳}{۲}} + ۳^{\frac{۱}{۳}} \times ۲^{۲} + ۲^{\frac{۵}{۲}}$

۵- $۵^{\frac{۵}{۶}} - ۵^{\frac{۴}{۶}} \times ۲^{\frac{۱}{۳}} + ۵^{\frac{۳}{۶}} \times ۲^{\frac{۲}{۳}} - ۵^{\frac{۲}{۶}} \times ۲ + ۵^{\frac{۱}{۶}} \times ۲^{\frac{۴}{۳}} - ۲^{\frac{۵}{۳}}$

۶- $ا^{\frac{۱۱}{۶}} - ا^{\frac{۱۰}{۶}}ب^{\frac{۱}{۳}} + ا^{\frac{۹}{۶}}ب^{\frac{۲}{۳}} - \dots\dots + ا^{\frac{۱}{۶}}ب^{\frac{۱۰}{۳}} - ب^{\frac{۱۱}{۳}}$

۷- $۳^{\frac{۲}{۳}} + ۳^{\frac{۱}{۳}} + ۱$

۸- $۲^{۳} - ۲^{۲} \times ۷^{\frac{۱}{۳}} + ۲ \times ۷^{\frac{۲}{۳}} - ۷^{\frac{۳}{۳}}$

۹- $۵^{\frac{۱۲}{۳}} + ۵^{\frac{۱۰}{۳}} \times ۳^{\frac{۱}{۴}} + ۵^{۳} \times ۳^{\frac{۲}{۴}} + \ldots\ldots + ۵^{\frac{۱}{۳}} \times ۳^{\frac{۱۰}{۴}} + ۳^{\frac{۱۱}{۴}}$

۱۰- $۱۷ - ۳^{\frac{۵}{۳}} \times ۲^{\frac{۳}{۲}} + ۳^{\frac{۴}{۳}} \times ۲^{۲} - ۳ \times ۲^{\frac{۵}{۲}} + ۳^{\frac{۲}{۳}} \times ۲^{۳} - ۳^{\frac{۱}{۳}} \times ۲^{\frac{۷}{۲}}$

۱۱- $\frac{۳^{\frac{۳}{۲}} + ۳^{\frac{۵}{۴}} + ۳^{\frac{۱}{۴}}}{۸}$ ۱۲- $\sqrt{۵} + \sqrt{۷} - ۲$

۱۳- $۱ + \sqrt{۳}$ ۱۴- $\sqrt{\frac{۲۵}{۲}} + \sqrt{\frac{۷}{۲}}$

۱۵- $\sqrt[۴]{۳}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}} + \sqrt{\frac{۵}{۲}}\right)$ ۱۶- $\sqrt[۴]{۳}\left(\frac{۳}{\sqrt{۲}} - \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}\right)$

۱۷- $۲ + \sqrt{ا} - \sqrt{۳ب}$ ۱۸- $۱ + \sqrt{۲}$

۱۹- $۱ + \sqrt{۵}$ ۲۰- $\sqrt{۳} - \sqrt{۲}$ ۲۱- $۳ - ۲\sqrt{۲}$

۲۲- $۳\sqrt{۳} - \sqrt{۶}$ ۲۳- $\frac{۱}{\sqrt[۴]{ا^{۲} - ۱}}\left(\sqrt{\frac{ا + ۱}{۲}} + \sqrt{\frac{ا - ۱}{۲}}\right)$

۲۴- $\sqrt{\frac{ا^{۲} + ا + ۱}{۲}} + \sqrt{\frac{ا^{۲} + ا - ۱}{۲}}$ ۲۵- $۱۱ + ۵۶\sqrt{۳}$

۲۶- ۲۸۹ ۲۷- $۳\sqrt{۳} + ۵$ ۲۸- ۳

۲۹- ٫۲۶۷۹۴۹۲ ۳۰- $۳ + \sqrt{۵} = ۵٫۲۳۶۰۷$

۳۱- $\frac{ا - ۱}{۲}$ ۳۲- $لا = ۲۵$ ۳۳- $لا = ۷$

۳۴- $لا = \frac{اب}{ا + ب}$

۳۵- $لا = \frac{ا^۲ + ب^۲ + ج^۲ - ۲ا ب - ۲ب ج - ۲ج ا}{۴ج}$

امثلہ نمبری ۱۱ (صفحات ۲۰۶-۲۰۹)

۱- -۱۳ ۲- $۶ - ۲\sqrt{۶}$ ۳- $لا^۲ - لا + ۱$

۴- $-۱۹ - ۶\sqrt{۱۰}$ ۵- $\frac{۴ ا لا \sqrt{-۱}}{ا^۲ + لا^۲}$ ۶- $\frac{۳ا^۲ - ۱}{۲ا}$

۷- $\sqrt{-۱}$ ۸- $\pm(۵ - ۶\sqrt{-۱})$ ۹- $\pm ۲(۱ - \sqrt{-۱})$

۱۰- $\pm(ا + \sqrt{-۱})$ ۱۱- $\pm\{(ا + ب) - (ا - ب)\sqrt{-۱}\}$

۱۲- $\frac{۴}{۷} - \frac{\sqrt{۶}}{۱۴} خ$ ۱۳- $خ$

۱۴- $\frac{۲ب(۳ا^۲ - ب^۲)}{ا^۲ + ب^۲} خ$

۱۵- $۲(ا^۸ - ۲۸ا^۶ب^۲ + ۷۰ا^۴ب^۴ - ۲۸ا^۲ب^۶ + ب^۸)$

۱۶- $\frac{۶}{۵}$ ۱۷- ۸

۱۹- $لا^۴ - ۶لا^۳ + ۱۸لا^۲ - ۲۶لا + ۲۱$ ۲۲- $\frac{۵}{۳۴}$

امثلہ نمبری ۱۲ (صفحات ۲۲۲-۲۲۴)

۱- $۳۵لا^۲ + ۱۳لا - ۱۲ = ۰$ ۲- $م ن لا^۲ + (ن^۲ - م^۲) لا - م ن = ۰$

۳- $(ف^۲ - ق^۲) لا^۲ + ۴ ف ق لا - ف^۲ + ق^۲ = ۰$

۴- $لا^۲ + ۲ف لا + ف^۲ - ۸ق = ۰$

۵- لا^{۲} + ۶ لا + ۳۴ = ۰ ۶- لا^{۲} + ۲ ا لا + ا^{۲} + ب^{۲} = ۰

۷- ۲ ا لا^{۳} + (م - ا) لا^{۲} - ۲ ا لا = ۰ ۸- لا^{۳} - ۸ لا^{۲} + ۱۷ لا - ۴ = ۰

۱۳- ۳، ۵ ۱۴- (ا - ب) / (ا + ب) ۱۶- (ب^{۲} - ۲ ا ج) / ج^{۲}

۱۷- ب ج^{۲} (۳ ا ج - ب^{۲}) / ا^{۴} ۱۸- ب^{۲} (ب^{۲} - ۴ ا ج) / ا^{۲} ج^{۲}

۱۹- ۷ ۲۰- -۱۵ ۲۱- صفر

۲۲- لا^{۲} - ۲ (ف^{۲} - ۲ ق) لا + ف^{۲} (ف^{۲} - ۴ ق) = ۰

۲۴- (۱) (ب^{۲} - ۲ ا ج) / ا^{۲} ج^{۲} (۲) ب (ب^{۲} - ۳ ا ج) / ا^{۳} ج^{۳}

۲۵- ن ب^{۲} = (۱ + ن)^{۲} ا ج

۲۶- لا^{۲} - ۴ م ن لا - (م^{۲} - ن^{۲})^{۲} = ۰

۲۷- ا^{۲} ج^{۲} لا^{۲} - (ب^{۲} - ۲ ا ج) (ا^{۲} + ج^{۲}) لا + (ب^{۲} - ۲ ا ج)^{۲} = ۰

امثلہ نمبری ۱۳ (صفحات ۲۲۹-۲۳۱)

۱- ۲ اور -۲ ۵- ب لا^{۲} - ۲ ا لا + ا = ۰

۶- (۱) ف (ف^{۲} - ۳ ق) (ف^{۲} - ق) / ق (۲) (ف^{۴} - ۴ ف^{۲} ق + ۲ ق^{۲}) / ق^{۲}

۱۱- ۱/۳

امثلہ نمبری ۱۴ (صفحات ۲۳۴-۲۳۵)

۱- ۲ ۲- ±۷

۵- (ل نَ - لَ ن)^2 = (ل مَ - لَ م) (م نَ - مَ ن)

۷- (اَ - ب بَ)^2 + ۴ (ھ اَ + ھَ ب) (ھ بَ + ھَ ا) = ۰

۱۰- (ب بَ - ۲ ا جَ - ۲ اَ ج)^2 = (ب^2 - ۴ ا ج) (بَ^{2} - ۴ اَ جَ) جس کی مختصر صورت (ا جَ - اَ ج)^2 = (ا بَ - اَ ب) (ب جَ - بَ ج) ہے

امثلہ نمبری ۱۵ (صفحات ۲۵۵-۲۵۷)

۱- $\frac{۱}{۴}$، $-\frac{۱}{۲}$ ۲- ۴، $\frac{۱}{۴}$ ۳- $\frac{۴}{۹}$، $\frac{۱}{۴}$

۴- ۱، ۲^{ن} ۵- ب، ج وغیرہ ۶- ۲، -۱

۷- $\left(\frac{ا + ب}{ا - ب}\right)^{\frac{۲ ن ق}{ن - ق}}$ ، $\left(\frac{ا - ب}{ا + ب}\right)^{\frac{۲ ن ق}{ن - ق}}$

۸- ۲۷، $\frac{۲۵}{۱۴۷}$ ۹- $\frac{۹}{۱۳}$، $\frac{۴}{۱۳}$ ۱۰- ±۱

۱۱- ۴ ۱۲- صفر

۱۳- ۹، -۷، ۱± $\sqrt{۲۴}$ ۱۴- ۲، -۴، -۱± $\sqrt{۷}$

۱۵- ۳، $-\frac{۳}{۲}$، $\frac{۳ \pm \sqrt{۴۷}}{۴}$ ۱۶- ۴، $-\frac{۷}{۲}$، $\frac{۱ \pm \sqrt{۶۵}}{۴}$

۱۷- $-\frac{۲۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۲} \pm \sqrt{۲۲۹}$ ، $-\frac{۲۱}{۲} \pm \frac{۱}{۲} \sqrt{۲۱}$

۱۸- ۳، $-\frac{۵}{۳}$، $\frac{۲ \pm \sqrt{۴۰}}{۳}$

۱۹- ۵، $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۸ \pm \sqrt{۱۴۸}}{۳}$

۲۰- ۲، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۵ \pm \sqrt{۲۰۱}}{۴}$

۲۱- ۵، $-\frac{۷}{۳}$، $\frac{۸ \pm \sqrt{۳۱۵}}{۹}$

۲۲- ۱، ۹، $-\frac{۱۸}{۵}$

۲۳- ۱، $\frac{۱}{۲}$، $-\frac{۱}{۳}$

۲۴- ۵، $\frac{۱}{۲}$

۲۵- ۲، $-\frac{۹}{۲}$

۲۶- صفر، ۵

۲۷- ۹، $-\frac{۵}{۲}$

۲۸- ۳، $\frac{۱}{۳}$، $\frac{-۱ \pm \sqrt{-۳۵}}{۹}$

۲۹- $۲ \pm \sqrt{۳}$، $\frac{-۱ \pm \sqrt{-۳}}{۲}$

۳۰- ۲، $-\frac{۱}{۲}$، ۵، $-\frac{۱}{۵}$

۳۱- $\frac{\{\text{ا} - \text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^۲ - ۲\text{اب} - ۳\text{ا}^۲}\}}{۲\text{ا}}$ ، -۱

۳۲- $\frac{\{-(\text{ا} + \text{ب}) \pm (\text{ب}^۲ + ۲\text{اب} - ۳\text{ا}^۲)^{\frac{۱}{۲}}\}}{۲\text{ا}}$ ، ۱

۳۳- $\frac{\{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^۲ - ۳\text{ا}^۲}\}}{۲\text{ا}}$ ، ± ۱

۳۴- $\frac{\{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^۲ \pm ۴\text{اج}}\}}{۲\text{ا}}$

۳۵- $\frac{۱}{۲۸}\{-۱۳ \pm \sqrt{[illegible]}\}$ ، $\frac{۱}{۲۸}\{[illegible]\sqrt{۷۳}\}$ وغیرہ - وغیرہ

۳۷- ۳ا، -۲ا

۳۸- $\pm \frac{۲\text{ا}}{۵}$

۳۹- $\frac{-۱ \pm \sqrt{۱۷}}{۲}$ ، $\frac{-۱ \pm \sqrt{۲}}{۲}$

۴۰- $\frac{۳}{۲}$ ، $\frac{۲}{۳}$ ۴۱- صفر، $\frac{۱۶۳}{۹۵}$

۴۲- ۱، $\frac{(\sqrt{ا} - \sqrt{ب})^{۲} + ۴}{(\sqrt{ا} + \sqrt{ب})^{۲} - ۴}$

امثلہ نمبری ۱۶ (صفحات ۲۶۲-۲۶۴)

۱- لا = ۵، $-\frac{۸}{۳}$ اور ما = ۴، $-\frac{۱۵}{۲}$

۲- لا = ۲، $-\frac{۸}{۱۹}$ اور ما = ۷، $-\frac{۹۷}{۱۹}$

۳- لا = ۱، $-\frac{۵۳}{۸۸}$ اور ما = ۱، $-\frac{۲۵}{۲۲}$

۴- لا = ±۵، ±۳ اور ما = ±۳، ±۵

۵- لا = ۸، ۲ اور ما = ۲، ۸

۶- لا = ۴۵، ۵ اور ما = ۵، ۴۵

۷- لا = ۹، ۴ اور ما = ۴، ۹

۸- لا = ±۲، ±۳ اور ما = ±۱، ±۲

۹- لا = ±۲، ±۳ اور ما = ±۳، ±۴

۱۰- لا = ±۵، ±۳ اور ما = ±۳، ±۴

۱۱- لا = ±۲، ±۱ اور ما = ±۱، ±۳

۱۲- لا = $\pm\sqrt{۳}$، $\pm\sqrt{\frac{۳}{۱۹}}$ اور ما = ۰، $\pm ۲\sqrt{\frac{۳}{۱۹}}$

۱۳- لا = ۵، ۳، $۴ \pm \sqrt{۹۷}$ اور ما = ۳، ۵، $۴ \mp \sqrt{۹۷}$

۱۴- لا = ۴، −۲، $\pm\sqrt{-۱۵} + ۱$ اور ما = ۲، −۴، $\pm\sqrt{-۱۵} - ۱$

۱۵- لا = ۳، −۲، ± √(−۱۱) + ۱ اور ما = ۲، −۴، ± √(−۱۱) − ۱

۱۶- لا = ۴/۵، ۱/۵ اور ما = ۲۰، ۵

۱۷- لا = ۲، ۱ اور ما = ۱، ۲

۱۸- لا = ۶، ۴ اور ما = ۱۰، ۱۵

۱۹- لا = ۷۲۹، ۳۴۳ اور ما = ۳۴۳، ۷۲۹

۲۰- لا = ۱۶، ۱ اور ما = ۱، ۱۶

۲۱- لا = ۹، ۴ اور ما = ۴، ۹ ۲۲- لا = ۵ اور ما = ±۴

۲۳- لا = ۱، ۵/۳ اور ما = ۲، ۲/۳ ۲۴- لا = ۹، ۱ اور ما = ۱، ۹

۲۵- لا = ±۲۵ اور ما = ±۹

۲۶- لا = ۶، ۲، ۴، ۳ اور ما = ۱، ۳، ۳/۲، ۲

۲۷- لا = ±۵، ±۴، ±۵/۲، ±۲ اور ما = ±۵، ±۴، ±۱۰، ±۸

۲۸- لا = ۴، ۱۰۷/۱۳ اور ما = ۱، ۴۸/۱۳

۲۹- لا = −۶، (۱ ± √(−۱۴۳))/۲ اور ما = −۳، (۱ ± ۳√(−۱۴۳))/۴

۳۰- لا = ۰٫۹، ۳ اور ما = ۰٫۳، ۹

۳۱- لا = ۰٫۱، ۱۵/۲۲ اور ما = ۰٫۲، ۹/۲۲

۳۲- لا = ۵، ۱۰/۲۳، ۰ اور ما = ۳، −۹/۲۳، −۴/۷

۳۳- لا = ۲، ∛۴، ۲ اور ما = ۲، ۲∛۴، ۶

۳۴- لا = ۱ ، $\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}}$ اور ما = ۲ ، ۳ $\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}}$

۳۵- لا = ± ۳ ، ± $\sqrt{۱۸-}$ اور ما = ± ۳ ، ∓ $\sqrt{۱۸-}$

۳۶- لا = ما = ± ۲

۳۷- لا = ۰ ، $\frac{ب\sqrt{ا}}{\sqrt{ا}+\sqrt{ب}}$ ، $\frac{ب\sqrt{ا}}{\sqrt{ا}-\sqrt{ب}}$

اور ما = ۰ ، $\frac{ا\sqrt{ب}}{\sqrt{ا}+\sqrt{ب}}$ ، − $\frac{ا\sqrt{ب}}{\sqrt{ا}-\sqrt{ب}}$

۳۸- لا = ب ، $\frac{ب(۱- \pm \sqrt{۳})}{۲}$ اور ما = ا ، ا(۱ ∓ $\sqrt{۳}$)

۳۹- لا = $\frac{ا^۲}{ب}$ ، $\frac{ا(۲ب-ا)}{ب}$ اور ما = $\frac{ب^۲}{ا}$ ، $\frac{ب(۲ا-ب)}{ا}$

۴۰- لا = ۰ ، ± ا $\sqrt{۷}$ ، ± ا $\sqrt{۱۳}$ ، ± ۳ا ، ± ا

اور ما = ۰ ، ∓ ب $\sqrt{۷}$ ، ± ب $\sqrt{۱۳}$ ، ∓ ب ، ∓ ۳ب

۴۱- لا = ± ۱ ، ± $\frac{۲ا^۲}{\sqrt{۱۶ا^۴-ا^۲-۱}}$

اور ما = ± ۲ا ، ∓ $\frac{ا}{\sqrt{۱۶ا^۴-ا^۲-۱}}$

امثلہ نمبری ۱۷ (صفحات ۲۴۷-۲۴۸)

۱- لا = ± ۳ ، ما = ± ۵ ، ی = ± ۴

۲- لا = ۵، ما = -۱، ی = ۷

۳- لا = ۵، -۱ اور ما = ۱، -۵ اور ی = ۲

۴- لا = ۸، -۳ اور ما = ۳ اور ی = ۳، -۸

۵- لا = ۴، ۳، (۲ ± √۱۵۱)/۳ اور ما = ۳، ۴، (۲ ∓ √۱۵۱)/۳
اور ی = ۲، -۱۱/۳

۶- لا = ±۳، ما = ∓۲، ی = ±۵

۷- لا = ±۵، ما = ±۱، ی = ±۱

۸- لا = ۸، -۸ اور ما = ۵، -۵ اور ی = ۳، -۳

۹- لا = ۳، ما = ۴، ی = ۱/۲، و = ۱/۳

۱۰- لا = ۱، ما = ۲، ی = ۳

۱۱- لا = ۵، -۷ اور ما = ۳، -۵ اور ی = ۶، -۸

۱۲- لا = ۱، -۲ اور ما = ۷، -۳ اور ی = ۳، -۱۱/۳

۱۳- لا = ۴، ۹۰/۷ اور ما = ۶، ۶۶/۷ اور ی = ۲، -۶

۱۴- لا = ا، صفر، صفر اور ما = صفر، ا، صفر اور ی = صفر، صفر، ا

۱۵- لا = ا/√۳، ا(√۳ ± √-۹)/۶

ما = ا/√۳، ا(-۵√۳ ± √-۹)/۶

ی = ا/√۳، -ا(√۳ ± √-۹)/۳

۱۶- لا = د، −۲د، $\frac{۷ \pm \sqrt{-۱۵}}{۲}$ د
ب = ۴د، د، $\frac{-۱۱ \pm \sqrt{-۱۵}}{۲}$ د
ی = ۲د، −۳د، $(۱ \pm \sqrt{-۱۵})$ د

امثلہ نمبری ۱۸ (صفحات ۲۹۷-۳۰۱)

۱- ۲۴ ۲- ۶ ۳- ۷
۴- ن-ر+۱ ۵- ۱۸ ۷- ۱۲
۸- ۴۰۳۲۰، ۶۳۷۵۶۰۰، ۱۰۶۲۶، ۱۱۶۲۸
۹- ۱۵ ۱۰- ۵۰۴۰، ۱۲۰ ۱۱- ۱۵، ۳۶۰
۱۲- ۶ ۱۳- ۱۲۰ ۱۴- ۷۲۰
۱۵- ۱۰۶۲۶، ۱۷۷۱ ۱۶- ۱۳۳۰ ۱۷- ۶۳۷۵۶۰۰
۱۸- ۳۶۰، ۱۴۴ ۱۹- ۲۳۰۳۰۰ ۲۰- ۱۱۴۰، ۲۳۱
۲۱- ۱۴۴ ۲۲- ۲۲۴، ۸۹۶ ۲۳- ۸۴۸
۲۴- ۵۶ ۲۵- ۲۱۰ ۲۶- ۳۰۰
۲۷- ۳۶۰۰۰۰ ۲۸- ۲۰۵۲۰۰۰ ۲۹- ۳۶۹۹۶۰۰
۳۰- ۲۱۶۰۰ ۳۱- $\frac{\underline{۴۵|}}{\underline{۱۰|}\ \underline{۱۵|}\ \underline{۲۰|}}$ ۳۲- ۵۷۶۰
۳۳- ۲۹۰۳۰۴۰ ۳۴- ۲۵۹۲۰ ۳۶- ۴۱
۳۷- ۱۹۵۶ ۳۸- ۷ ۳۹- ۴۸۰

امثلہ نمبری ۱۹ (صفحات ۳۲۱-۳۲۵)

۳- ۲۵۵ ۴- ۲۸

۵- (۱) ۹۰۷۲۰۰ (۲) ۱۰۰۸۰ (۳) ۳۰۲۴۰

۶- ۱۵۱۳۵۱۲۰۰ ۷- ۳۶۰ ۸- $\text{ف}^{\text{ن}}$

۹- ۳۰ ۱۰- (۱) ۱۲۶۰ (۲) ۲۷۷۲۰

۱۱- ۳۳۷۴ ۱۲- ۴۵۵

۱۳- $\dfrac{\lfloor \text{ا+۲ب+۳ج+د}}{\lfloor \text{ا} \, (\lfloor \text{ب})^{۲} (\lfloor \text{ج})^{۳}}$ ۱۴- ۴۰۹۵

۱۵- ۵۷۷۶۰۰۰۰ ۱۶- ۷۲۰، ۳۶۲۸۸۰۰

۱۷- ۳۶۰ ۱۸- ۴ ۱۹- ۱۲۷

۲۰- ۳۱۵ ۲۱- $\dfrac{\lfloor \text{م ن}}{(\lfloor \text{م})^{\text{ن}} \lfloor \text{ن}}$

۲۲- ۶۴، ۳۲۵ ۲۳- ۴۲ ۲۴- $\frac{۱}{۲}(\text{ن}^{۲}+\text{ن}+۲)$

۲۵- (۱) $\dfrac{\text{ف}(\text{ف}-۱)}{۲} - \dfrac{\text{ق}(\text{ق}-۱)}{۲} + ۱$

(۲) $\dfrac{\text{ف}(\text{ف}-۱)(\text{ف}-۲)}{۶} - \dfrac{\text{ق}(\text{ق}-۱)(\text{ق}-۲)}{۶}$

۲۶- $(\text{ف}+۱)^{\text{ن}} - ۱$ ۲۷- ۱۱۳، ۲۱۹۰ ۲۸- ۲۴۵۴

۲۹- ۶۶۶۶۶۰۰ ۳۰- ۵۱۹۹۹۶۰

امثلہ نمبر ۲۱ (صفحات ۳۵۰-۳۵۱)

۱۔ $لا^{۵} - ۱۵لا^{۴} + ۹۰لا^{۳} - ۲۷۰لا^{۲} + ۴۰۵لا - ۲۴۳$

۲۔ $۸۱لا^{۴} + ۲۱۶لا^{۳}ا + ۲۱۶لا^{۲}ا^{۲} + ۹۶لاا^{۳} + ۱۶ا^{۴}$

۳۔ $۳۲لا^{۵} - ۸۰لا^{۴}ا + ۸۰لا^{۳}ا^{۲} - ۴۰لا^{۲}ا^{۳} + ۱۰لاا^{۴} - ا^{۵}$

۴۔ $۱ - ۱۸ی + ۱۳۵ی^{۲} - ۵۴۰ی^{۳} + ۱۲۱۵ی^{۴} - ۱۴۵۸ی^{۵} + ۷۲۹ی^{۶}$

۵۔ $لا^{۱۰} + ۵لا^{۹} + ۱۰لا^{۸} + ۱۰لا^{۷} + ۵لا^{۶} + لا^{۵}$

۶۔ $۱ - ۷لاا + ۲۱لا^{۲}ا^{۲} - ۳۵لا^{۳}ا^{۳} + ۳۵لا^{۴}ا^{۴} - ۲۱لا^{۵}ا^{۵} + ۷لا^{۶}ا^{۶} - لا^{۷}ا^{۷}$

۷۔ $۱۶ - ۴۸لا^{۲} + ۵۴لا^{۴} - ۲۷لا^{۶} + \frac{۸۱لا^{۸}}{۱۶}$

۸۔ $۷۲۹ی^{۶} - ۹۷۲ی^{۵} + ۵۴۰ی^{۴} - ۱۶۰ی^{۳} + \frac{۸۰ی^{۲}}{۳} - \frac{۶۴ی}{۲۷} + \frac{۶۴}{۷۲۹}$

۹۔ $۱ + \frac{۷لا}{۲} + \frac{۲۱لا^{۲}}{۴} + \frac{۳۵لا^{۳}}{۸} + \frac{۳۵لا^{۴}}{۱۶} + \frac{۲۱لا^{۵}}{۳۲} + \frac{۷لا^{۶}}{۶۴} + \frac{لا^{۷}}{۱۲۸}$

۱۰۔ $\frac{۶۴لا^{۶}}{۷۲۹} - \frac{۳۲لا^{۴}}{۲۷} + \frac{۲۰لا^{۲}}{۳} - ۲۰ + \frac{۱۳۵}{۴لا^{۲}} - \frac{۲۴۳}{۸لا^{۴}} + \frac{۷۲۹}{۶۴لا^{۶}}$

۱۱۔ $\frac{۱}{۲۵۶} + \frac{ی}{۱۶} + \frac{۷ی^{۲}}{۱۶} + \frac{۷ی^{۳}}{۴} + \frac{۳۵ی^{۴}}{۸} + ۷ی^{۵} + ۷ی^{۶} + ۴ی^{۷} + ی^{۸}$

۱۲۔ $۱ - \frac{۱۰}{لا} + \frac{۴۵}{لا^{۲}} - \frac{۱۲۰}{لا^{۳}} + \frac{۲۱۰}{لا^{۴}} - \frac{۲۵۲}{لا^{۵}} + \frac{۲۱۰}{لا^{۶}} - \frac{۱۲۰}{لا^{۷}} + \frac{۴۵}{لا^{۸}} - \frac{۱۰}{لا^{۹}} + \frac{۱}{لا^{۱۰}}$

۱۴۔ $-۳۵۷۵۰لا^{۱۰}$ ۱۵۔ $-۱۱۲۶۴۰لا^{۹}$

۱۶۔ $-۳۱۲لا^{۲}$ ۱۷۔ $\frac{|۳۰}{|۳\ |۲۷}(۵لا)^{۳}(۸ا)^{۲۷}$

۱۸۔ $۴۰ا^{۶}ب^{۳}$ ۱۹۔ $\frac{۱۱۲۰}{۸۱}ا^{۴}ب^{۴}$

۲۰- $\frac{۱۰۵۰۰}{لا^{۳}}$ ۲۱- $\frac{۷۰ لا^{۶} ا^{۱۰}}{ا^{۲} ب^{۹}}$

۲۲- ۲لا^{۴} + ۲۴لا^{۲} + ۸

۲۳- ۲لا(۱۶لا^{۴} − ۲۰لا^{۲}ا^{۲} + ۵ا^{۴})

۲۴- ۱۴۰ $\sqrt{۲}$

۲۵- ۲(۳۶۵ − ۳۶۳لا + ۶۳لا^{۲} − لا^{۳})

۲۶- ۲۵۲ ۲۷- $-\frac{۴۲۹}{۱۶}$لا^{۱۴}

۲۸- $\frac{۱۸۹ ا^{۱۷}}{۸}$ ، $-\frac{۲۱}{۱۶}$ا^{۱۹}

۲۹- ۱۱۰۵۶۵ا^{۴} ۳۰- ۱۸۴ا^{۳}ب^{۶}

۳۱- ۱۳۶۵ ، −۱۳۶۵ ۳۲- ۱۸۵۶۴

۳۳- $\frac{۷}{۱۸}$ ۳۴- ن : $\frac{۱}{۲}$(ن − ر) | $\frac{۱}{۲}$(ن + ر)

۳۵- ۲ن : $\frac{۲ن}{۳}$ | $\frac{۴ن}{۳}$

امثلہ نمبری ۲۲ (صفحات ۳۶۲-۳۶۶)

۱- −۱۳۴ ۲- −۶ ۳- −۳۹۲

۴- ۵۸۴ ۶- ۱٫۱۰ ۷- ۱٫۰۰۶

۸- ۱٫۰۱۲۰۶ ۹- ۱٫۰۰۳۵۰۵ ۱۰- بارھویں

۱۱- چھٹی ۱۲- دسویں اور گیارھویں

۱۳- تیسری رقم = $\text{۶}\frac{\text{۲}}{\text{۳}}$ ۱۴- چوتھی اور پانچویں رقمیں = $\frac{\text{۷}}{\text{۱۴۴}}$

۱۷- لا = ۲، ا = ۳، ن = ۵

۱۸- ۱ + ۸لا + ۲۰لا$^{\text{۲}}$ + ۸لا$^{\text{۳}}$ − ۲۶لا$^{\text{۴}}$ − ۸لا$^{\text{۵}}$ + ۲۰لا$^{\text{۶}}$ − ۸لا$^{\text{۷}}$ + لا$^{\text{۸}}$

۱۹- ۲۷لا$^{\text{۶}}$ − ۵۴ و لا$^{\text{۵}}$ + ۱۱۷ و$^{\text{۲}}$ لا$^{\text{۴}}$ − ۱۱۶ و$^{\text{۳}}$ لا$^{\text{۳}}$ + ۱۱۷ و$^{\text{۴}}$ لا$^{\text{۲}}$ − ۵۴ و$^{\text{۵}}$ لا + ۲۷ و$^{\text{۶}}$

۲۰- $\frac{\lfloor \text{ن}}{\lfloor \text{ر}-1 \; \lfloor \text{ن}-\text{ر}+1} \times \text{لا}^{\text{ر}-1}\,\text{و}^{\text{ن}-\text{ر}+1}$

۲۱- $(-1)^{\text{ع}} \frac{\lfloor 2\text{ن}+1}{\lfloor \text{ع}+1 \; \lfloor 2\text{ن}-\text{ع}} \text{لا}^{2\text{ع}-2\text{ن}+1}$

۲۲- ۱۴ ۲۳- ۲ر=ن ۲۵- ۵$^{\text{ن}}$

۲۶- ۱

۳۶- $\frac{(1+\text{لا})^{\text{ن}}+(1-\text{لا})^{\text{ن}}}{2}$ ۳۷- $\left(\frac{1+2\text{لا}}{1+\text{لا}}\right)^{\text{ن}}$

امثلہ نمبری ۲۳ (صفحات ۳۷۳-۳۷۴)

۶- مستدق ۷- مستدق ۸- متبع

۹- اگر لا > ۱ تو مستدق، اگر لا < ۱ یا لا = ۱ تو متبع

۱۰- مستدق

۱۱- اگر لا > ۱ یا لا = ۱ تو مستدق، اگر لا < ۱ تو متبع

امثلہ نمبری ۲۴ (صفحات ۴۸۸-۴۹۰)

۱- $1+\frac{1}{2}\text{لا}-\frac{1}{8}\text{لا}^2+\frac{1}{16}\text{لا}^3$

۲- $1+\frac{3}{2}\text{لا}+\frac{3}{8}\text{لا}^2-\frac{1}{16}\text{لا}^3$

۳- $1-\frac{2}{5}\text{لا}-\frac{3}{25}\text{لا}^2-\frac{8}{125}\text{لا}^3$

۴- $1-2\text{لا}+3\text{لا}^2-4\text{لا}^3$

۵- $1-\text{لا}-\text{لا}^2-\frac{5}{3}\text{لا}^3$

۶- $1+\text{لا}+2\text{لا}^2+\frac{14}{3}\text{لا}^3$

۷- $1-\text{لا}+\frac{3}{2}\text{لا}^2-\frac{5}{2}\text{لا}^3$

۸- $1-\text{لا}+\frac{2}{3}\text{لا}^2-\frac{10}{27}\text{لا}^3$

۹- $1+\text{لا}+\frac{\text{لا}^2}{6}-\frac{\text{لا}^3}{54}$

۱۰- $1-2\text{ی}+\frac{5}{2}\text{ی}^2-\frac{5}{2}\text{ی}^3$

۱۱- $\frac{1}{8}\left(1-\frac{3}{2}\text{لا}+\frac{3}{2}\text{لا}^2-\frac{5}{4}\text{لا}^3\right)$

۱۲- $3\left(1+\frac{\text{لا}}{9}-\frac{1}{162}\text{لا}^2+\frac{1}{1458}\text{لا}^3\right)$

۱۳- $4\left(1+\text{ی}-\frac{1}{4}\text{ی}^2+\frac{1}{6}\text{ی}^3\right)$

۱۴- $\frac{1}{27}\left(1+\text{لا}+\frac{5}{6}\text{لا}^2+\frac{35}{54}\text{لا}^3\right)$

۱۵- $\frac{1}{2\text{ی}^{\frac{1}{2}}}\left(1+\frac{\text{لا}}{\text{ی}}+\frac{3}{2}\times\frac{\text{لا}^2}{\text{ی}^2}+\frac{5}{2}\times\frac{\text{لا}^3}{\text{ی}^3}\right)$

۱۶- $-\frac{429}{16}\text{لا}^7$

۱۷- $\frac{77}{256}\text{لا}^{30}$

۱۸- $-\frac{1040}{81}\text{ی}^{18}$

۱۹- $\frac{16\,\text{ب}^4}{243\,\text{ی}^5}$

۲۰- $(\text{ر}+1)\text{لا}^{\text{ر}}$

۲۱- $\frac{(\text{ر}+1)(\text{ر}+2)(\text{ر}+3)}{1\times2\times3}\text{لا}^{\text{ر}}$

۲۲- $(-۱)^{ر-۱} \dfrac{۱ \times ۳ \times ۵ \times \ldots\ldots (۲ر-۳)}{۲^{ر} \,|ر} \times لا^{ر}$

۲۳- $(-۱)^{ر-۱} \dfrac{۱۱ \times ۸ \times ۵ \times ۲ \times ۱ \times ۴ \ldots\ldots (۳ر-۱۴)}{۳^{ر} \,|ر} لا^{ر}$

۲۴- $-۱۸۴۸ لا^{۱۳}$ ۲۵- $-\dfrac{۱۹۷۱۲}{۳} لا^{۶}$

۲۷- $۴ر+۱$ ۲۸- $(ر+۱)(ر+۳)$

۲۹- چوتھی ۳۰- تمام سوائے دو کے

۳۱- $۱ - ۵لا + ۵^{۲}لا^{۲} - \ldots\ldots$

اور $\dfrac{۱}{۵لا}\left(۱ - \dfrac{۱}{۵لا} + \dfrac{۱}{۵^{۲}لا^{۲}} - \ldots\ldots\right)$

امثلہ نمبری ۲۵ (صفحات ۴۰۰-۴۰۲)

۱- $(-۱)^{ر} \dfrac{۱ \times ۳ \times ۵ \times ۷ \times \ldots (۲ر-۱)}{۲^{ر} \,|ر}$

۲- $\dfrac{(ر+۱)(ر+۲)(ر+۳)(ر+۴)}{|۴} لا^{ر}$

۳- $(-۱)^{ر-۱} \dfrac{۱ \times ۲ \times ۵ \times \ldots\ldots (۳ر-۴)}{|ر} لا^{ر}$

۴- $(-۱)^{ر} \dfrac{۲ \times ۵ \times ۸ \times \ldots\ldots (۳ر-۱)}{۳^{ر} \,|ر} لا^{ر}$

۵- $(-۱)^{ر} \frac{(ر+۱)(ر+۲)}{\lfloor ۲} لا^{۲ر}$

۶- $\frac{۳ \times ۵ \times ۷ \ldots\ldots (۲ر+۱)}{\lfloor ر} لا^{ر}$

۷- $(-۱)^{ر} \frac{ب^{ر}}{ا^{ر+۱}} \times لا^{ر}$ ۸- $\frac{ر+۱}{۲^{ر+۲}} لا^{ر}$

۹- $\frac{۲ \times ۱ \times ۴ \ldots\ldots (۳ر-۵)}{۳^{ر} \lfloor ر} \times \frac{لا^{۳ر}}{ا^{۳ر-۲}}$

۱۰- $(-۱)^{ر} \frac{۱ \times ۳ \times ۵ \ldots\ldots (۲ر-۱)}{\lfloor ر} لا^{ر}$

۱۱- $\frac{۲ \times ۵ \times ۸ \ldots\ldots (۳ر-۱)}{\lfloor ر} لا^{ر}$

۱۲- $\frac{(ن+۱)(۲ن+۱) \ldots\ldots (\overline{ر-۱} \times ن+۱)}{\lfloor ر} \times \frac{لا^{ر}}{ا^{ن ر+۱}}$

۱۳- تیسری ۱۴- پانچویں ۱۵- تیرھویں

۱۶- ساتویں ۱۷- چوتھی اور پانچویں ۱۸- تیسری

۱۹- ۹٫۸۹۹۴۹ ۲۰- ۹٫۹۹۳۳۳

۲۱- ۱۰٫۰۰۹۹۹ ۲۲- ۶٫۹۹۳۲۷

۲۳- ٫۱۹۸۲۲ ۲۴- ۱٫۰۰۱۳۳

۲۵- ٫۰۰۷۹۵ ۲۶- ۵٫۰۰۰۹۶

۲۷- $۱ - \frac{۲۳}{۹} لا$ ۲۸- $\frac{۲}{۳}(۱ + \frac{لا}{۲۴})$

۲۹- $۱ - \frac{۵ لا}{۸}$ ۳۰- $\frac{۱}{۴} - \frac{۵}{۹} لا$

۲۲- $(-\text{۱})^{\text{ر}-\text{۱}} \frac{\text{۱}\times\text{۳}\times\text{۵}\times\cdots\cdots(\text{۲ر}-\text{۳})}{\text{۲}^{\text{ر}}\,\lfloor\text{ر}} \times \text{لا}^{\text{ر}}$

۲۳- $(-\text{۱})^{\text{ر}-\text{۱}} \frac{\text{۱۱}\times\text{۸}\times\text{۵}\times\text{۲}\times\text{۱}\times\text{۴}\times\cdots\cdots(\text{۳ر}-\text{۱۴})}{\text{۳}^{\text{ر}}\,\lfloor\text{ر}}\, \text{لا}^{\text{ر}}$

۲۴- $-\text{۱۸۴۸}\,\text{لا}^{\text{۱۳}}$ ۲۵- $-\frac{\text{۱۹۷۱۲}}{\text{۳}}\,\text{لا}^{\text{۶}}$

۲۷- $\text{۴ر}+\text{۱}$ ۲۸- $(\text{ر}+\text{۱})(\text{ر}+\text{۳})$

۲۹- چوتھی ۳۰- تمام سوائے دو کے

۳۱- $\text{۱}-\text{۵لا}+\text{۲۵لا}^{\text{۲}}-\cdots\cdots$

اور $\frac{\text{۱}}{\text{۵لا}}\left(\text{۱}-\frac{\text{۱}}{\text{۵لا}}+\frac{\text{۱}}{\text{۲۵لا}^{\text{۲}}}-\cdots\cdots\right)$

امثلہ نمبری ۲۵ (صفحات ۴۰۰-۴۰۲)

۱- $(-\text{۱})^{\text{ر}} \frac{\text{۱}\times\text{۳}\times\text{۵}\times\text{۷}\times\cdots\cdots(\text{۲ر}-\text{۱})}{\text{۲}^{\text{ر}}\,\lfloor\text{ر}}$

۲- $\frac{(\text{ر}+\text{۱})(\text{ر}+\text{۲})(\text{ر}+\text{۳})(\text{ر}+\text{۴})}{\lfloor\text{۴}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$

۳- $(-\text{۱})^{\text{ر}-\text{۱}} \frac{\text{۱}\times\text{۲}\times\text{۵}\times\cdots\cdots(\text{۳ر}-\text{۴})}{\lfloor\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$

۴- $(-\text{۱})^{\text{ر}} \frac{\text{۲}\times\text{۵}\times\text{۸}\times\cdots\cdots(\text{۳ر}-\text{۱})}{\text{۳}^{\text{ر}}\,\lfloor\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$

۵- $\frac{(-۱)^{ر}(ر+۱)(ر+۲)}{\lfloor ۲}لا^{ر}$

۶- $\frac{۳\times۵\times۷\times\ldots\ldots(۲ر+۱)}{\lfloor ر}لا^{ر}$

۷- $(-۱)^{ر}\frac{ب^{ر}}{ا^{ر+۱}}\times لا^{ر}$ ۸- $\frac{ر+۱}{۲^{ر+۲}}لا^{ر}$

۹- $-\frac{۲\times۱\times۴\times\ldots\ldots(۳ر-۵)}{۳^{ر}\lfloor ر}\times\frac{لا^{ر}}{ا^{۳ر-۲}}$

۱۰- $(-۱)^{ر}\frac{۱\times۳\times۵\times\ldots\ldots(۲ر-۱)}{\lfloor ر}لا^{ر}$

۱۱- $\frac{۲\times۵\times۸\times\ldots\ldots(۳ر-۱)}{\lfloor ر}لا^{ر}$

۱۲- $\frac{(ن+۱)(۲ن+۱)\ldots\ldots(\overline{ر-۱}\times ن+۱)}{\lfloor ر}\times\frac{لا^{ر}}{ا^{ن ر+۱}}$

۱۳- تیسری ۱۴- پانچویں ۱۵- تیرھویں

۱۶- ساتویں ۱۷- چوتھی اور پانچویں ۱۸- تیسری

۱۹- ۹٫۸۹۹۴۹ ۲۰- ۹٫۹۹۳۳۳

۲۱- ۱۰٫۰۰۴۹۹ ۲۲- ۹٫۹۹۳۲۷

۲۳- ٫۱۹۸۴۲ ۲۴- ۱٫۰۰۱۳۳

۲۵- ٫۰۰۷۹۵ ۲۶- ۵٫۰۰۰۹۶

۲۷- $۱-\frac{۲۳}{۹}لا$ ۲۸- $\frac{۲}{۳}(۱+\frac{لا}{۲۴})$

۲۹- $۱-\frac{۵لا}{۸}$ ۳۰- $\frac{۱}{۴}-\frac{۵}{۹}لا$

۳۱- $۱ - \frac{۳۴۳}{۱۲۰}$ لا　　　۳۲- $\frac{۱}{۳} - \frac{۱۷}{۳۶۰}$ لا

۳۵- ۱-۴لا+۱۳لا^{۲}　　　۳۶- $۲ + \frac{۲۹}{۴}$لا $+ \frac{۲۹۷}{۳۲}$لا^{۲}

امثلہ نمبری ۲۶ (صفحات ۴۱۱ - ۴۱۴)

۱- ۱۹۷　　　۲- ۱۴۲　　　۳- $(-۱)^{ن-۱}$

۴- $(-۱)^{ن}$(ن^{۲}+۲ن+۲)　　　۶- $\sqrt{۸} = (۱-\frac{۱}{۲})^{-\frac{۳}{۲}}$

۷- $(۱-\frac{۲}{۳})^{-ن} = ۲^{ن}(۱-\frac{۱}{۳})^{-ن}$　　　۱۲- $\frac{\lfloor ۲ن}{\lfloor ن \; \lfloor ن}$

۱۴- (۱-لا^{۳}) - (۱-لا)^{۳} = ۳لا - ۳لا^{۲} سے استخراج ہوا

۱۶- (۱) ۴۵　　　(۲) ۶۱۶۵

۱۸- (۱) (۱+لا)^{ن}(۱+لا)$^{-۱}$ = (۱+لا)$^{ن-۱}$ میں لا^{ر} کے سروں کو مساوی رکھو

(۲) (۱+لا)^{ن}(۱+$\frac{۱}{لا}$)$^{-۲}$ = لا^{۲}(۱+لا)$^{ن-۲}$ میں مطلق رقموں کو مساوی رکھو

۲۰- دائیں طرف کا سلسلہ + $(-۱)^{ن}$ ق$_{ن}^{۲}$ = لا^{۲ن} کا سر جملہ (۱-لا^{۲})$^{-\frac{۱}{۲}}$ میں

۲۱- $۲^{۲ن-۱} - \frac{۱}{۲} \times \frac{\lfloor ۲ن}{\lfloor ن \; \lfloor ن}$

[(ج$_{۰}$ + ج$_{۱}$ + ج$_{۲}$ + ... + ج$_{ن}$)^{۲} - ۲(ج$_{۰}$ج$_{۱}$ + ج$_{۱}$ج$_{۲}$ + ...)

= ج$_{۰}^{۲}$ + ج$_{۱}^{۲}$ + ج$_{۲}^{۲}$ + ... + ج$_{ن}^{۲}$ کو استعمال کرو]

امثلہ نمبری ۲۷ (صفحات ۴۲۱-۴۲۲)

۱- ۱۲۶۰۰ ۲- ۱۶۸ ۳- ۳۳۶۰

۴- ۱۲۶۰۰ $ا^{۲}ب^{۳}ج^{۴}$ ۵- ۹

۶- ۸۰۸۵ ۷- ۳۰ ۸- ۱۹۰۵

۹- ۱۰ ۱۰- $-\frac{۳}{۲}$ ۱۱- ۱

۱۲- $-\frac{۴}{۸۱}$ ۱۳- $\frac{۵۹}{۱۶}$ ۱۴- ۱۰

۱۵- $\frac{۲۱۱}{۳}$ ۱۶- ۱ - $\frac{۱}{۲}$لا - $\frac{۷}{۸}$$لا^{۲}$

۱۷- ۱ - ۲$لا^{۲}$ + ۴$لا^{۳}$ + ۵$لا^{۴}$ - ۲۰$لا^{۵}$

۱۸- ۱۶ (۱ - $\frac{۳}{۲}$$لا^{۲}$ + ۳$لا^{۴}$ + $\frac{۹}{۳۲}$$لا^{۶}$ - $\frac{۹}{۸}$$لا^{۷}$ + $\frac{۹}{۸}$$لا^{۸}$)

امثلہ نمبری ۲۸ (صفحات ۴۲۹-۴۳۱)

۱- ۸، ۶ ۲- ۲، -۱ ۳- $-\frac{۱۶}{۳}$، $-\frac{۱}{۲}$

۴- -۴، $-\frac{۳}{۲}$ ۵- $\frac{۴}{۳}$، $-\frac{۴}{۵}$ ۶- $\frac{۲}{۵}$، $-\frac{۱}{۲}$، $-\frac{۵}{۲}$

۷- $\frac{۷}{۳}$، -۳، $-\frac{۴}{۳}$، $\frac{۲}{۳}$ ۸- ۶ لوک ا + ۹ لوک ب

۹- $\frac{۲}{۳}$ لوک ا + $\frac{۳}{۲}$ لوک ب ۱۰- $-\frac{۴}{۹}$ لوک ا + $\frac{۱}{۳}$ لوک ب

۱۱- $-\frac{۲}{۳}$ لوک ا - $\frac{۱}{۲}$ لوک ب ۱۲- $-\frac{۷}{۱۲}$ لوک ا - لوک ب

۱۳- $\frac{۱}{۲}$ لوک ا ۱۴- -۵ لوک ج ۱۶- لوک ۳

۱۸۔ $\frac{\text{لوک ج}}{\text{لوک ا − لوک ب}}$ ‏ ۱۹۔ $\frac{\text{۵ لوک ج}}{\text{۲ لوک ا + ۳ لوک ب}}$

۲۰۔ $\frac{\text{لوک ا + لوک ب}}{\text{۲ لوک ج − لوک ا + لوک ب}}$

۲۱۔ لا = $\frac{\text{۴ لوک م}}{\text{لوک ا}}$ ، ما = − $\frac{\text{لوک م}}{\text{لوک ب}}$

۲۲۔ لوک لا = $\frac{1}{5}$ (ا + ۳ ب) ، لوک ما = $\frac{1}{5}$ (ا − ۲ ب)

۲۴۔ $\frac{\text{لوک (ا − ب)}}{\text{لوک (ا + ب)}}$

امثلہ نمبری ۲۹ (صفحات ۴۵۲−۴۵۶)

(ا)

۱۔ ۴ ، ۱ ، ۲ ، ۲̄ ، ۱̄ ، ۱̄ ، ۱̄

۲۔ ٫۸۸۲۱۲۵۹ ، ۲٫۸۸۲۱۲۵۹ ، ۳̄٫۸۸۲۱۲۵۹
۵٫۸۸۲۱۲۵۹ ، ۶̄٫۸۸۲۱۲۵۹

۳۔ ۵ ، ۲ ، ۴ ، ۱ ‏ ۴۔ اعشاریہ میں دوسرا، پہلا، پانچواں مقام

۵۔ ۱٫۸۰۶۱۸۰۰ ‏ ۶۔ ۱٫۹۲۴۲۷۹۳

۷۔ ۱̄٫۱۰۷۲۱۰۰ ‏ ۸۔ ۲̄٫۰۹۶۶۹۱۰۰

۹۔ ۱٫۱۵۸۳۶۲۴ ‏ ۱۰۔ ٫۶۶۹۰۰۶۷

۱۱۔ ٫۳۵۹۷۲۷۱ ‏ ۱۲۔ ٫۰۵۶۳۵۲۰

۱۳۔ ۱̄٫۵۰۵۲۹۷۳ ‏ ۱۴۔ ٫۴۴۰۹۲۳۸۸

۱۵- ۱٫۹۴۸۴۴۵ ۱۶- ۱۹۱۵۶۳٫۱

۱۷- ۱٫۱۹۹۸۶۹۲ ۱۸- ۱٫۰۰۳۹۲۳۸

۱۹- ۹٫۰۷۶۲۲۶ ۲۰- ۱۷۸٫۱۴۱۵۱۶

۲۱- ۹ ۲۳- ۳۰۱ ۲۴- ۳٫۴۶

۲۵- ۴٫۲۹ ۲۶- ۱٫۲۰۶ ۲۷- ۱۴٫۲۰۶

۲۸- ۴٫۵۶۲

۲۹- $\text{لا} = \frac{\text{لوک } ۳}{\text{لوک } ۳ - \text{لوک } ۲}$ ، $\text{ما} = \frac{\text{لوک } ۲}{\text{لوک } ۳ - \text{لوک } ۲}$

۳۰- $\text{لا} = \frac{۳ \text{ لوک } ۳ - ۲ \text{ لوک } ۲}{۴(\text{لوک } ۳ - \text{لوک } ۲)}$ ، $\text{ما} = \frac{\text{لوک } ۳}{۴(\text{لوک } ۳ - \text{لوک } ۲)}$

۳۱- ۱٫۶۴۶۰۱

۳۲- $\frac{\text{لوک } ۲}{۲ \text{ لوک } ۷} = ٫۱۷۸۱$ ، $\frac{۲ \text{ لوک } ۷}{\text{لوک } ۲} = ۵٫۶۱۴$

(ب)

۱- ۲٫۴۲۸ ۲- ۲۴٫۲۸ ۳- ۲۴۲٫۸

۴- ۰٫۰۶۱۱ ۵- ۶۹۵۵ ۶- ۵۷٫۸۲

۷- ۵٫۵۵۸ ۸- ۷۹۸٫۴ ۹- ۸٫۰۰۲

۱۰- ٫۰۶۳۴ ۱۱- ٫۷۲۳ ۱۲- ٫۰۰۲۸۹۹

۱۳- ۳۴۶۷۰۰ ۱۴- $۸٫۳۷۱ \times ۱۰^{۵}$

۱۵- ۱٫۴۷ ۱۶- لا = ۳٫۲۳ ، ما = ۱٫۵۲

۱۷- ۲٫۸ ، ۱۰٫۵۵ ، ۲۲٫۶ ، ۳٫۸ ، ۴٫۵

۱۸- ۱۳٫۵۷   ۱۹- ۰٫۹۴۳۴   ۲۰- ۰٫۰۰۰۱۶

۲۱- ۰٫۳۱۸۳   ۲۲- ۰٫۲۹۸   ۲۳- ۵۶۰۰۰

۲۵- لا

امثلہ نمبری ۳۰ (صفحات ۴۷۴-۴۷۸)

۲- لوک$_{و}$ ۲   ۳- لوک$_{و}$ ۳ - لوک$_{و}$ ۲

۷- ۰٫۰۲۰۰۰۰۰۶۶۶۶۶۷۰   ۱۰- و^{لا} - و^{۲}

۱۱- ۰٫۸۴۵۰۹۸۰، ۱٫۰۴۱۳۹۲۷، ۱٫۱۱۳۹۴۳۴

۱۳- $(-۱)^{ر-۱} \times \frac{۱+۲^{ر}}{ر}$ لا^{ر} ۱۴- $(-۱)^{ر-۱}\frac{۳^{ر}+۲^{ر}}{ر}$ لا^{ر}

۱۵- $۲\left\{۱ + \frac{(لا۲)^{۲}}{|\underline{۲}} + \frac{(لا۲)^{۴}}{|\underline{۴}} + \cdots\cdots + \frac{(لا۲)^{۲ر}}{|\underline{۲ر}} + \cdots\cdots\right.$

۱۶- $۱ - \frac{لا^{۲}}{|\underline{۲}} + \frac{لا^{۴}}{|\underline{۴}} - \frac{لا^{۶}}{|\underline{۶}} + \cdots\cdots + (-۱)^{ر}\frac{لا^{۲ر}}{|\underline{۲ر}} + \cdots\cdots$

۲۳- $\frac{لا}{۱-لا}$ + لوک$_{و}$(۱-لا)

۲۹- ۰٫۶۹۳۱۴۷۱۸، ۱٫۰۹۸۶۱۲۲۹، ۱٫۶۰۹۴۳۷۹۲

ا = - لوک$_{و}\left(۱-\frac{۱}{۱۰}\right)$ = ۰٫۱۰۵۳۶۰۵۱۶

ب = - لوک$_{و}\left(۱-\frac{۴}{۱۰۰}\right)$ = ۰٫۰۴۰۸۲۱۹۹۵

ج = - لوک$_{و}\left(۱+\frac{۱}{۸۰}\right)$ = ۰٫۰۱۲۴۲۲۵۲۰

تمت

ان اصطلاحات جبریہ کی فہرست جو اس کتاب میں استعمال کیگئی ہیں



ENGLISH	اردو
Abscissa	فصلہ یا مقطوعہ
Absolute term	رقم مطلق
Algebra	جبر و مقابلہ ۔ الجبرا
Alternando (ratio)	تبدیل (نسبت)
Antecedent (ratio)	مقدم (نسبت)
Antilogarithms	عکسی لوکارتم
Approximation	تقرب
Arithmetical progression	سلسلہ حسابیہ
Arithmetic mean	اوسط حسابی
Base (triangle)	قاعدہ (مثلث)
Binomial Theorem	مسئلہ ثنائی
Characteristic (logarithm	ممیز (لوکارتم)
Circular Cone	مخروط مستدیر
Circular permutations	مدور ترتیبیں
Co-efficient	سر یا مکرر
Combination	اجتماع
Commensurable (numbers)	متوافق (اعداد)

ENGLISH	اردو
Common difference	فرق مشترک
Common ratio	نسبت مشترک
Common logarithm	مروج یا عشری لوکارتم
Complementary (Combinations)	متمم (اجتماع)
Componendo (ratio)	ترکیب (نسبت)
Composite number	عدد مرکب
Compounding (of ratios)	تالیف (نِسَب)
Compound Surd	مرکب اصم
Concrete (quantities)	(مقادیر) مقرون
Conjugate	زوج یا مزدوج
Consecutive terms	ارقام متصلہ
Canstant (quantity)	(مقدار) مستقل
Continued proportion	تناسب مسلسل
Convergence	استدقاق
Convergent series	مستدق سلسلہ
Corresponding values	مطابق قیمتیں
Co-ordinate	محدد
Cross Multioiplication	ضرب چلیپائی
Cross section	تراش عمودی
Cube	مکعب

ENGLISH	اردو
Cube root	جذر الکعب
Denominator	نسب نما
Dependent (variable)	(متغیر) تابع
Descending powers	نزولی قوار
Determinants	مقطعات
Digits	ہندسے
Dimensions	ابعاد
Direct variation	تغیر مستقیم
Dissimilar (things)	غیر متشابہ اشیا
Divergence	اتساع
Divergent series	متسع سلسلہ
Dividendo	تفصیل نسبت
Duplicate (ratio)	(نسبت) مثناة
Elastic string	لچکدار رسّی
Electric current	برقی رو
Eliminant	حاصل اسقاط
Eliminate	ساقط کرنا
Elimination	اسقاط
Equation	مساوات
Equilateral triangle	مثلث متساوی الاضلاع

ENGLISH	اردو
Equimultiples	اضعاف متساویہ
Expand	پھیلاو
Expansion	صورت تفصیلی یا تفصیل
Exponential Theorem	مسئلہ قوت نما
Expression	جملہ
Extremes	طرفین
Even	جفت
Factor	جز ضربی
Finite series	سلسلہ متناہیہ
Formula	ضابطہ
Fractions	کسور
Fractional	کسری
Funtion (of X)	جملہ (لاکا)
Gas	گیس
General Form	صورت عامہ
Geometrical	ہندسیہ
Geometrical progression	سلسلہ ہندسیہ
Gemoetric mean	نسبت مشترک
Gemoetry	علم ہندسہ
Harmonic mean	اوسط موسیقی

ENGLISH	اردو
Harmonic progression	سلسلہ موسیقیہ
Height	ارتفاع
Homogeneous (expression)	(جملہ) متجانسہ
Hyperbola	ہذلولی (قطع زائد)
Hypothesis	مفروضہ
Identity	مساوات متماثلہ
Imaginary quantities	مقادیر خیالی
Incommenurable (numbers)	متباین (اعداد)
Independent (variable)	(متغیر) متبوع
Index	قوت نما
Induction	استقرا
Infinite great (small)	لاانتہا بڑا (چھوٹا)
Inifinite series	سلسلہ غیر متناہیہ
Integer	عدد صحیح
Intensity (of light)	اشتداد (روشنی)
Inverse variation	تغیر معکوس
Intvertendo (ratio)	عکس (نسبت)
Joint variation	تغیر مشترک
Jupiter	مشتری
Limit	انتہا یا حد

ENGLISH	اردو
Linear (permutations)	خطی (ترتیبیں)
Logarithm	لوکارتم
Logarithmic series	لوکارتمی سلسلے
Logarithmic Tables	جداول لوکارتمی
Logarithmic base	لوکارتمی اساس
Mantissa	اعشاریہ لوکارتمی
Mass	مقدار مادہ
Middle term	درمیانی رقم
Multinominal theorem	مسئلہ کثیر الارقام
Multiple	ضعف
Multiplying factor	ضارب جزضربی
Natural logarithm	طبعی لوکارتم
Natural numbers	اعداد طبعیہ
Negative	منفی
N-factorial	حاصل ضربی ن
Notation	طریق کتابت
N^{th} power	ن'ویں قوت
N^{th} root	ن'واں جذر
Numerator	شمار کنندہ
Numerically	تعداداً

ENGLISH	اردو
Odd	طاق
Ordinate	معیق
Oscillating series	اہتزازی سلسلے
Oscillation	اہتزاز
Parabola	شلجمی (قطعہ مکافی)
Partial product	جزوی حاصل ضرب
Pendulum	رقاص
Perfect square	مربع کامل
Permutation	ترتیب
Plane	سطح مستوی
Planet	سیارہ
Polygon	کثیرالاضلاع
Position of rest	محل سکون
Positive	مثبت
Power	قوت
Pressure	دباؤ
Prime number	عدد مفرد
Product	حاصل ضرب
Proper fraction	کسر واجب
Proportion	تناسب

ENGLISH	اردو
Proportional	متناسب
Quadratic Equations	مساوات درجہ دوم
Quantities	مقادیر
Redical	علامت جذر
Radius	نصف قطر
Rationalise	ناطق بنانا
Rationalising factor	منطق جزضربی
Rational quantity	مقدار ناطق یا منطق
(Ratio of) less inequlity	نسبت صغریٰ
(Ratio of) great inequlity	نسبت کبریٰ
Real quantities	مقادیر حقیقی
Reciprocal	متکافی یا مقلوب
Reciprocal equations	مساوات متکافیہ
Rectangle	مستطیل
Recurring decimal	کسور اعشاریہ متوالیہ
Recurring period	دور متوالی
Reduction	تحویل
Relation	ربط یا تعلق
Resistance (Electric)	مزاحمت
Resolution	تحلیل

ENGLISH	اردو
Revolution	گردش
Right cone	قائم مخروط
Root (of an equation)	قیمت (مساوات)
Significant (digits)	ملحوظ (ہندسے)
Similar surds	متشابہ مقادیر اصم
Similar things	متشابہ اشیاء
Similar (triangles)	متشابہ (مثلثات)
Source of light	مبدأ روشنی
Speed	چال
Square	مربع
Square pile	مربع انبار
Square root	جذر
Straight line	خط مستقیم
Sub-duplicate (ratio)	(نسبت) جذریہ
Subsequent (ratio)	تالی (نسبت)
Surds	مقادیر اصم
Tangent	مماس
Tension	تناؤ
Terms	ارقام
Transposition	عمل نقل

ENGLISH	اردو
Triangular pile	مثلثی انبار
Triplicate (ratio)	(نسبتِ) مثلثہ
Unequal roots	غیر مساوی قیمتیں
Unit	اکائی
Unknown (quantities)	(مقادیر) مجہول
Variable quantities	مقادیر متغیرہ
Variation	تغیر
(Vary) inversely	(بدلتا ہے) بالعکس
(Vary) jointly	(بدلتا ہے) بالاشتراک
Venus	زہرہ
Volume	حجم
Vulgar fraction	کسر عام